

光束法空中三角测量

武汉大学

遥感信息工程学院

摄影测量教研室

主要内容

- 一、基本思想与流程
- 二、像片外方位元素和地面点坐标初始值的确定
- 三、误差方程式与法方程式的建立
- 四、带状法方程式的循环分块解法
- 五、带附加参数的自检校光束法区域网平差
- 六、解析空中三角测量的精度

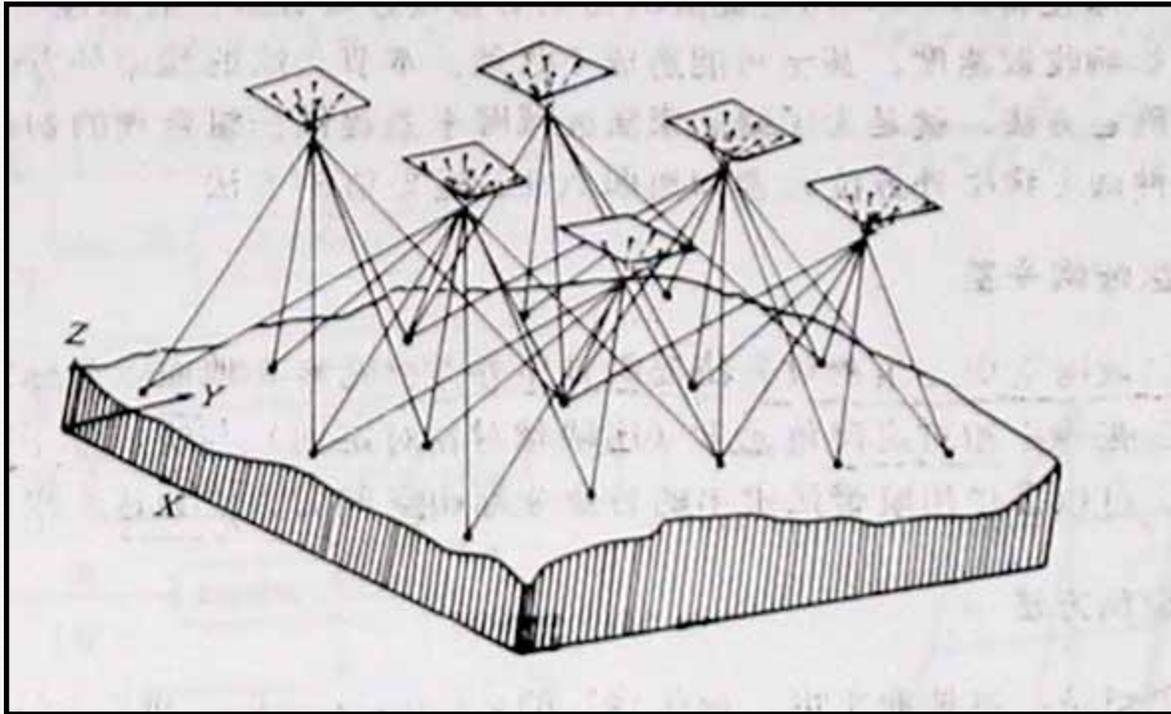
一、基本思想与流程

基本思想

以一张像片组成的一束光线作为一个平差单元，以中心投影的共线方程作为平差的基础方程，通过各光线束在空间的旋转和平移，使模型之间的公共光线实现最佳交会，将整体区域最佳地纳入到控制点坐标系中，从而确定加密点的地面坐标及像片的外方位元素

一、基本思想与流程

原理图



一、基本思想与流程

基本流程

- 获取像片内方位元素、像点坐标和地面控制点坐标
- 确定像片外方位元素和加密点地面坐标近似值
- 逐点建立误差方程式并法化
- 建立改化法方程式
- 采用循环分块法解求改化法方程
- 求出像片的外方位元素
- 计算加密点坐标

二、像片外方位元素和地面点坐标近似值的确定

$$x = -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$
$$y = -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)}$$

将每个立体像对进行相对定向和模型连接构建自由航带网，利用航带中的控制点及相邻航线间的公共点对航线进行概略绝对定向以求得每一张像片的外方位元素和加密点的地面坐标，以此作为未知数的近似值

三、误差方程式与法方程式的建立

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial x}{\partial \kappa} \Delta \kappa + \frac{\partial x}{\partial X_s} \Delta X_s + \frac{\partial x}{\partial Y_s} \Delta Y_s + \frac{\partial x}{\partial Z_s} \Delta Z_s + \frac{\partial x}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial x}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial x}{\partial Z} \Delta Z + x^0 - x$$

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial y}{\partial \kappa} \Delta \kappa + \frac{\partial y}{\partial X_s} \Delta X_s + \frac{\partial y}{\partial Y_s} \Delta Y_s + \frac{\partial y}{\partial Z_s} \Delta Z_s + \frac{\partial y}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial y}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial y}{\partial Z} \Delta Z + y^0 - y$$

$$v_x = a_{11} \Delta \varphi + a_{12} \Delta \omega + a_{13} \Delta \kappa + a_{14} \Delta X_s + a_{15} \Delta Y_s + a_{16} \Delta Z_s - a_{14} \Delta X - a_{15} \Delta Y - a_{16} \Delta Z + x^0 - x$$

$$v_y = a_{21} \Delta \varphi + a_{22} \Delta \omega + a_{23} \Delta \kappa + a_{24} \Delta X_s + a_{25} \Delta Y_s + a_{26} \Delta Z_s - a_{24} \Delta X - a_{25} \Delta Y - a_{26} \Delta Z + y^0 - y$$

$$a_{11} = -\left(f + \frac{x^2}{f}\right) \cos \kappa + \frac{xy}{f} \sin \kappa$$

$$a_{12} = -\frac{xy}{f} \cos \kappa - \left(f + \frac{x^2}{f}\right) \sin \kappa$$

$$a_{13} = +y$$

$$a_{14} = -\frac{f}{H} \cos \kappa$$

$$a_{15} = -\frac{f}{H} \sin \kappa$$

$$a_{16} = -\frac{x}{H}$$

$$a_{21} = -\frac{xy}{f} \cos \kappa + \left(f + \frac{y^2}{f}\right) \sin \kappa$$

$$a_{22} = -\left(f + \frac{y^2}{f}\right) \cos \kappa - \frac{xy}{f} \sin \kappa$$

$$a_{23} = -x$$

$$a_{24} = +\frac{f}{H} \sin \kappa$$

$$a_{25} = -\frac{f}{H} \cos \kappa$$

$$a_{26} = -\frac{y}{H}$$

三、误差方程式与法方程式的建立

误差方程矩阵形式

$$t = \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \\ \Delta\kappa \\ \Delta X_s \\ \Delta Y_s \\ \Delta Z_s \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -a_{14} & -a_{15} & -a_{16} \\ -a_{24} & -a_{25} & -a_{26} \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$V = At + Bx - l$$

$$l = \begin{bmatrix} x^0 - x \\ y^0 - y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

三、误差方程式与法方程式的建立

观测值个数 $(6 \times 6 + 9 \times 9) \times 2 = 234$

未知数个数 $15 \times 6 + 23 \times 3 + 2 \times 2 = 163$

多余观测数 $234 - 163 = 71$



三、误差方程式与法方程式的建立

法方程

$$\begin{bmatrix} A^T P A & A^T P B \\ B^T P A & B^T P B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P l \\ B^T P l \end{bmatrix}$$

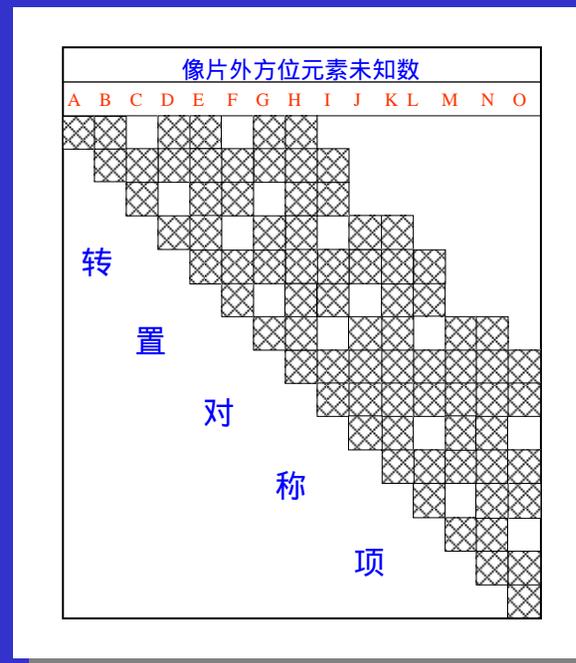
三、误差方程式与法方程式的建立

改化法方程：消除一类未知数后所得的法方程

$$[A^T P A - (A^T P B)(B^T P B)^{-1}(B^T P A)]t = A^T P l - (A^T P B)(B^T P B)^{-1}(B^T P l)$$

三、误差方程式与法方程式的建立

带宽：主对角线到任意一行最远处的非零元素间所包含的未知数个数

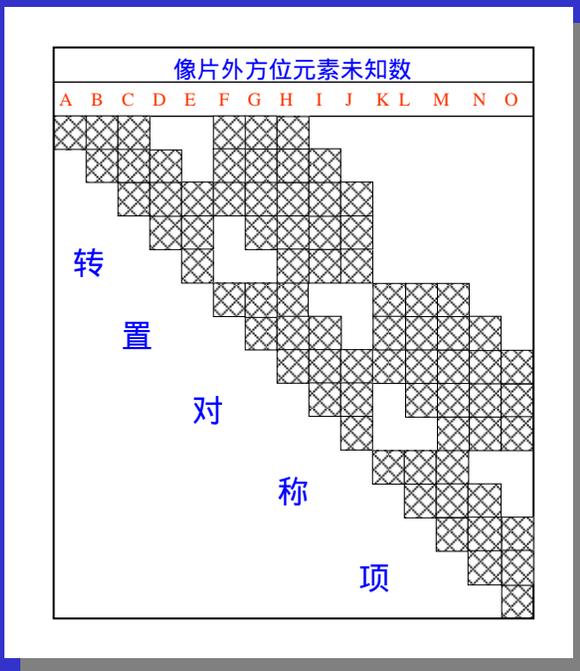


垂直航向排列的带宽

$$m = (2N + 2) \times 6$$

航带数

三、误差方程式与法方程式的建立



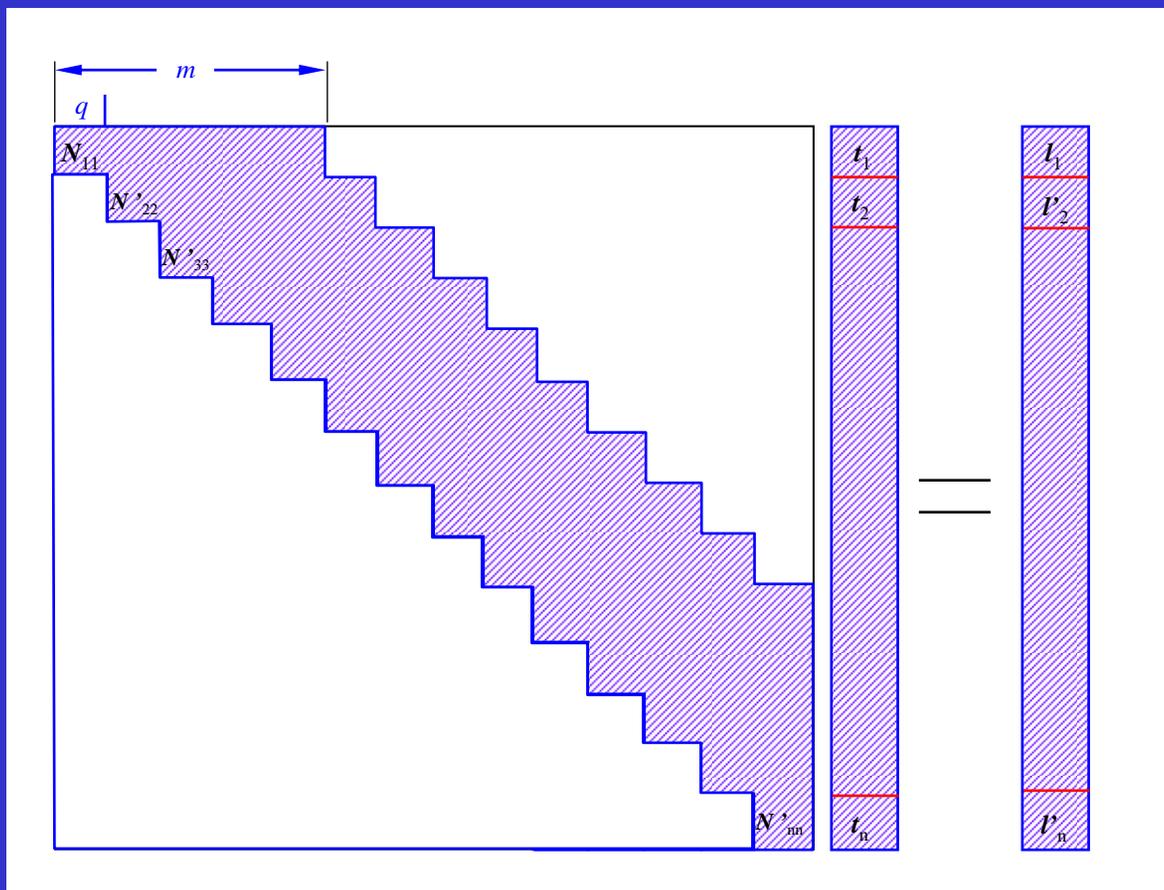
沿航向排列的带宽

$$m = (n+3) \times 6$$

航带中的像片数

当 $n > 2N - 1$ 时，垂直于航向编排像片次序可获得最小带宽，对解法方程有利

四、带状法方程的循环分块解法



消元通式

$$N'_{i+1,i+1} = N_{i+1,i+1} - N'_{i,i+1} N'_{i,i}^{-1} N'_{i,i+1}$$

$$l'_{i+1} = l_{i+1} - N'_{i,i+1} N'_{i,i}^{-1} l'_i$$

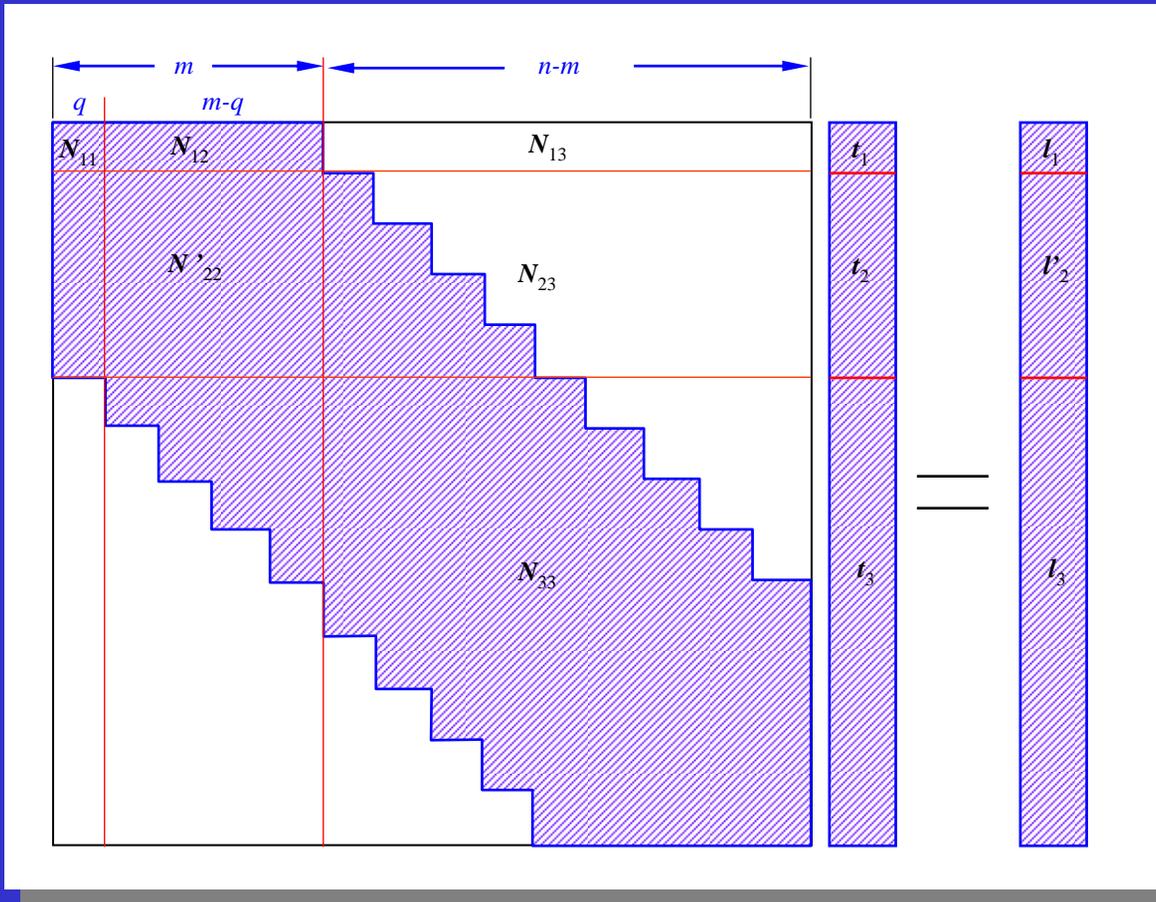
回代通式

$$t_i = N'_{ii}^{-1} (l'_i - N'_{i,i+1} t_{i+1})$$

$$(i = n-1, \dots, 2, 1)$$

先法化后消元解求法方程的过程

四、带状法方程的循环分块解法



带宽

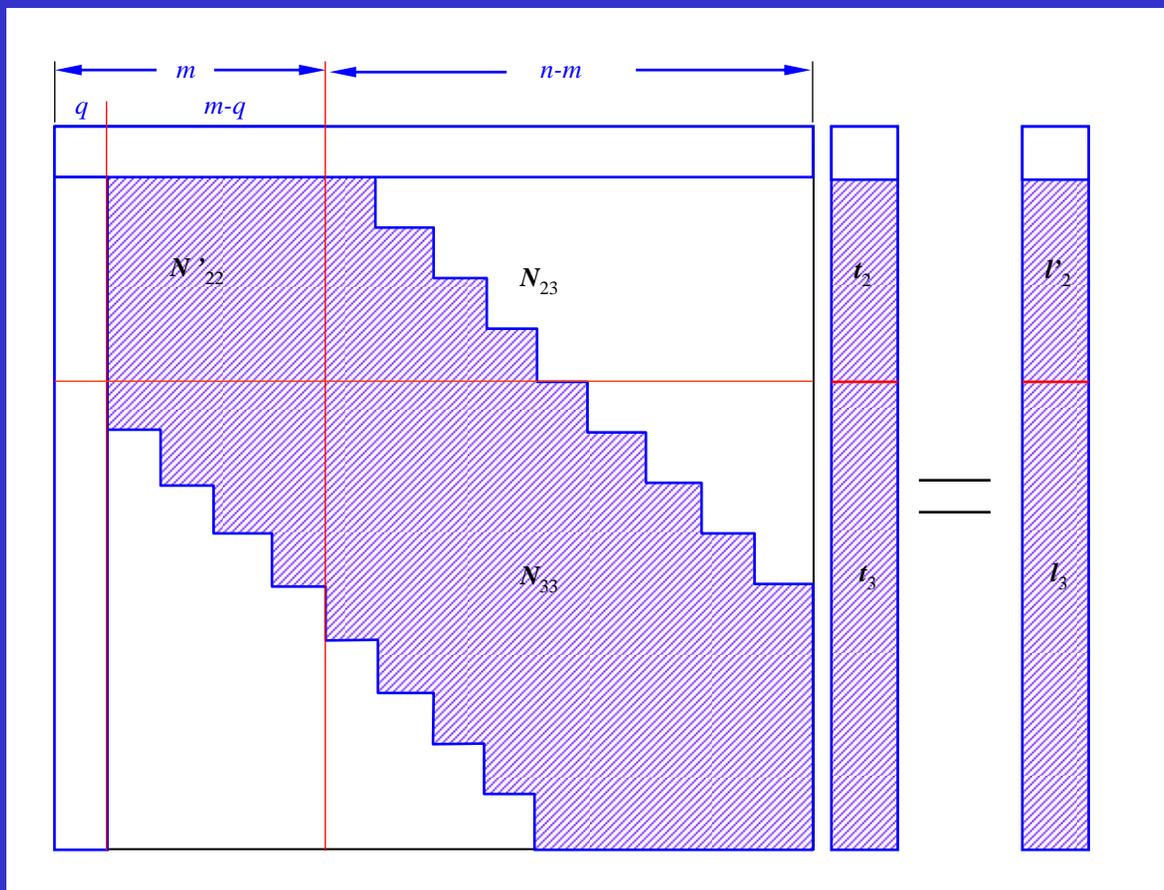
$$m = (n+3) \times 6$$

阶数

$$m \times m$$

边法化边消元解求法方程的过程

四、带状法方程的循环分块解法

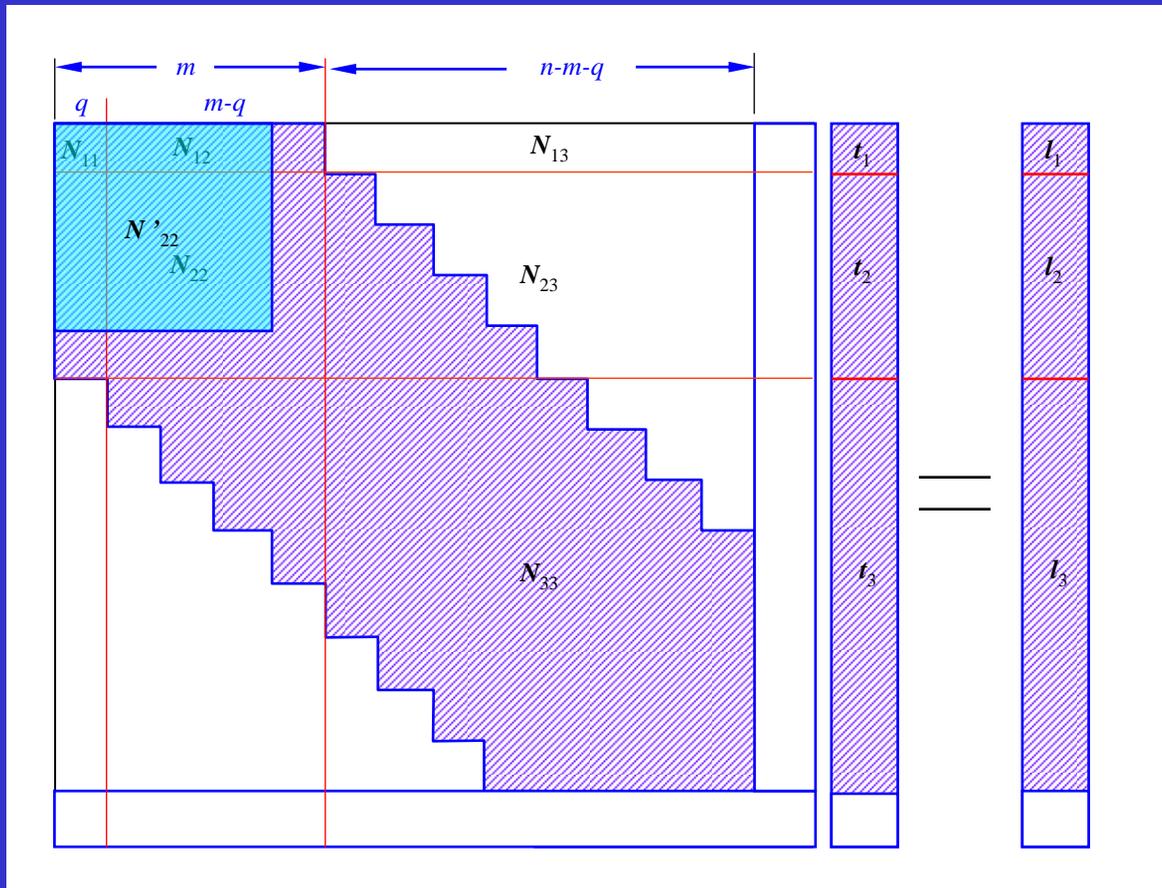


消元通式

$$N'_{22} = N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12}$$
$$l'_2 = l_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} l_1$$

边法化边消元解求法方程的过程

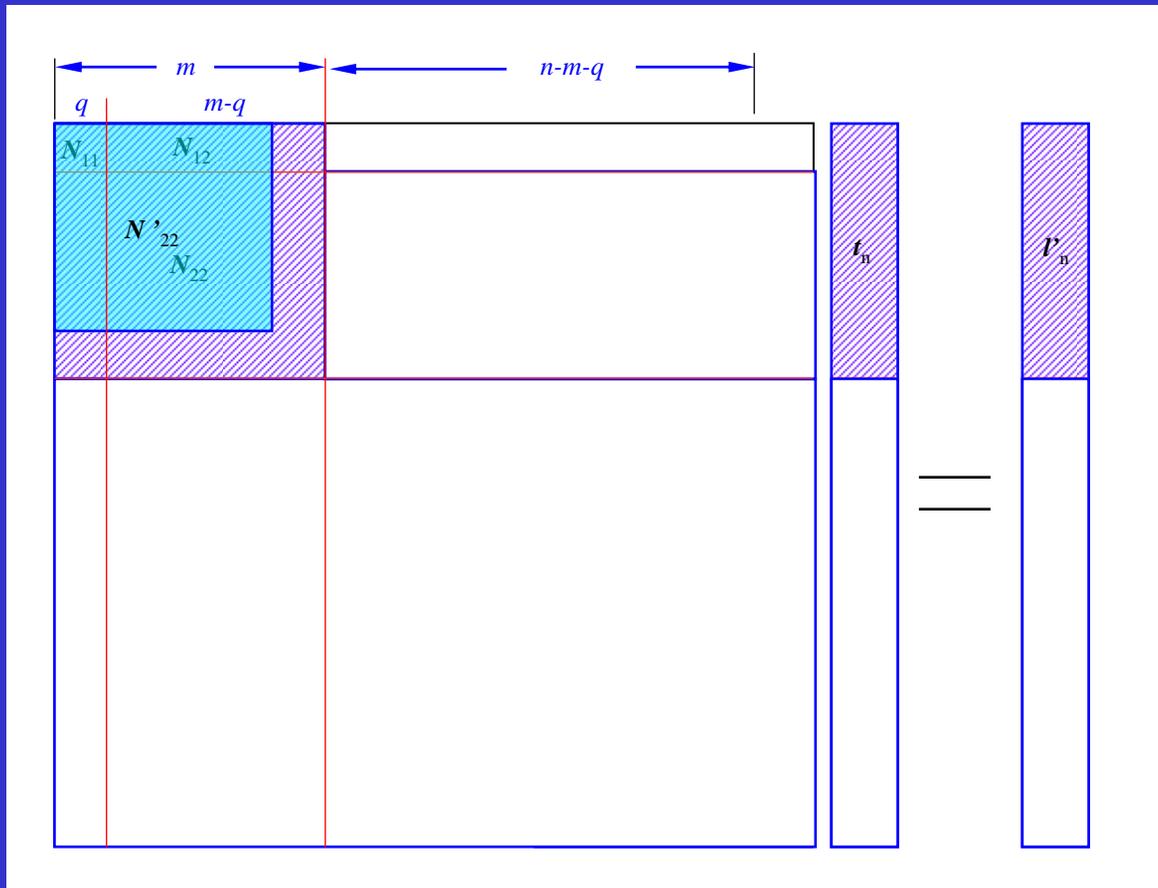
四、带状法方程的循环分块解法



上移

边法化边消元解求法方程的过程

四、带状法方程的循环分块解法



经过若干次消元和上移以后，可解出

$$t_n = N'_{nn}{}^{-1} l'_n$$

通过回代可解出

$$t_i = N'_{ii}{}^{-1} (l'_i - N_{i,i+1} t_{i+1})$$

$(i = n-1, \dots, 2, 1)$

边法化边消元解求法方程的过程

四、自检校光束法区域网平差

$$x = -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} + \Delta x$$
$$y = -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} + \Delta y$$

在共线条件方程中，利用若干附加参数来描述系统误差模型，在区域网平差的同时解求这些附加参数，以自动测定和消除系统误差

四、自检校光束法区域网平差

系统误差是像片坐标的函数

$$\Delta x = f_x(x, y)$$

$$\Delta y = f_y(x, y)$$

$$\Delta x = g_x(r, \theta)$$

$$\Delta y = g_y(r, \theta)$$

四、自检校光束法区域网平差

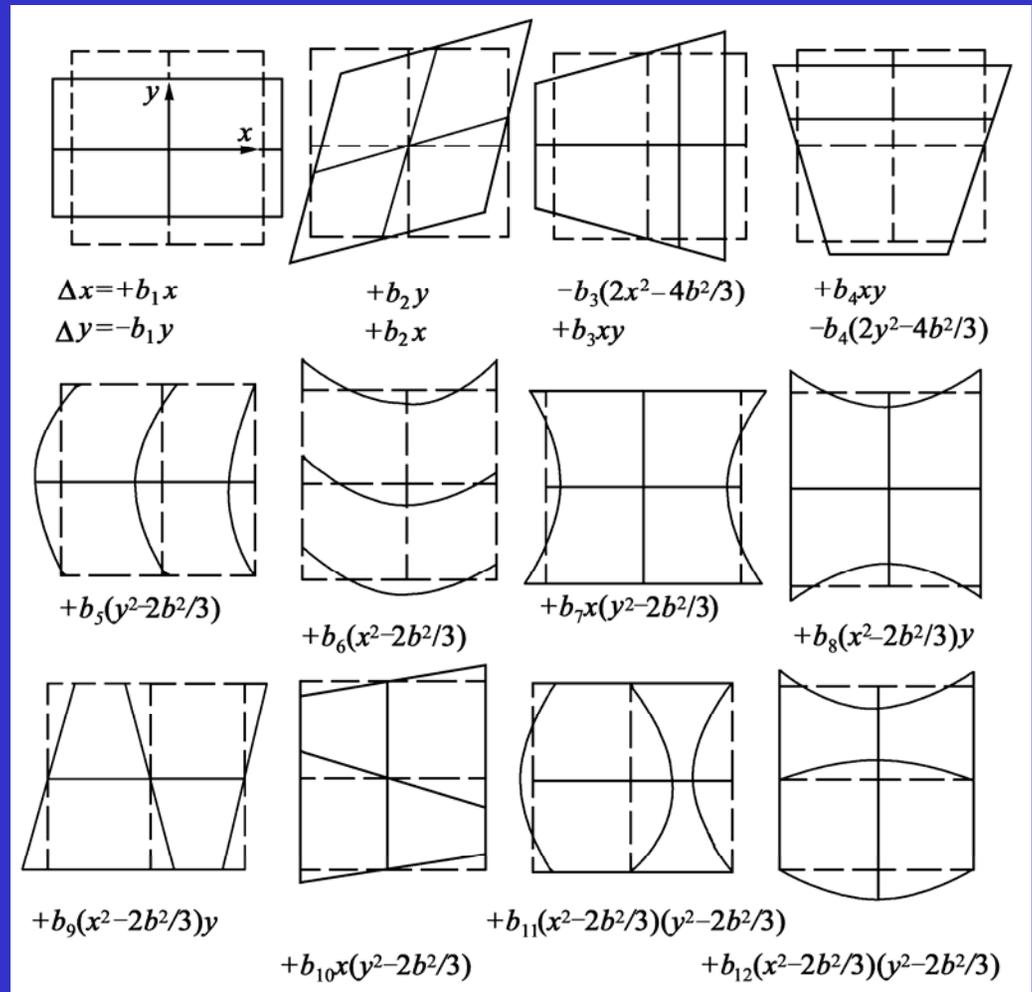
美国Brown博士提出的 21 参数模型

$$\begin{aligned}\Delta x &= a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7x^2y^2 \\ &+ \frac{x}{f} [a_{13}(x^2 - y^2) + a_{14}x^2y^2 + a_{15}(x^4 - y^4)] \\ &+ x [a_{16}(x^2 + y^2) + a_{17}(x^2 + y^2)^2 + a_{18}(x^2 + y^2)^3] \\ &+ a_{19} + a_{21}\left(\frac{x}{f}\right) \\ \Delta y &= a_8xy + a_9x^2 + a_{10}x^2y + a_{11}xy^2 + a_{12}x^2y^2 \\ &+ \frac{y}{f} [a_{13}(x^2 - y^2) + a_{14}x^2y^2 + a_{15}(x^4 - y^4)] \\ &+ y [a_{16}(x^2 + y^2) + a_{17}(x^2 + y^2)^2 + a_{18}(x^2 + y^2)^3] \\ &+ a_{20} + a_{21}\left(\frac{y}{f}\right)\end{aligned}$$

- 1、 a_1 - a_{12} 反映不可补偿的软片变形和非径向畸变
- 2、 a_{13} - a_{15} 反映压平板不平引起的误差
- 3、 a_{16} - a_{18} 反映对称的径向畸变和对称的压平误差
- 4、 a_{19} - a_{21} 反映内方位元素误差

四、自检校光束法区域网平差

联邦德国Ebner
教授提出的 12
参数正交多项式
模型



四、自检校光束法区域网平差

Bauer提出的 3 参数模型

$$\Delta x = a_1 x(r^2 - 100) - a_3 y$$

$$\Delta y = a_1 y(r^2 - 100) + a_2 x + a_3 y$$

1980年第14届ISP大会的总结：

- 1、精度平均提高20%~30%，但有较大的波动
- 2、自检校平差比试验场检校法的结果好，但差别不大
- 3、找不出哪一个参数组比其他的都好

五、自检校光束法区域网平差

将

$$\begin{aligned}x &= -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} + \Delta x \\y &= -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} + \Delta y\end{aligned}$$

线性化，得

误差方程

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}t + \mathbf{B}x + \mathbf{C}c - l, \quad \text{权} P$$

五、自检校光束法区域网平差

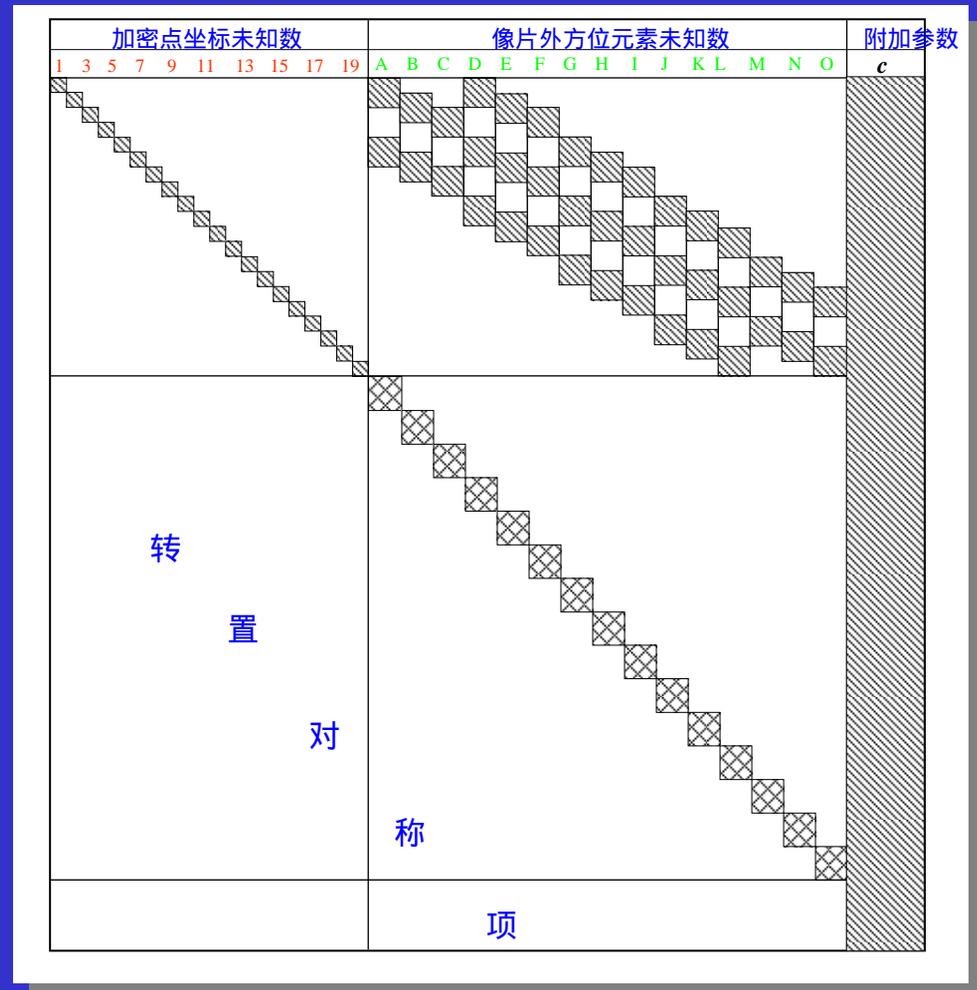
误差方程

$$\begin{aligned} V_1 &= At + B_1 x_1 + B_2 x_2 + Cc - l_1, & \text{权 } P_1 \\ V_2 &= & E_2 x_2 - l_2, & \text{权 } P_2 \\ V_3 &= & Ec - l_3, & \text{权 } P_3 \end{aligned}$$

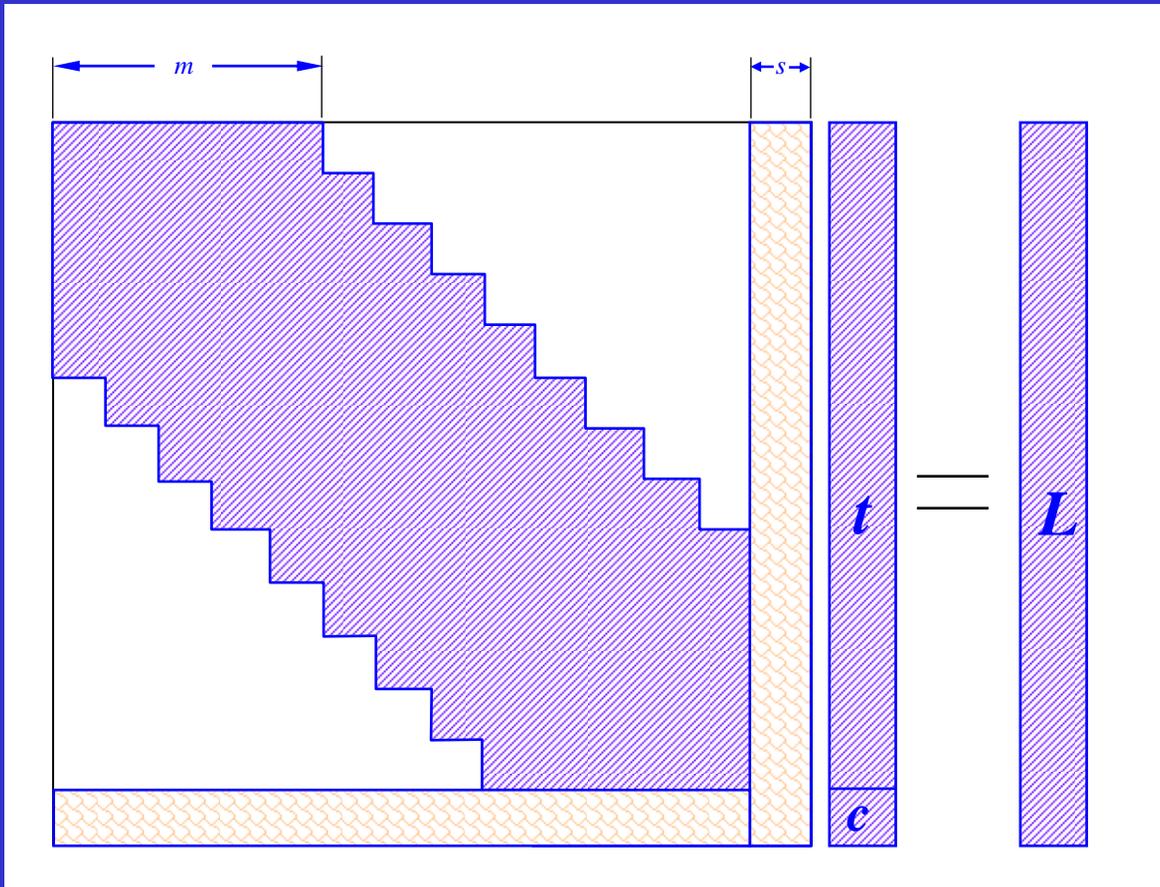
法方程

$$\begin{bmatrix} A^T P_1 A & A^T P_1 B & A^T P_1 C \\ B^T P_1 A & B^T P_1 B + P_2 & B^T P_1 C \\ C^T P_1 A & C^T P_1 B & C^T P_1 C + P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P_1 l_1 \\ B^T P_1 l_1 + P_2 l_2 \\ C^T P_1 l_1 + P_3 l_3 \end{bmatrix}$$

自检校光束法区域网平差法方程系数阵



五、自检校光束法区域网平差



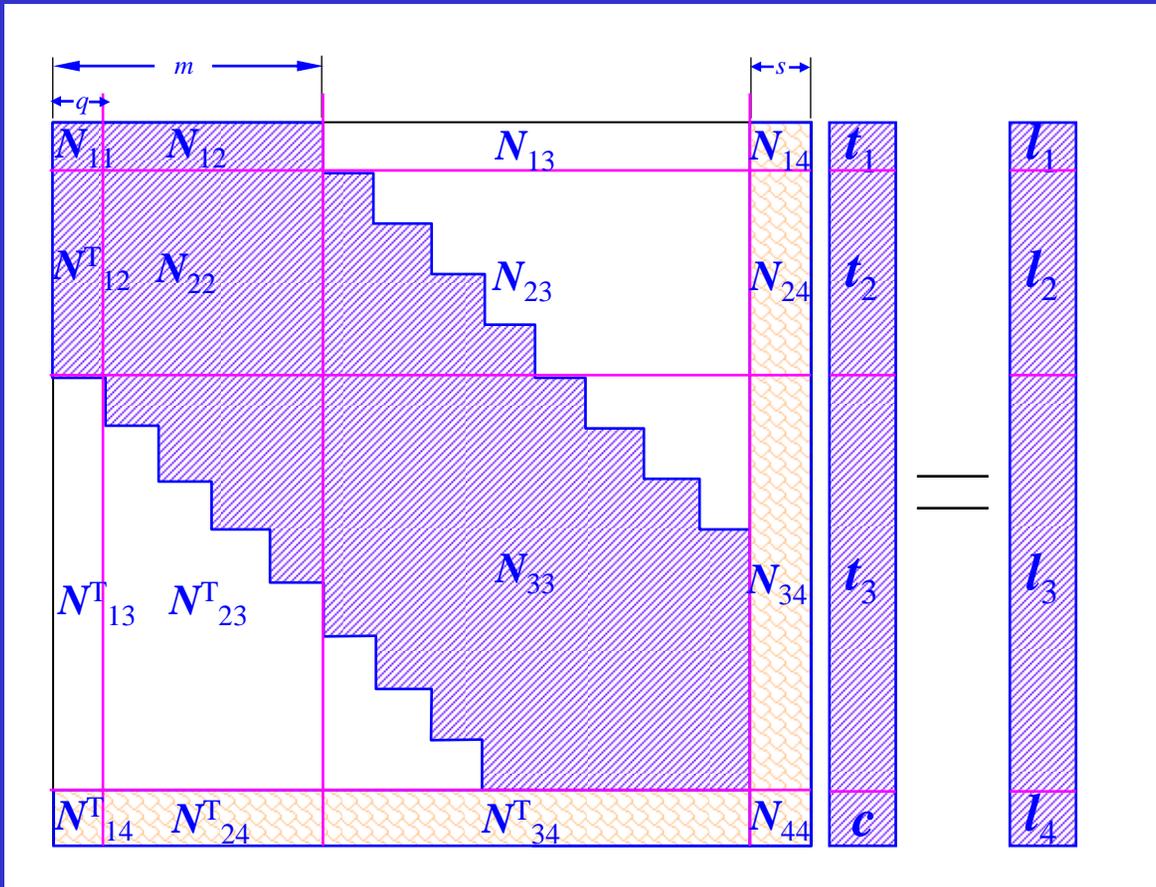
镶边带状矩阵

带宽为 m

边宽为 s

边法化边消元循环分块解法解求法方程

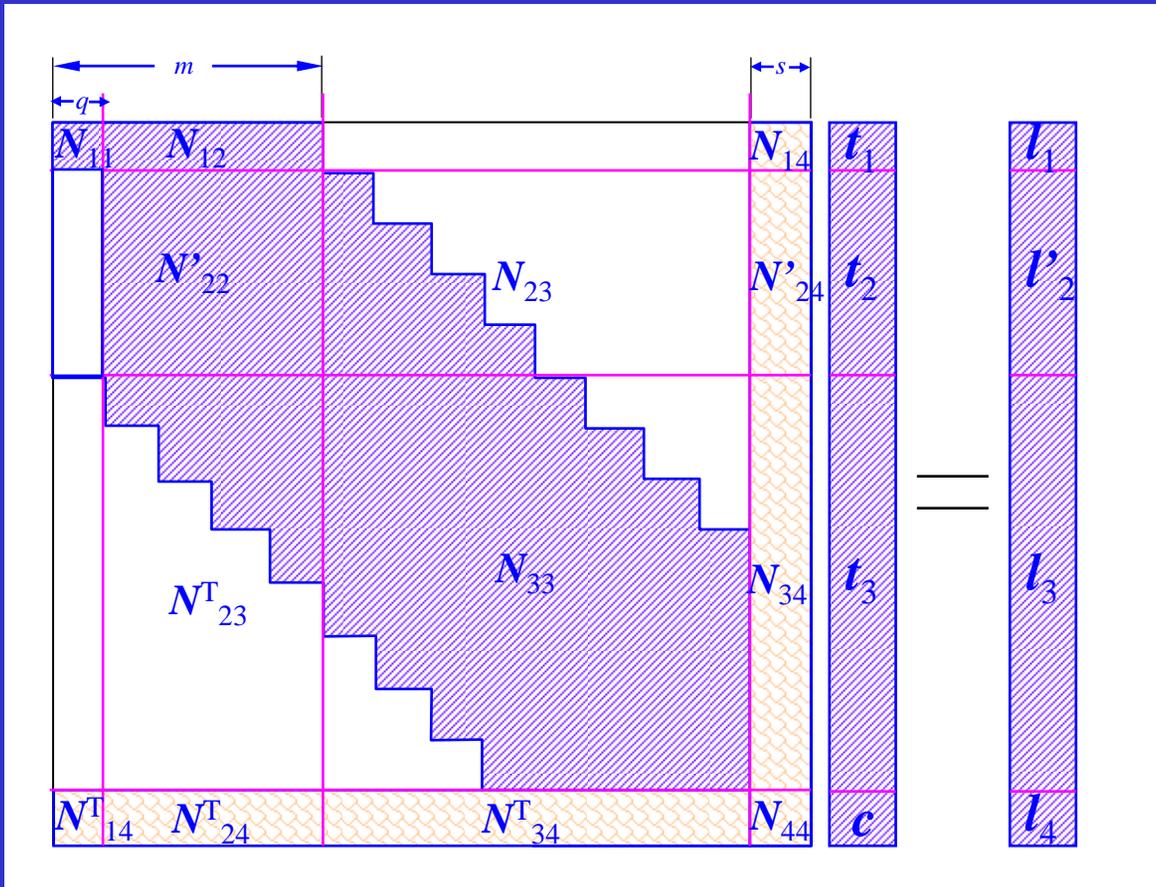
五、自检校光束法区域网平差



分块

边法化边消元循环分块解求法方程过程

五、自检校光束法区域网平差



消元通式

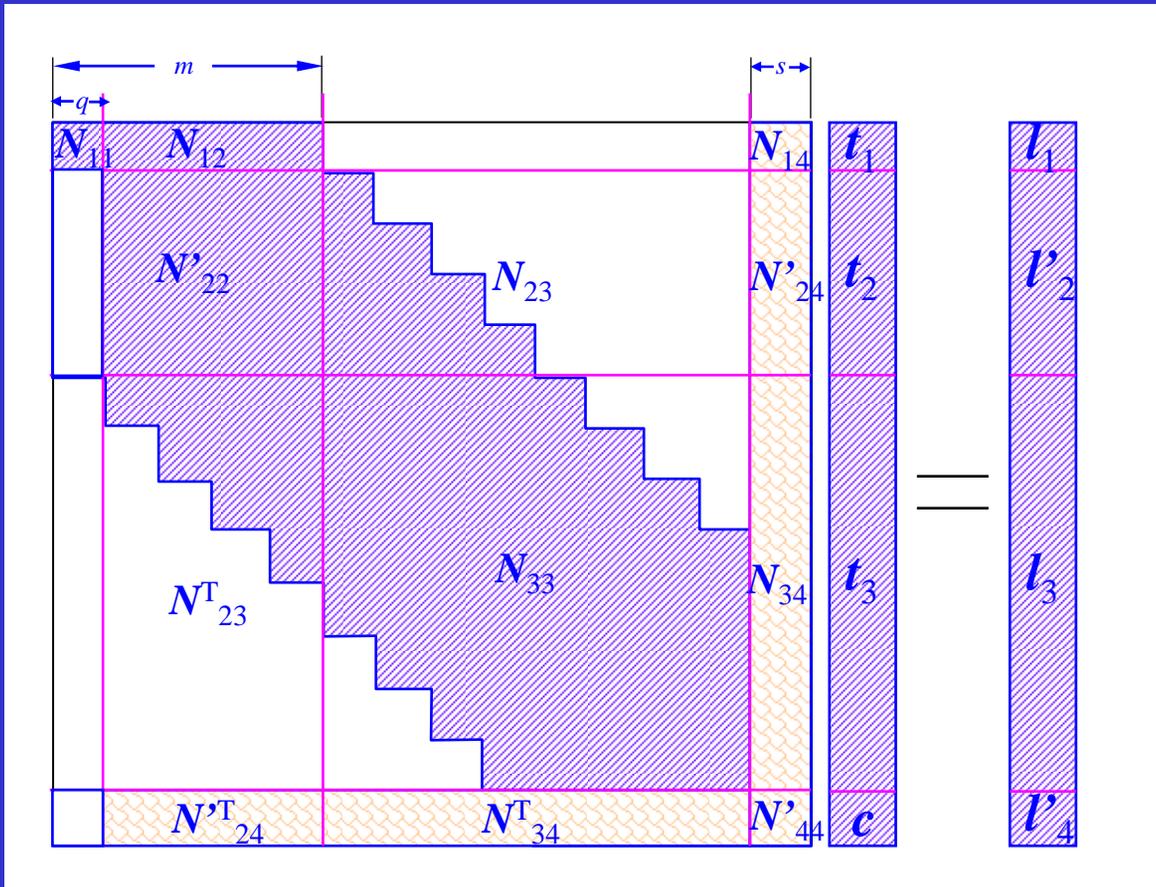
$$N'_{22} = N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12}$$

$$N'_{24} = N_{24} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{14}$$

$$l'_2 = l_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} l_1$$

边法化边消元循环分块解求法方程过程

五、自检校光束法区域网平差



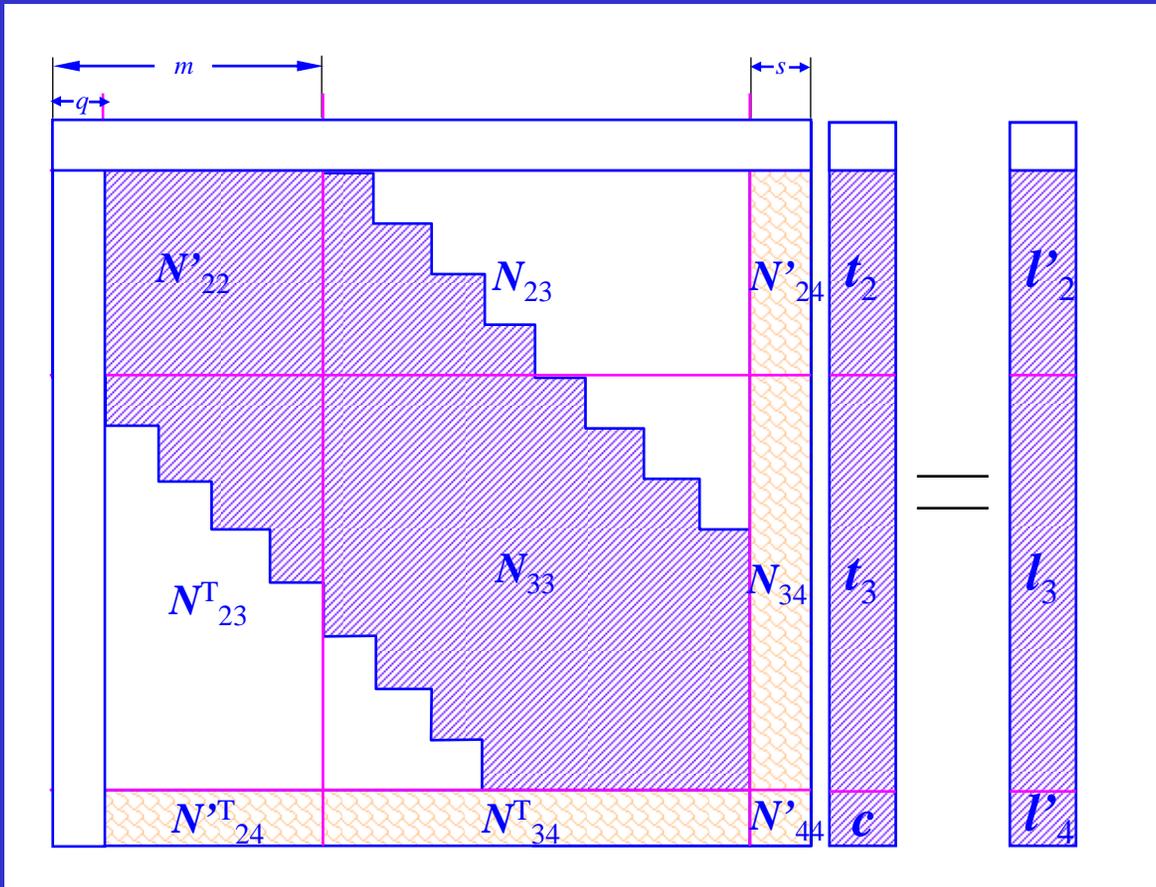
消元通式

$$N'_{44} = N_{44} - N_{14}^T N_{11}^{-1} N_{14}$$

$$l'_4 = l_4 - N_{14}^T N_{11}^{-1} l_1$$

边法化边消元循环分块解求法方程过程

五、自检校光束法区域网平差

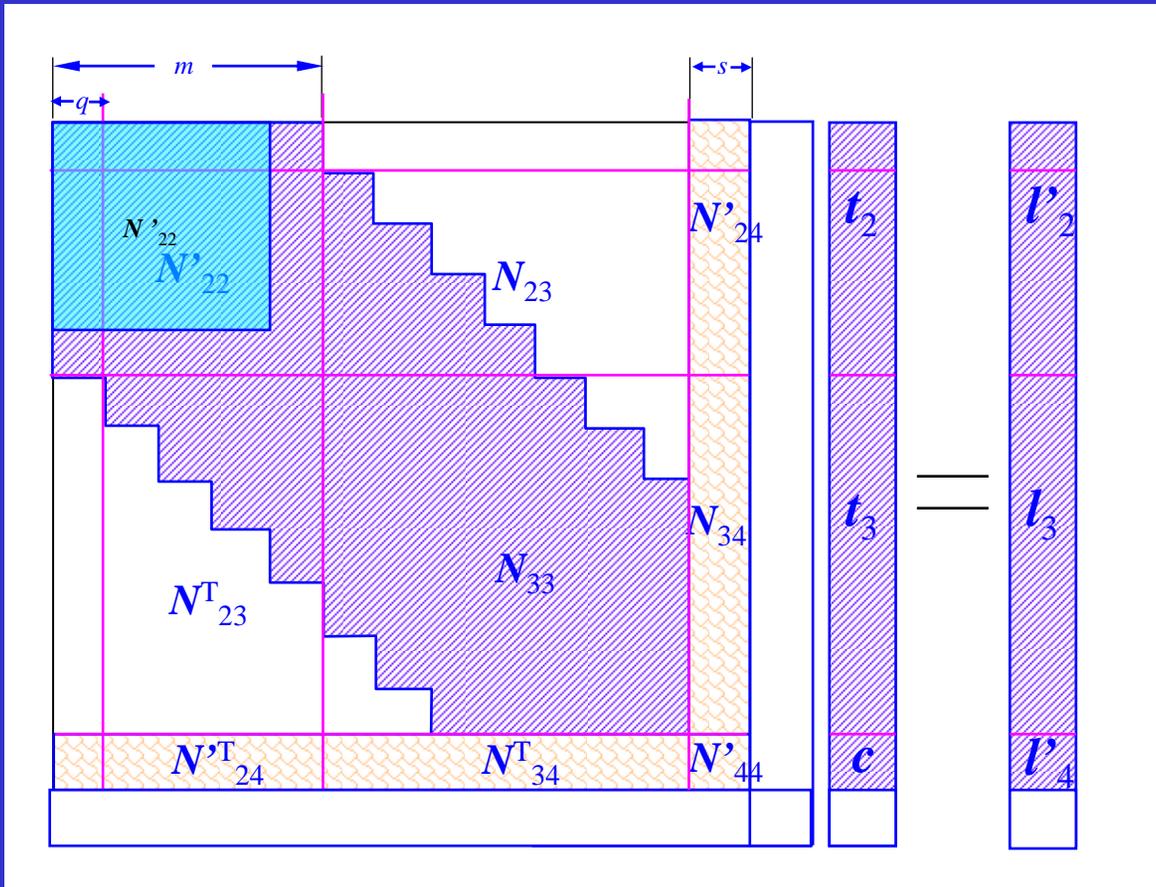


将 $N_{11}, N_{12}, N_{14}, l_1$ 移到计算机外存保存

改化法方程降 q 阶, 但结构不发生变化

边法化边消元循环分块解求法方程过程

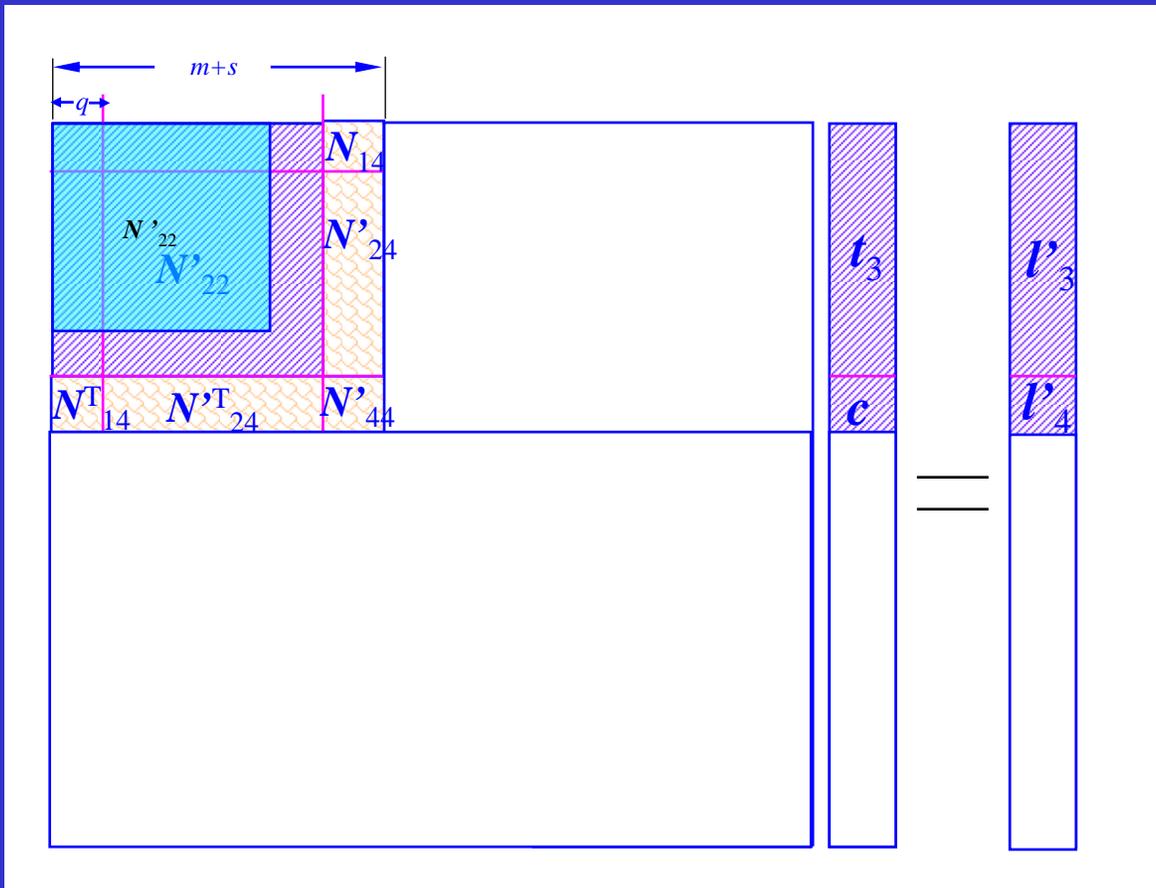
五、自检校光束法区域网平差



上移

边法化边消元循环分块解求法方程过程

五、自检校光束法区域网平差



解改化法
方程得
 $m+s$ 个未
知数，回
代解出其
他未知数

回代通式

$$t_i = N'_{ii}^{-1}(l'_i - N'_{i,i+1}t_{i+1})$$

$$(i = n-1, \dots, 2, 1)$$

边法化边消元循环分块解求法方程过程

六、解析空中三角测量的精度

理论精度

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{r}}$$
$$m_x = \sigma_0 \sqrt{(\mathbf{Q}_{xx})_{ii}}$$

实际精度

$$\mu_X = \sqrt{\frac{\sum (X_{\text{控}} - X_{\text{摄}})^2}{n_X}}$$
$$\mu_Y = \sqrt{\frac{\sum (Y_{\text{控}} - Y_{\text{摄}})^2}{n_Y}}$$
$$\mu_Z = \sqrt{\frac{\sum (Z_{\text{控}} - Z_{\text{摄}})^2}{n_Z}}$$

七、光束法区域网平差实例



区域网基本参数

项目	参数
航摄飞机	运-12
航摄仪	Leica RC-30
航摄胶片	Kodak 2444
航摄仪主距	153.84 mm
摄影比例尺	1:2500
航向重叠	61%
旁向重叠	32%
航线	9条
构架航线	2条
像片	255张
地面控制点	72个
加密点	3632个
区域范围	4km × 5km

平差计算实例

- ❖ 未知数初值的确定
- ❖ 光束法区域网平差
- ❖ 自检校光束法区域网平差
- ❖ 光束法区域网平差精度评定

本讲参考资料

教材

作业：

PP.75，第16题

张剑清，潘励，王树根 编著，《摄影测量学》，武汉大学出版社

参考书

李德仁，郑肇葆 编著，《解析摄影测量学》，测绘出版社