航摄像片的方位元素

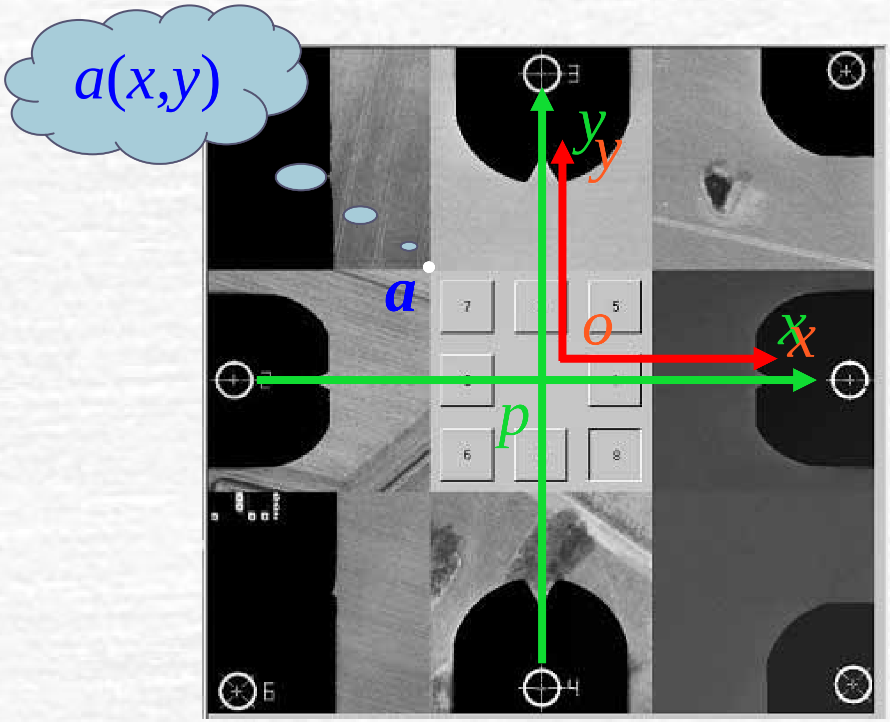
武汉大学
遥感信息工程学院　　摄影测量教研室

主要内容

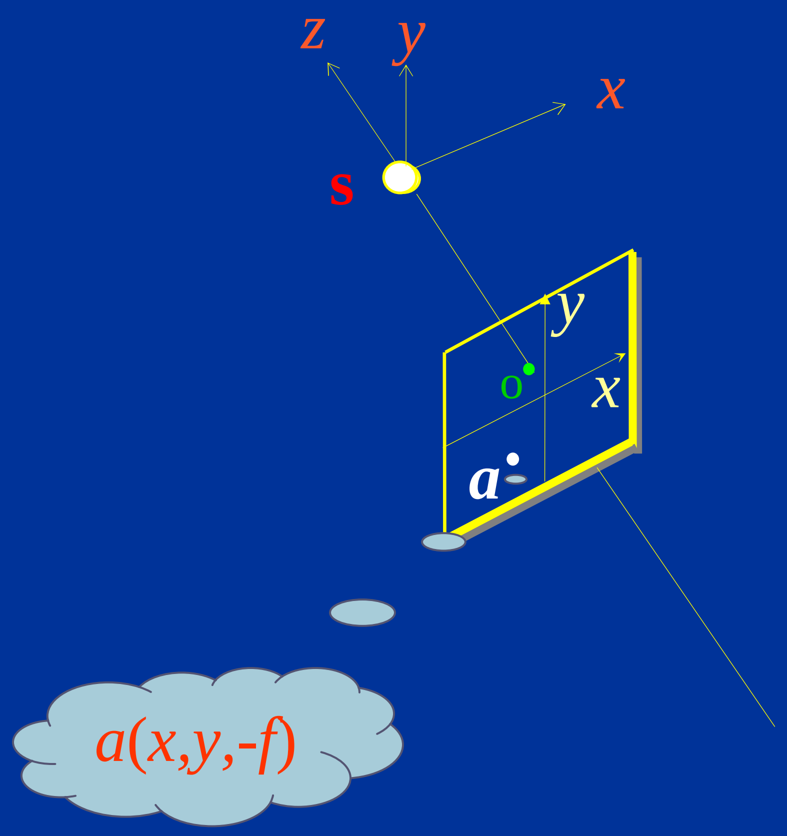
- 一、摄影测量常用坐标系
- 二、航摄像片的方位元素
- 三、空间直角坐标变换

§3.1 摄影测量常用坐标系

像平面直角坐标系

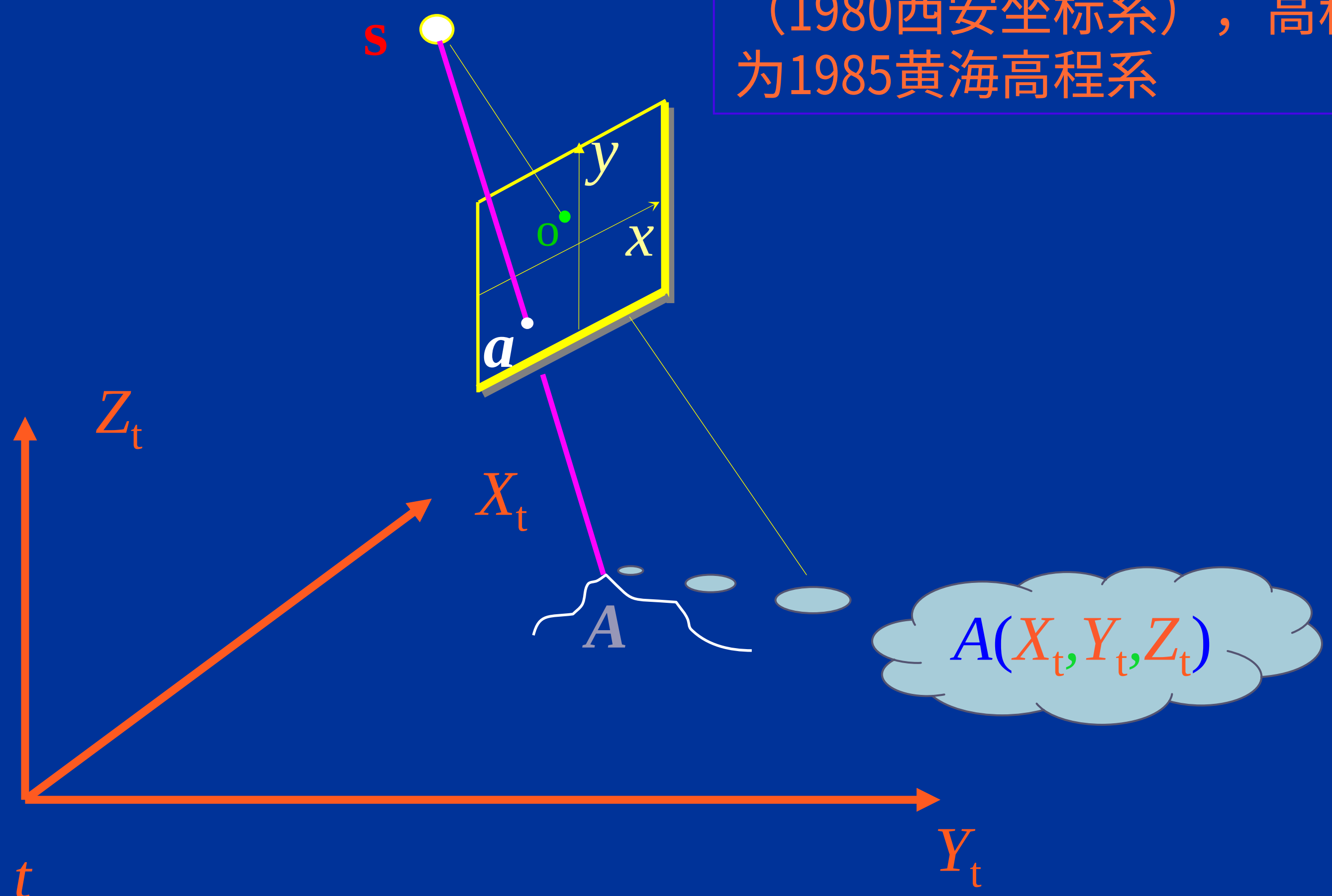


像空间直角坐标系

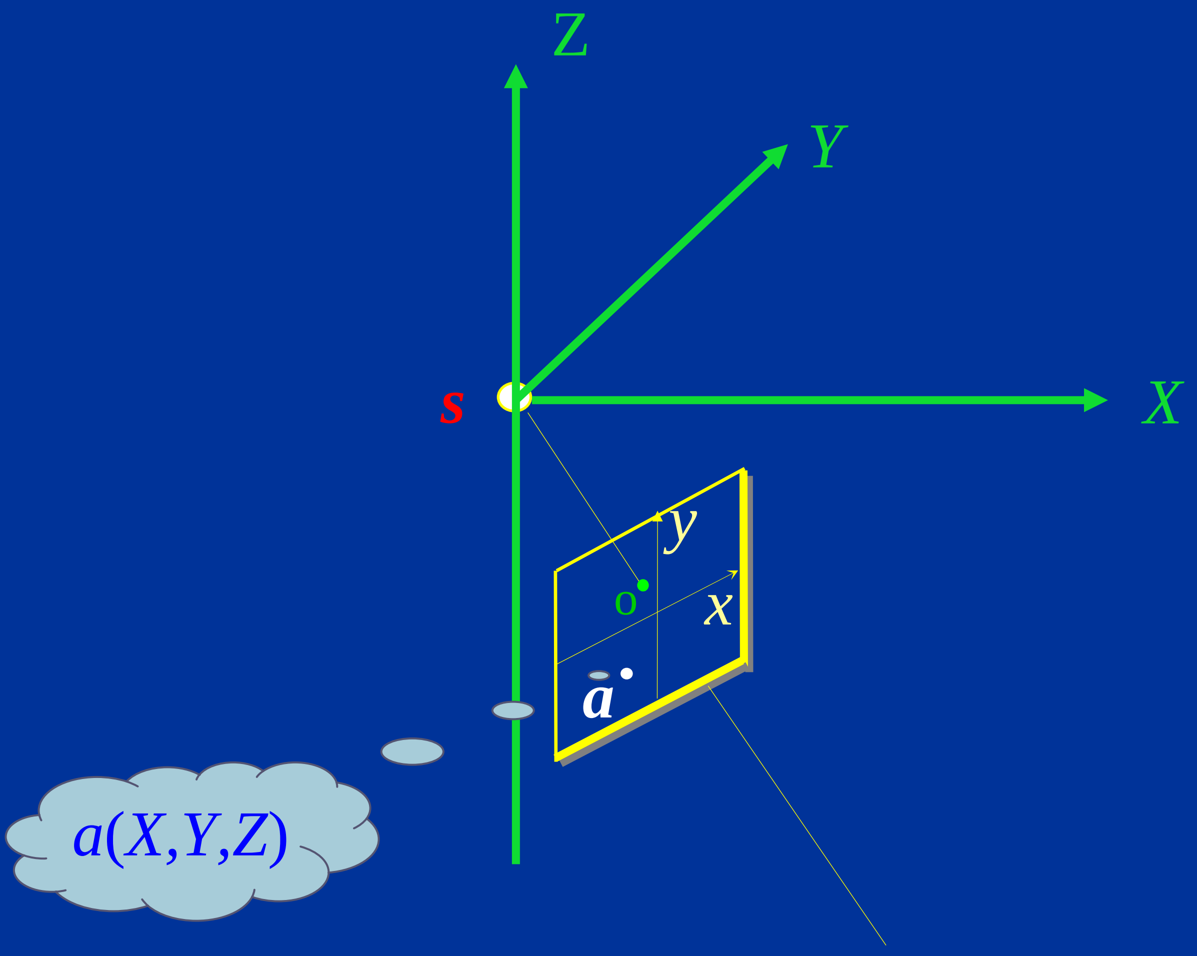


地面测量坐标系

地面测量坐标为国家统一坐标系，平面坐标为高斯-克吕格3度带或6度带投影（1980西安坐标系），高程为1985黄海高程系

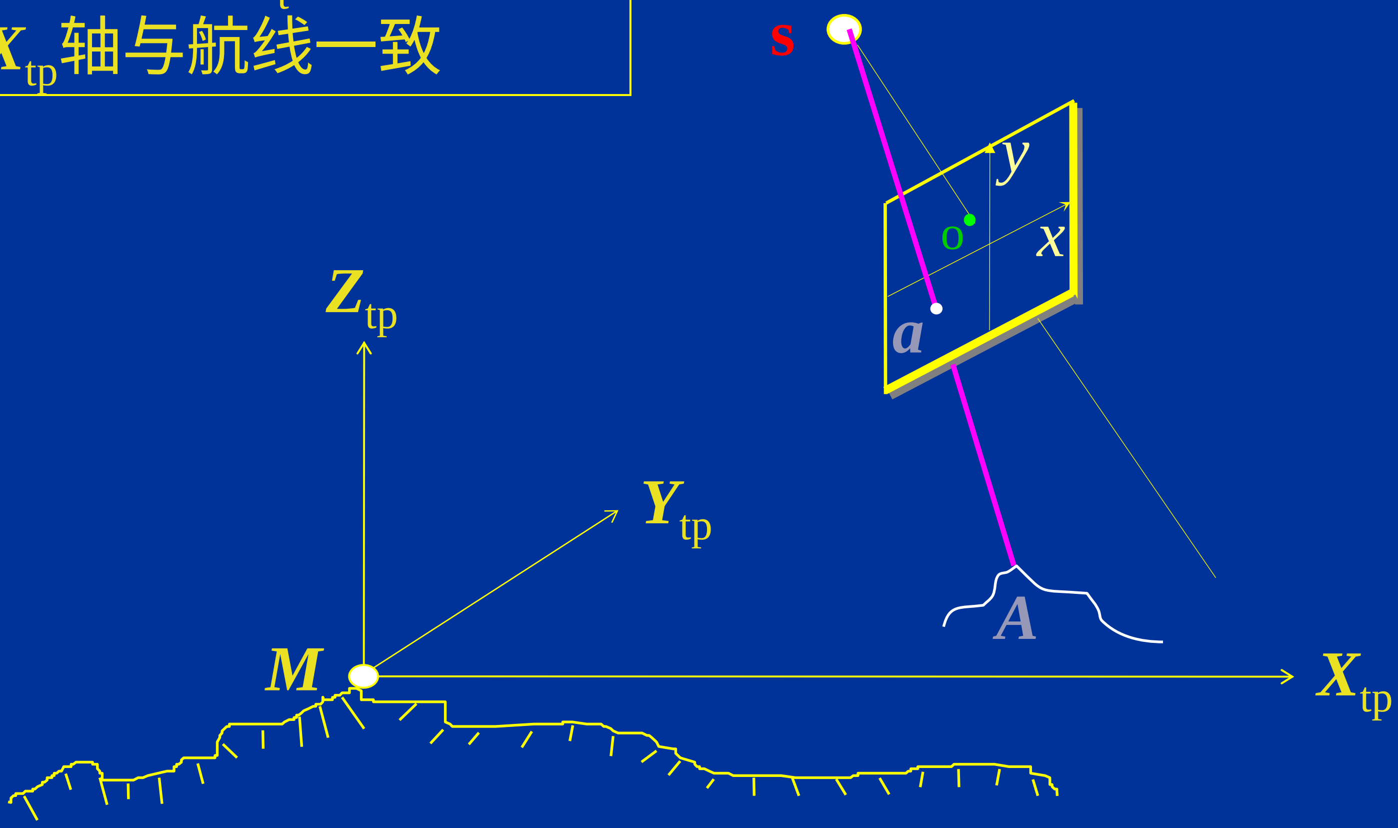


像空间辅助坐标系

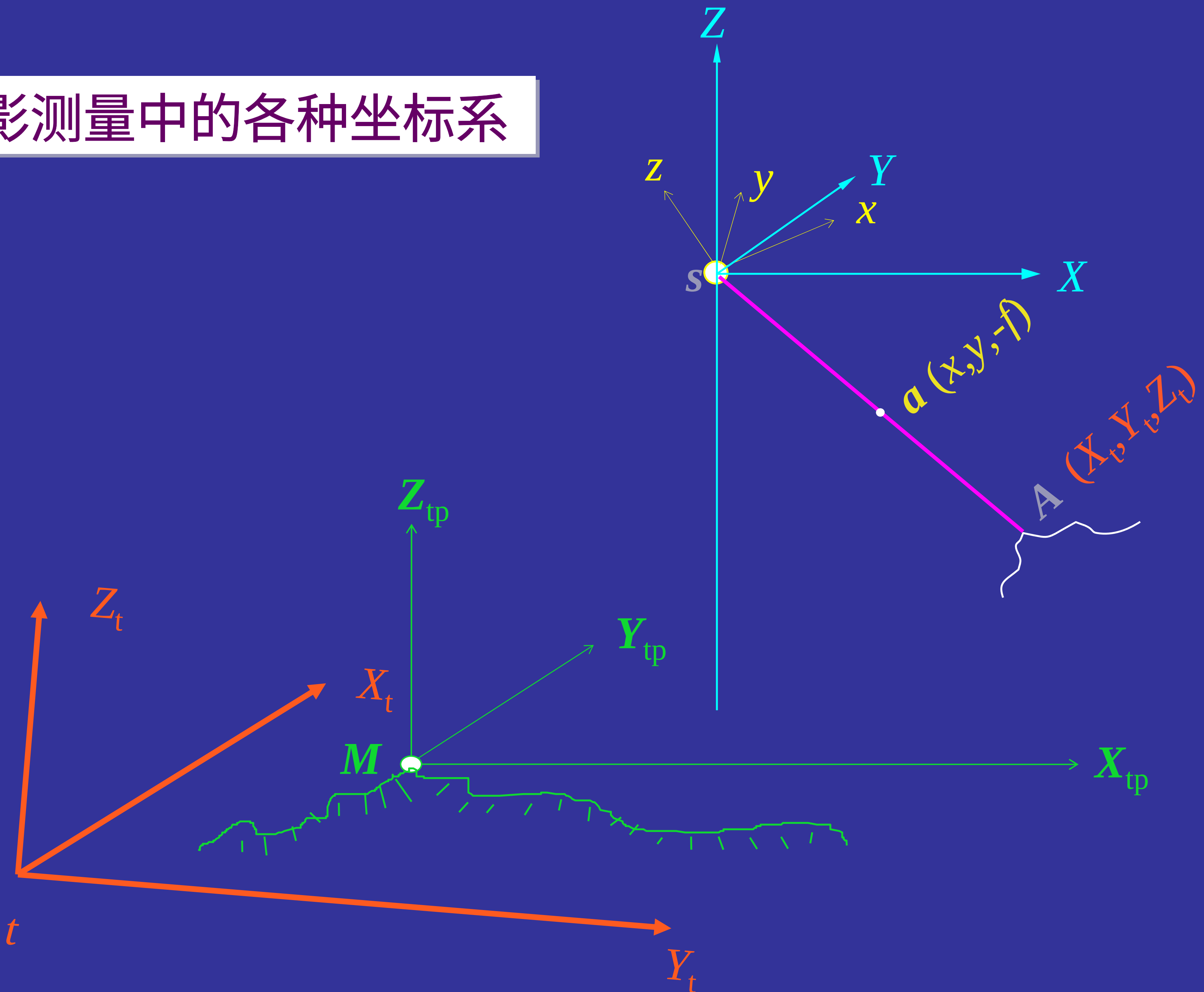


地面摄影测量坐标系

原点为地面某一控制点，Z_{tp}轴与地面测量坐标系的Z_t轴平行，X_{tp}轴与航线一致



摄影测量中的各种坐标系

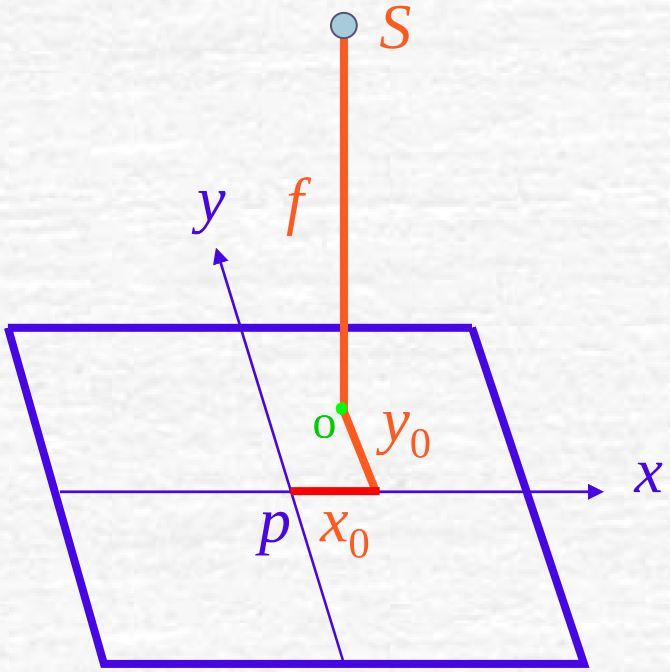


§3.2 航摄像片的方位元素

确定摄影时摄影中心、像片与地面三者之间相关位置关系的参数

确定摄影物镜后节点与像片之间相互位置关系的参数

像片内方位元素

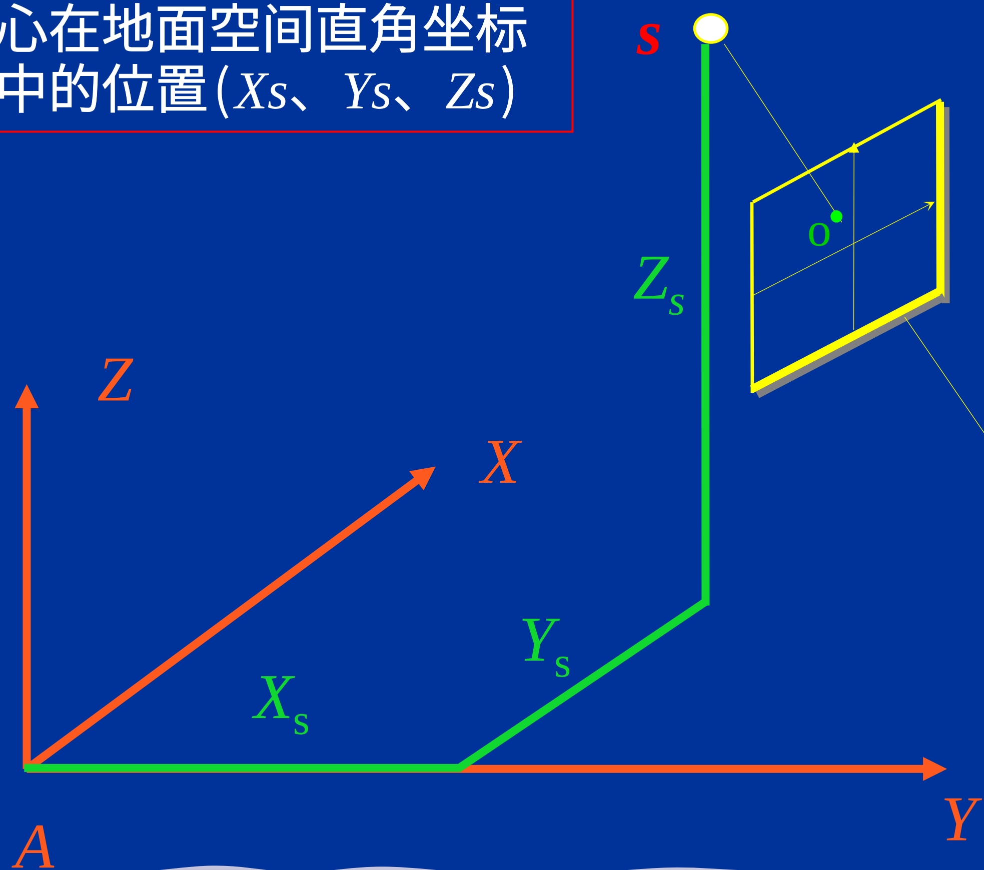


内方位元素（x_0,y_0,f）可恢复摄影光束

确定摄影瞬间像片在地面直角坐标系中空间位置和姿态的参数

像片外方位元素

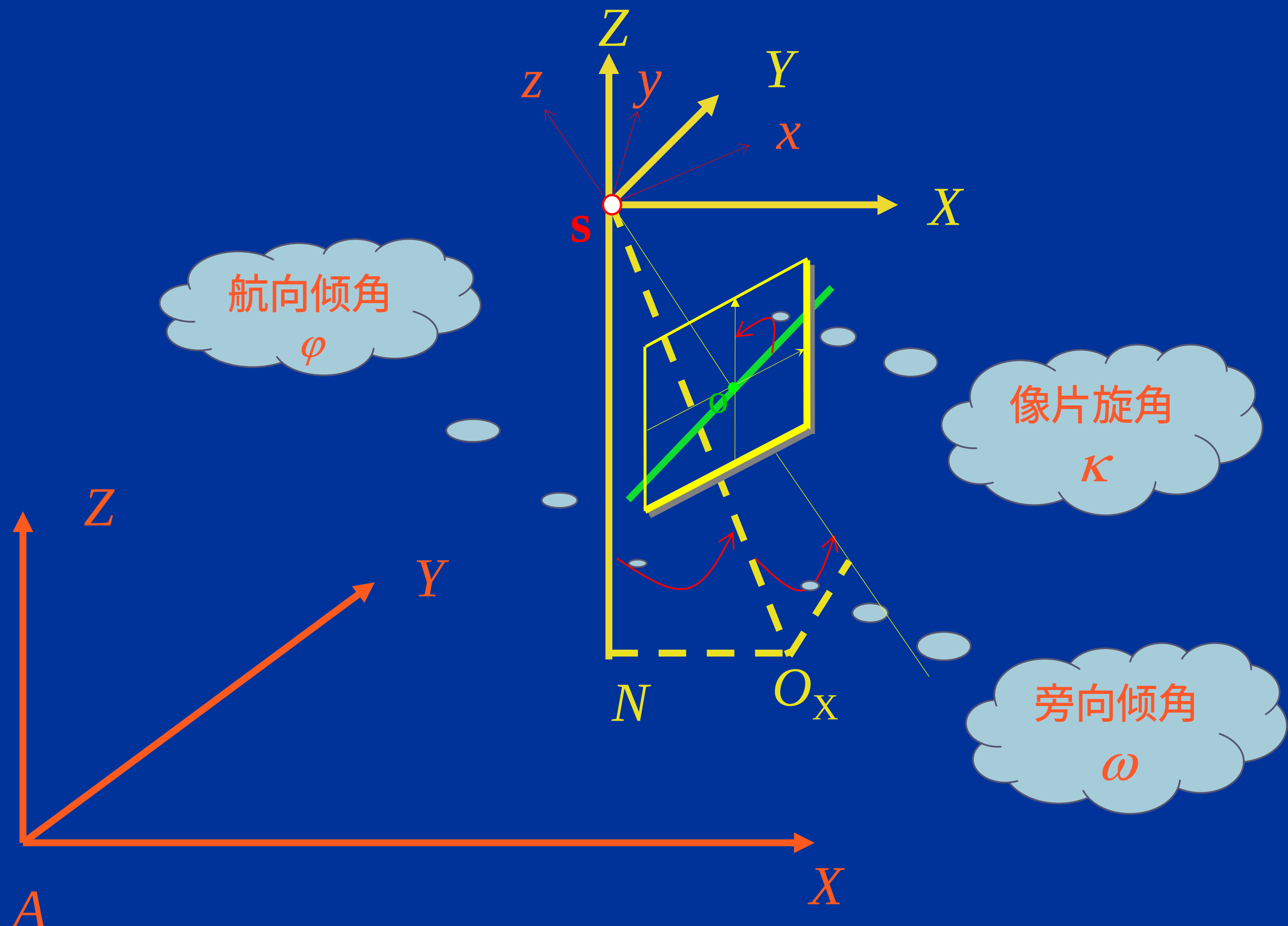
外方位线元素：描述摄影中心在地面空间直角坐标系中的位置（X_s、Y_s、Z_s）



外方位角元素：描述像片在摄影瞬间的空间姿态

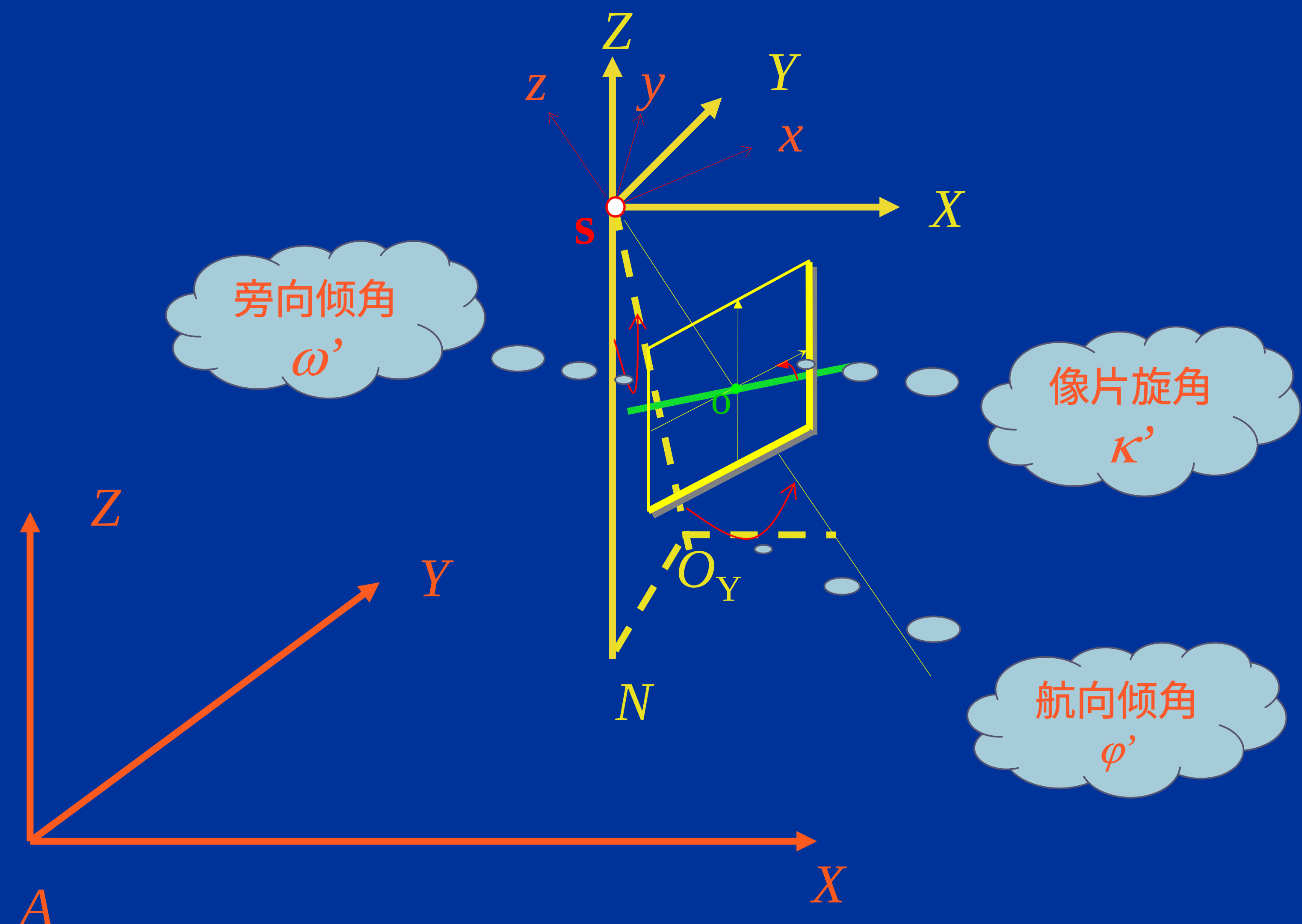
以 Y 轴为主轴的 φ-ω-κ 转角系统

像片外方位角元素



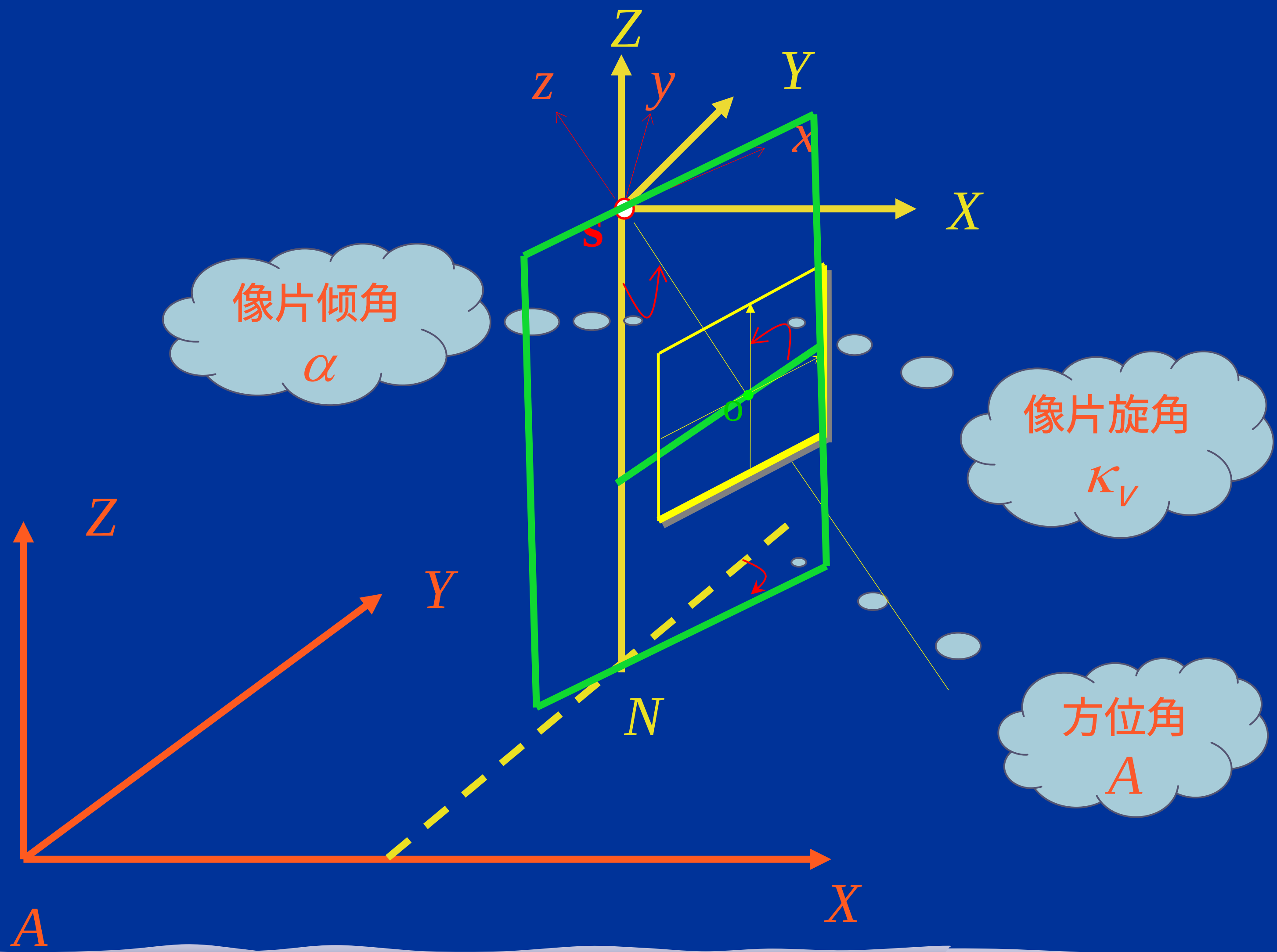
以X轴为主轴的ω'-φ'-κ'转角系统

像片外方位角元素



以 Z 轴为主轴的 A-α-κ_v 转角系统

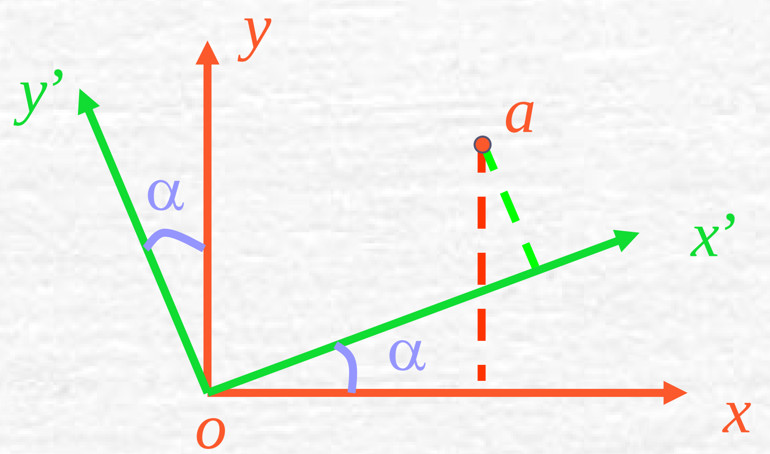
像片外方位角元素



§3.3 空间直角坐标变换

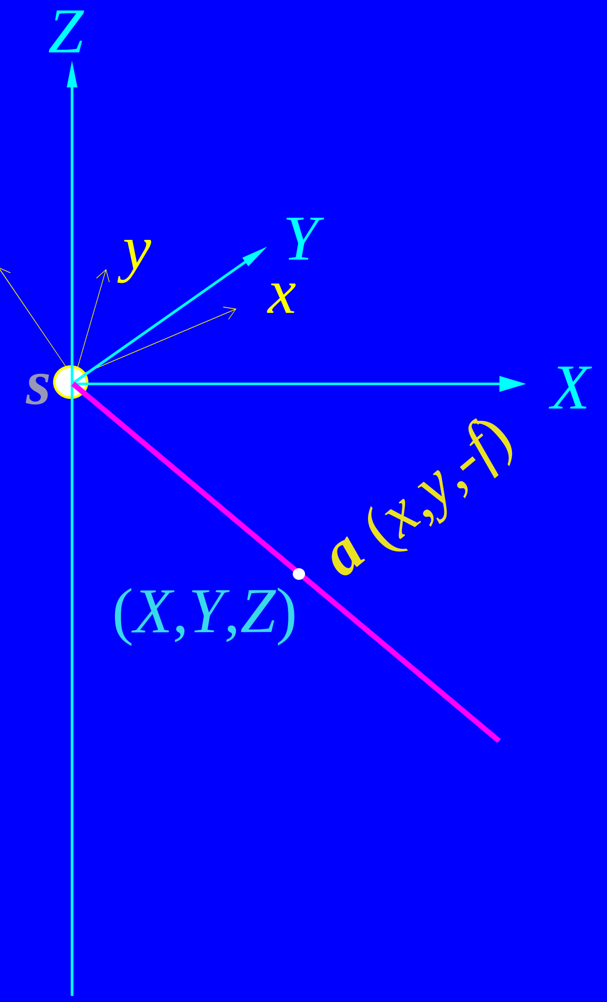
平面坐标变换

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$



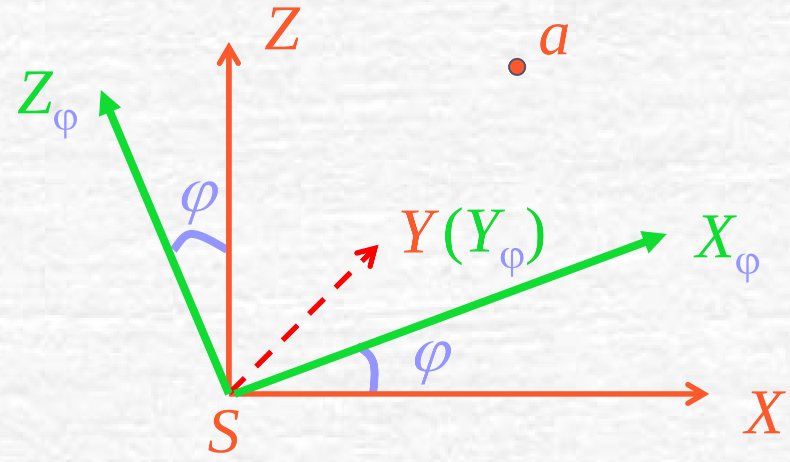
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

像空间坐标与像空间辅助坐标的变换



以 Y 轴为主轴的 φ-ω-κ 转角系统的坐标变换

S-XYZ 坐标系绕 Y 轴旋转 φ 角到 S-$X_\varphi YZ_\varphi$



$$X = X_\varphi \cos\varphi - Z_\varphi \sin\varphi$$

$$Y = Y_\varphi$$

$$Z = X_\varphi \sin\varphi + Z_\varphi \cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\varphi \begin{bmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{bmatrix}$$

以Y轴为主轴的φ-ω-κ转角系统的坐标变换

S-$X_\varphi YZ_\varphi$坐标系绕X_φ轴旋转ω角到S-$X_\varphi Y_\omega z$

$$\begin{bmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\varphi\omega} \\ Y_{\varphi\omega} \\ Z_{\varphi\omega} \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\omega \begin{bmatrix} X_{\varphi\omega} \\ Y_{\varphi\omega} \\ Z_{\varphi\omega} \end{bmatrix}$$

以Y轴为主轴的φ-ω-κ转角系统的坐标变换

S-$X_\varphi Y_\omega z$坐标系绕z轴旋转κ角到S-xyz

$$\begin{bmatrix} X_{\varphi\omega} \\ Y_{\varphi\omega} \\ Z_{\varphi\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\kappa \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

以Y轴为主轴的φ-ω-κ转角系统的坐标变换

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\varphi \boldsymbol{R}_\omega \boldsymbol{R}_\kappa \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{R}_\varphi \boldsymbol{R}_\omega \boldsymbol{R}_\kappa \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以Y轴为主轴的φ-ω-κ转角系统的坐标变换

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \cos\varphi\cos\kappa - \sin\varphi\sin\omega\sin\kappa \\
a_2 &= -\cos\varphi\sin\kappa - \sin\varphi\sin\omega\cos\kappa \\
a_3 &= -\sin\varphi\cos\omega \\
b_1 &= \cos\omega\sin\kappa \\
b_2 &= \cos\omega\cos\kappa \\
b_3 &= -\sin\omega \\
c_1 &= \sin\varphi\cos\kappa + \cos\varphi\sin\omega\sin\kappa \\
c_2 &= -\sin\varphi\sin\kappa + \cos\varphi\sin\omega\cos\kappa \\
c_3 &= \cos\varphi\cos\omega
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi &= -\mathrm{arctg}\left(\frac{a_3}{c_3}\right) \\
\omega &= -\arcsin(b_3) \\
\kappa &= -\mathrm{arctg}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)
\end{aligned}
$$

以X 轴为主轴的ω'-φ'-κ'转角系统的坐标变换

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_{\omega'}\boldsymbol{R}_{\varphi'}\boldsymbol{R}_{\kappa'}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{R}_{\omega'}\boldsymbol{R}_{\varphi'}\boldsymbol{R}_{\kappa'} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega' & -\sin\omega' \\ 0 & \sin\omega' & \cos\omega' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi' & 0 & -\sin\varphi' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi' & 0 & \cos\varphi' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\kappa' & -\sin\kappa' & 0 \\ \sin\kappa' & \cos\kappa' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

以X轴为主轴的ω'-φ'-κ'转角系统的坐标变换

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \cos\varphi'\cos\kappa' \\
a_2 &= -\cos\varphi'\sin\kappa' \\
a_3 &= -\sin\varphi' \\
b_1 &= \cos\omega'\sin\kappa' - \sin\omega'\sin\varphi'\cos\kappa' \\
b_2 &= \cos\omega'\cos\kappa' + \sin\omega'\sin\varphi'\sin\kappa' \\
b_3 &= -\sin\omega'\cos\varphi' \\
c_1 &= \sin\omega'\sin\kappa' + \cos\omega'\sin\varphi'\cos\kappa' \\
c_2 &= \sin\omega'\cos\kappa' - \cos\omega'\sin\varphi'\sin\kappa' \\
c_3 &= \cos\omega'\cos\varphi'
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\omega' &= -\mathrm{arctg}\left(\frac{b_3}{c_3}\right) \\
\varphi' &= -\arcsin(a_3) \\
\kappa' &= -\mathrm{arctg}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)
\end{aligned}
$$

以Z轴为主轴的A-α-κ_v系统的坐标变换

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_A \boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{R}_{\kappa_v} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{R}_A \boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{R}_{\kappa_v} \\
&= \begin{bmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\kappa_v & -\sin\kappa_v & 0 \\ \sin\kappa_v & \cos\kappa_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

以Z轴为主轴的A-α-κ_v系统的坐标变换

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \cos A\cos\kappa_v + \sin A\cos\alpha\sin\kappa_v \\
a_2 &= -\cos A\sin\kappa_v + \sin A\cos\alpha\cos\kappa_v \\
a_3 &= -\sin A\sin\alpha \\
b_1 &= -\sin A\cos\kappa_v + \cos A\cos\alpha\sin\kappa_v \\
b_2 &= \sin A\sin\kappa_v + \cos A\cos\alpha\cos\kappa_v \\
b_3 &= -\cos A\sin\alpha \\
c_1 &= \sin\alpha\sin\kappa_v \\
c_2 &= \sin\alpha\cos\kappa_v \\
c_3 &= \cos\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \operatorname{arctg}\left(\frac{a_3}{b_3}\right) \\
\alpha &= \arccos(c_3) \\
\kappa_v &= \operatorname{arctg}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)
\end{aligned}
$$

正交变换矩阵的特点

由高等数学知道，一个坐标系按三个角元素顺次地绕坐标轴旋转即可变换为一个同原点的坐标系，这种变换为**正交变换**

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

正交变换矩阵的特点

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$
$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0$$
$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$$
$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$
$$a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$$
$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0$$

旋转矩阵只有3个独立参数

正交变换矩阵的特点

旋转矩阵中的每一个元素等于其代数余子式

$$a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad a_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad a_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad b_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \quad c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

本讲参考资料

作业：

PP.39，第2题

教材

张剑清，潘励，王树根 编著，《摄影测量学》，武汉大学出版社

参考书

1、金为铣，杨先宏等编，《摄影测量学》，武汉测绘科技大学出版社

2、李德仁，周月琴编著，《摄影测量与遥感概论》，测绘出版社