

高阶贝塞尔-高斯脉冲光束相位奇点的演化*

丁超亮¹, 吕百达¹, 潘留占²

(1. 四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064; 2. 洛阳师范学院 物理系, 洛阳 471022)

摘 要: 推导出被光阑衍射高阶贝塞尔-高斯脉冲光束的场和光强分布的解析公式, 对其相位奇点的演化特性做了计算和分析。结果表明, 高阶贝塞尔-高斯脉冲光束经光阑衍射后, 中心光涡旋始终存在, 拓扑电荷守恒。随脉冲频率和脉冲宽度增加, 等相位线均沿逆时针方向旋转, 涡旋核随脉冲频率增加而减小, 而脉冲宽度对涡旋核大小几乎无影响。等相位线随截断参数和传输距离的增加分别沿逆时针和顺时针方向旋转, 涡旋核大小随截断参数增加而变化, 随传输距离和光束阶数的增加而增大。

关键词: 高阶贝塞尔-高斯脉冲光束; 奇点光学; 光涡旋; 相位奇点; 光阑衍射

中图分类号: O435 **文献标志码:** A

1987 年, Gori 等引入了贝塞尔-高斯光束^[1], 之后, 人们对其传输特性进行了广泛研究^[2-5]。2000 年, Porras 引入了几个光周期的贝塞尔-高斯脉冲光束^[6], 其空间参量与频率有关, 它携带有限能量, 在有限传输长度内保持无衍射特性。此外, 它也是一种典型的奇点光束^[7-8]。近年来, 奇点光学研究范畴已从单色光推广到多色光, 从稳态光束推广到超短光脉冲^[9-10]。本文对被光阑衍射高阶贝塞尔-高斯脉冲光束相位奇点的演化特性做了计算和分析, 推导出了被光阑衍射高阶贝塞尔-高斯脉冲光束的场和光强分布的解析公式。着重研究了入射脉冲频率、脉冲宽度、截断参数和光束阶数对贝塞尔-高斯脉冲光束相位奇点的影响。

1 理论模型

空间-时间域中贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z=0$ 面的场分布为^[6]

$$E(r, \varphi, 0, t) = f(t)J_n(\alpha r) \exp(-r^2/\omega_0^2) \exp(-in\varphi) \quad (1)$$

式中: (r, φ) 为 $z=0$ 面的横向极坐标; α 为空间参量; ω_0 为高斯光束束腰; $J_n(\cdot)$ 为 n 阶贝塞尔函数; $f(t)$ 是脉冲信号, 利用傅里叶变换得到空间-频率域中贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z=0$ 面的场分布

$$E(r, \varphi, 0, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(r, \varphi, 0, t) \exp(i\omega t) dt = f(\omega)J_n(\alpha r) \exp(-r^2/\omega_0^2) \exp(-in\varphi) \quad (2)$$

式中: $f(\omega)$ 为源光束的傅里叶谱分布

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (3)$$

设入射脉冲 $f(t)$ 为

$$f(t) = \exp\left[-\frac{(1+iC)t^2}{2\tau^2}\right] \exp(-i\omega_0 t) \quad (4)$$

式中: τ 为按脉冲强度的 $1/e$ 定义的脉冲宽度; C 为啁啾参数; ω_0 为载波频率。将式(4)代入式(3)得

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{(1-iC)\tau^2}{1+C^2}} \exp\left[-\frac{(1-iC)\tau^2}{2(1+C^2)}(\omega - \omega_0)^2\right] \quad (5)$$

在近轴近似下, 根据广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式可得被光阑衍射贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z>0$ 面的场分布^[11]

$$E(\rho, \theta, z, \omega) = \frac{i\omega}{2\pi c z} \exp[-i\omega z/c] \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} E(r, \varphi, 0, \omega) H(r) \times \exp\left\{-\frac{i\omega}{2c z} [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)]\right\} r dr d\varphi \quad (6)$$

* 收稿日期: 2008-09-03; 修订日期: 2009-01-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(10874125); 河南省高校新世纪优秀人才支持计划(2006 HANCET-09)

作者简介: 丁超亮(1982—), 男, 博士生, 主要从事超短脉冲的传输与变换研究; dingchaoliang2006@126.com。

通信作者: 吕百达(1943—), 男, 教授, 博导; baidalu0@tom.com。

式中: (ρ, θ) 为场点的横向极坐标; c 为真空中光速。设 $H(r)$ 为圆孔光阑的窗口函数

$$H(r) = \begin{cases} 1, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)展开为一组复高斯函数之和^[12]

$$H(r) = \sum_{m=1}^M A_m \exp\left[-\frac{B_m}{a^2} r^2\right] \quad (8)$$

A_m 和 B_m 分别为展开式的系数^[12]; M 为项数; a 为光阑半径。将式(2)和式(5)代入式(6), 并利用积分公式^[13]

$$\exp\left[in\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ix \cos(\theta - \varphi) - in\theta] d\theta \quad (9)$$

$$\int_0^{+\infty} x \exp[-\beta x^2] J_n(\alpha x) J_n(\gamma x) dx = \frac{1}{2\beta} \exp\left[-\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{4\beta}\right] I_n\left[\frac{\alpha\gamma}{2\beta}\right] \quad (10)$$

式中: I_n 为 n 阶修正贝塞尔函数, 经过冗长积分后得

$$E(\rho, \theta, z, \omega) = \sum_{m=1}^M iA_m \sqrt{\frac{(1-iC)\tau^2}{1+C^2}} \exp\left[-\frac{(1-iC)\tau^2}{2(1+C^2)}(\omega - \omega_0)^2\right] \times \\ \frac{z_0}{z} \frac{\omega}{\omega_0} \exp\left[-i\frac{2zz_0}{\omega_0^2} \frac{\omega}{\omega_0}\right] \exp\left[in\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] \exp\left[-\frac{i}{\omega_0^2} \frac{z_0}{z} \frac{\omega}{\omega_0} \rho^2\right] \times \\ \frac{1}{1 + i\frac{z_0}{z} \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{B_m}{\delta^2}} \exp\left[-\frac{\alpha^2 + \left(\frac{2}{\omega_0^2} \frac{z_0}{z} \frac{\omega}{\omega_0} \rho\right)^2}{\frac{4}{\omega_0^2} \left(1 + i\frac{z_0}{z} \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{B_m}{\delta^2}\right)}\right] I_n\left[\frac{\alpha \frac{z_0}{z} \frac{\omega}{\omega_0} \rho}{1 + i\frac{z_0}{z} \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{B_m}{\delta^2}}\right] \quad (11)$$

式中: 瑞利长度 $z_0 = \pi\omega_0^2/\lambda_0$; 截断参数 $\delta = a/\omega_0$ 。

场点处(频率为 ω) 的光强为

$$I(\rho, \theta, z, \omega) = |E(\rho, \theta, z, \omega)|^2 \quad (12)$$

式(11)和式(12)分别为被光阑衍射高阶贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z > 0$ 面的场和光强分布的解析式。它表明, 在 z 处的场和光强分布与入射脉冲频率 ω , 脉冲宽度 τ , 啁啾参数 C , 截断参数 δ , 光束参数 α 和阶数 n 等有关。

2 数值计算结果和分析

为分析入射脉冲参数和光阑截断参数对相位奇点演化特性的影响, 利用式(11)和式(12)做了数值计算, 典型例如图 1 所示。图 1 给出了一阶贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z=0$ 面, $\omega = \omega_0$ 处等相位图和对应等光强图, 计算参数为 $\alpha=12, n=1, C=1, \omega_0=1 \text{ mm}, \tau=3 \text{ fs}, \omega_0=2.36 \text{ fs}^{-1}, M=10$ 。由图 1 知, 中心处光强为 0。根据文献[14]可知, 中心处存在一拓扑电荷为 -1 的螺旋位错, 即光涡旋, 绕其逆时针旋转 1 周, 相位减小 2π 。在半径分别为 0.32, 0.58, 0.85 mm 的圆上, 强度为 0, 并且越过它有 π 的相位突变, 这即圆刃型位错。

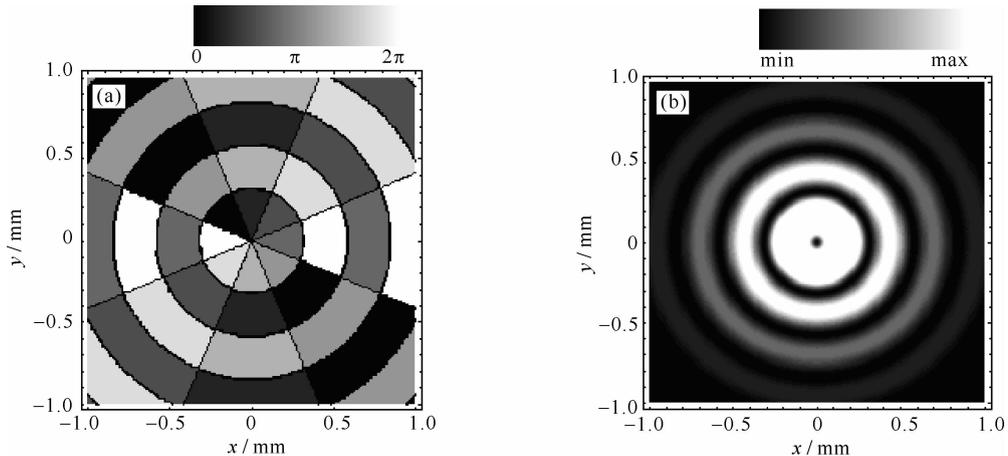


Fig. 1 Contours lines of the phase (a) and intensity (b) of a first-order Bessel-Gaussian pulsed beam at $z=0$ and $\omega=\omega_0$

图 1 一阶贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z=0$ 面上, $\omega=\omega_0$ 处等相位图(a)和等光强图(b)

不同频率一阶贝塞尔-高斯脉冲光束通过圆孔光阑后在 $z/z_0=4$ 面上等相位图和等光强图如图 2 所示, 计算参数为: δ 取 0.6; ω 分别取 $\omega_0, 1.04\omega_0, 1.1\omega_0$; 其它计算参数同图 1。由图 2 知, 入射脉冲频率对衍射场相位

分布有影响,随频率增加,等相位线逆时针旋转,且中心处涡旋核^[15]减小。与图 1 比较,圆刃型位错线消失,中心处有一稳定光涡旋。

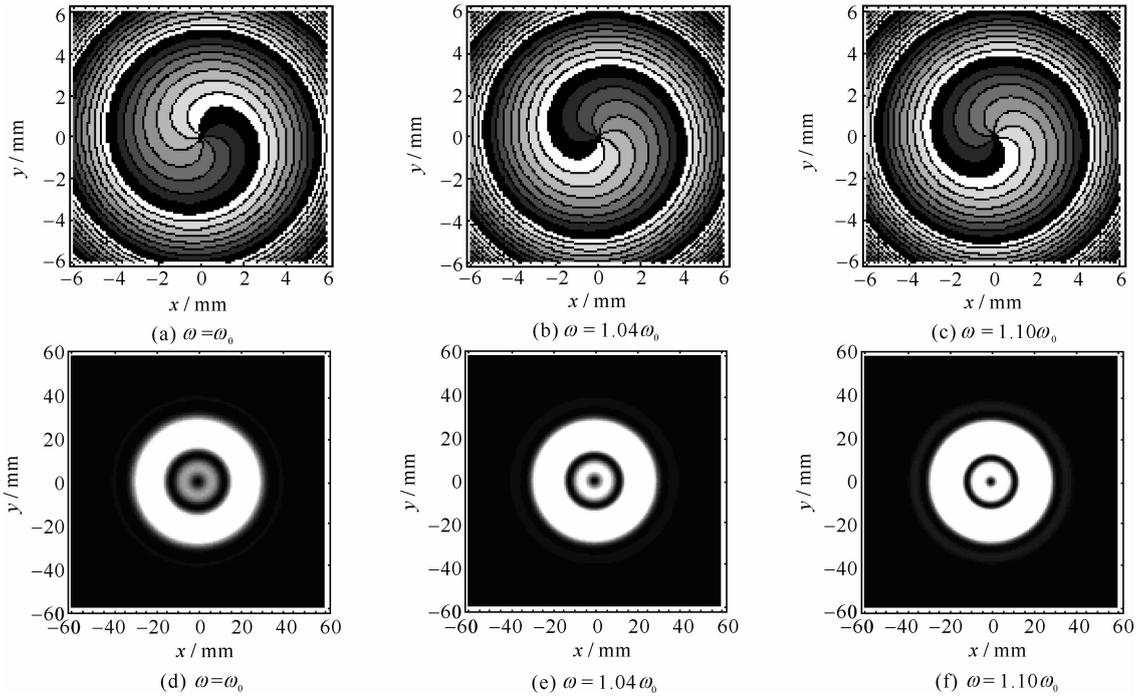


Fig. 2 Contours lines of the phases (a,b,c) and intensities (d,e,f) of the first-order Bessel-Gaussian pulsed beams with different frequencies at $z/z_0=4$

图 2 不同频率一阶贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z/z_0=4$ 面上(a,b,c)等相位图和(d,e,f)等光强图

不同脉宽一阶贝塞尔-高斯脉冲光束通过圆孔光阑后在 $z/z_0=4$ 面, $\omega=1.1\omega_0$ 处等相位图和等光强图如图 3 所示,计算参数为: δ 取 0.6; T 分别取 3 fs,9 fs,15 fs;其它计算参数同图 1 给出参数。由图 3 知,脉冲宽度 T 对相位分布有影响:增大 T ,等相位线逆时针旋转,但涡旋核大小几乎保持不变。

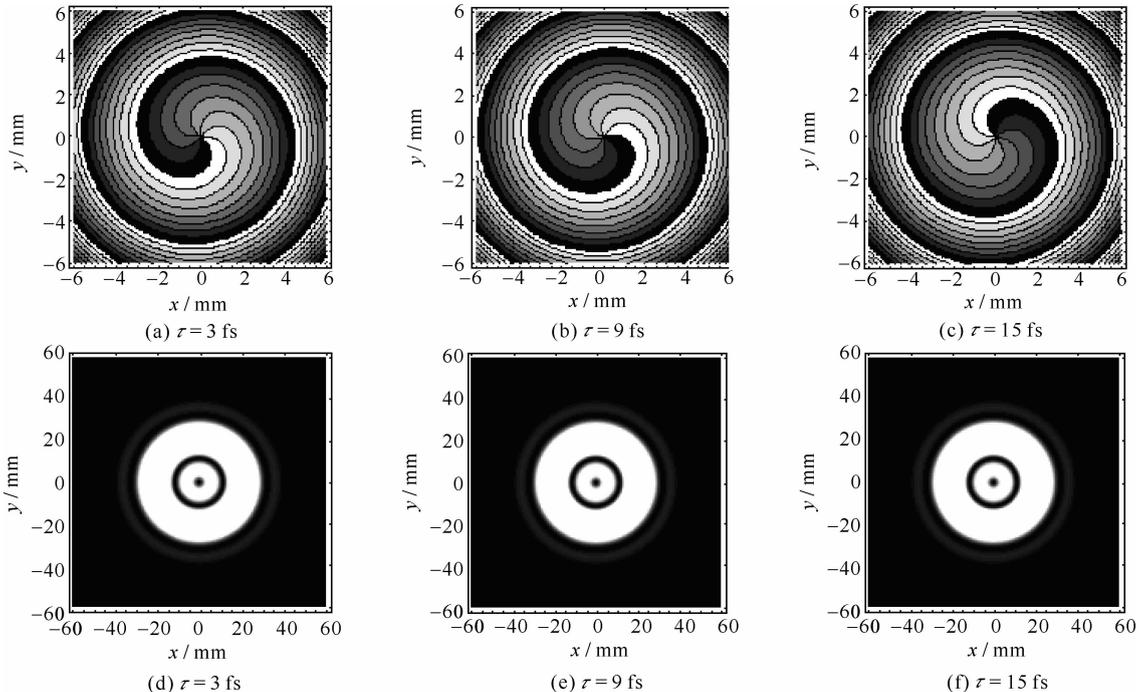


Fig. 3 Contours lines of the phases (a,b,c) and intensities (d,e,f) of the first-order Bessel-Gaussian pulsed beams with different pulse durations at $z/z_0=4$

图 3 不同脉宽一阶贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z/z_0=4$ 面上(a,b,c)等相位图和(d,e,f)等光强图

n 为 2 和 3 的高阶贝塞尔-高斯脉冲光束通过圆孔光阑后在 $z/z_0=4$ 面, $\omega=1.1\omega_0$ 处等相位图和等光强图

如图 4 所示,计算参数为: δ 取 0.6,其它计算参数同图 1。比较图 3(a),(d)和图 4 可知,涡旋核随 n 的增加而增大,中心处涡旋核拓扑电荷为 $-n$,绕其逆时针旋转 1 周相位改变 $2n\pi$ 。此外, $n=0$ 时,无奇点出现,即 0 阶贝塞尔-高斯脉冲光束衍射场无奇点。

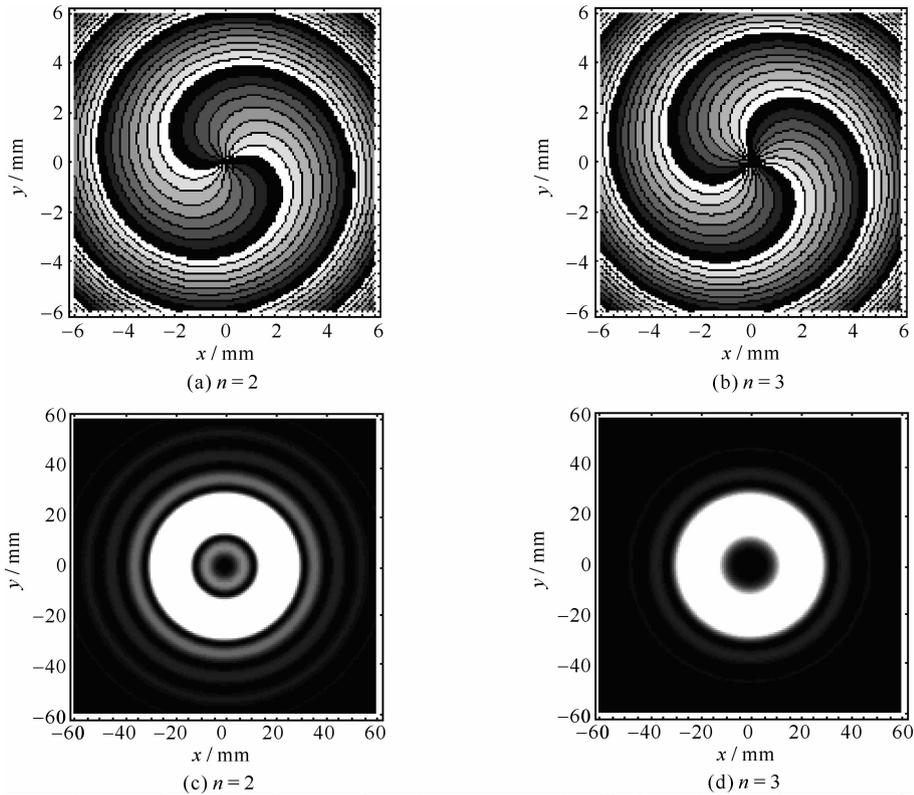


Fig. 4 Contours lines of the phases (a, b) and intensities (c, d) of higher-order Bessel-Gaussian pulsed beams with different beam orders at $z/z_0=4$

图 4 高阶贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z/z_0=4$ 面上(a, b)等相位图和(c, d)等光强图

不同截断参数一阶贝塞尔-高斯脉冲光束通过圆孔光阑后在 $z/z_0=4$ 面, $\omega=1.1\omega_0$ 处等相位图和等光强图

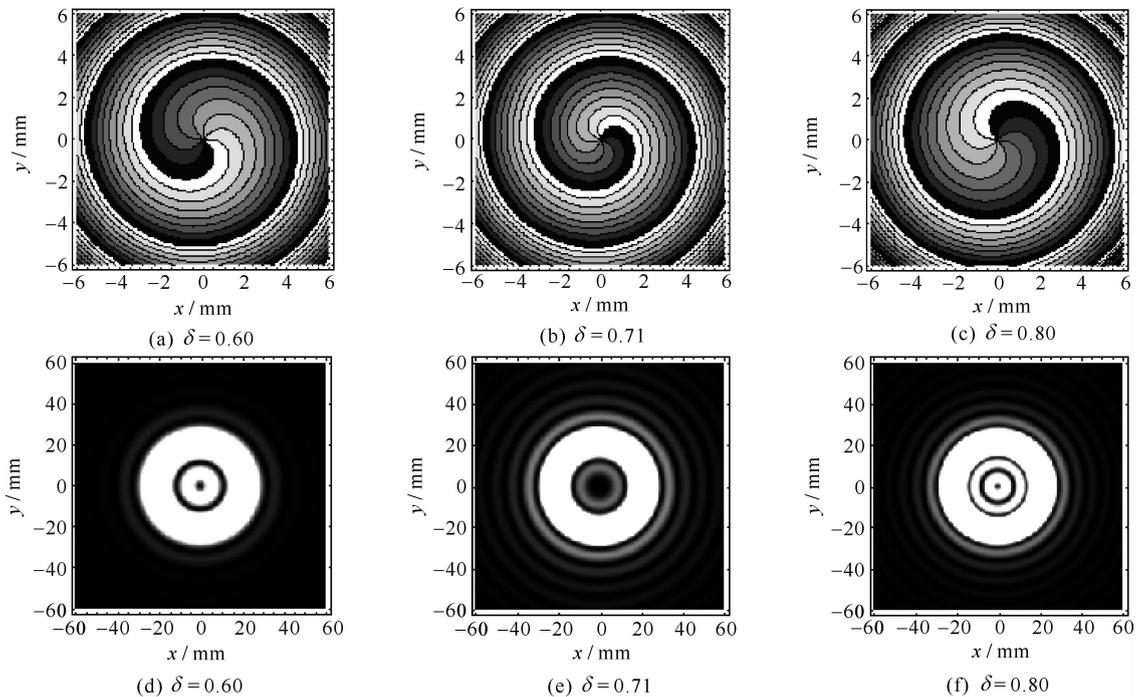


Fig. 5 Contours lines of the phases (a, b, c) and intensities (d, e, f) of a first-order Bessel-Gaussian pulsed beam at $z/z_0=4$ for different truncation parameters

图 5 不同截断参数一阶贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z/z_0=4$ 面上(a, b, c)等相位图和(d, e, f)等光强图

如图 5 所示,计算参数为: δ 分别取 0.60,0.71,0.80,其它计算参数同图 1。由图 5 知,随截断参数 δ 增加,等相位线逆时针旋转,且涡旋核大小改变。

不同传输距离处一阶贝塞尔-高斯脉冲光束横截面上 $\omega=1.1\omega_0$ 处等相位图和等光强图如图 6 所示,计算参数为: δ 取 0.6; z/z_0 分别取 4,6,8;其它计算参数同图 1。由图知,随传输距离 z/z_0 的增加,等相位线顺时针旋转,且涡旋核增大。

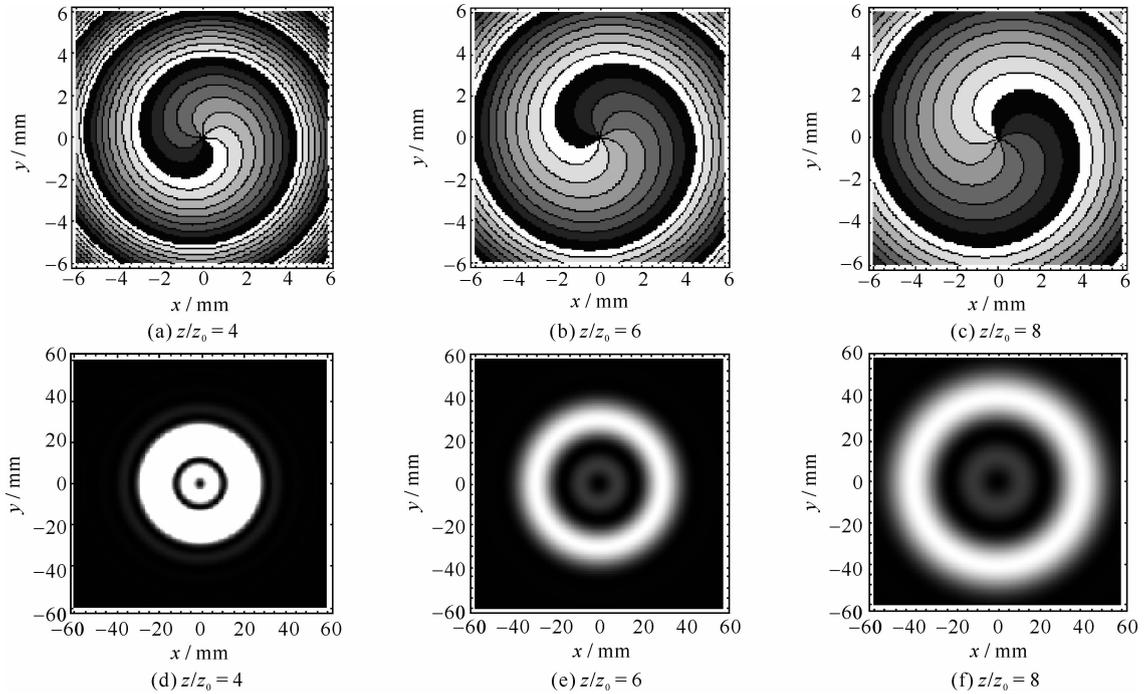


Fig. 6 Contours lines of the phases (a,b,c) and intensities (d,e,f) of a first-order Bessel-Gaussian pulsed beam at different propagation distances

图 6 不同传输距离处一阶贝塞尔-高斯脉冲光束(a,b,c)等相位图和(d,e,f)等光强图

3 结 论

本文对贝塞尔-高斯脉冲光束相位奇点的演化特性做了计算和分析,使用复高斯函数展开法,推导出被光阑衍射高阶贝塞尔-高斯脉冲光束在 $z>0$ 面的场和光强分布的解析公式,着重研究了入射脉冲频率 ω ,脉冲宽度 τ ,截断参数 δ ,光束阶数 n 和传输距离 z 对相位奇点的影响。结果表明:被光阑衍射的贝塞尔-高斯脉冲光束在传输过程中中心涡旋始终存在,拓扑电荷守恒。脉冲频率和脉冲宽度对衍射场相位分布影响明显,随脉冲频率和脉冲宽度增加,等相位线均沿逆时针方向旋转。脉冲频率对涡旋核大小影响显著,随脉冲频率增加涡旋核减小,而脉冲宽度对涡旋核大小影响很小。此外,衍射场等相位线随截断参数和传输距离的增加分别沿逆时针和顺时针方向旋转,涡旋核大小随截断参数的增加而发生变化,随传输距离和光束阶数的增加而增大。

参考文献:

- [1] Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams[J]. *Opt Commun*, 1987, **64**(6):491-495.
- [2] Overfelt P L, Kenney C S. Comparison of the propagation characteristics of Bessel, Bessel-Gauss, and Gaussian beams diffracted by a circular aperture[J]. *J Opt Soc Am A*, 1991, **8**(5):732-745.
- [3] Lü Xuanhui, Chen Xuming, Zhang Lei, et al. High-order Bessel-Gaussian beam and its propagation properties[J]. *Chin Phys Lett*, 2003, **20**(12):2155-2157.
- [4] Chen Baosuan, Chen Ziyang, Pu Jixiong. Propagation of partially coherent Bessel-Gaussian beams in turbulent atmosphere[J]. *Opt Laser Tech*, 2008, **40**:820-827.
- [5] Cai Yangjuan, Lü Xiang. Propagation of Bessel and Bessel-Gaussian beams through an unapertured or apertured misaligned paraxial optical systems[J]. *Opt Commun*, 2007, **274**(1):1-7.
- [6] Porras M A, Borghi R, Santarsiero M. Few-optical-cycle Bessel-Gauss pulsed beams in free space[J]. *Phys Rev E*, 2000, **62**:5729-5737.
- [7] Orlov S, Regelskis K, Smilgevičius V, et al. Propagation of Bessel beams carrying optical vortices[J]. *Opt Commun*, 2002, **209**(1-3):155-165.

- [8] Orlov S, Stabinis A. Free-space propagation of light field created by Bessel-Gauss and Laguerre-Gauss singular beams[J]. *Opt Commun*, 2003, **226**(1-6):97-105.
- [9] Gbur G, Visser T D, Wolf E. Anomalous behavior of spectra near phase singularities of focused waves[J]. *Phys Rev Lett*, 2002, **88**: **013901**.
- [10] Jana S, Konar S. Tunable spectral switching in the far field with a chirped cosh-Gaussian pulse[J]. *Opt Commun*, 2006, **267**(1):24-31.
- [11] Collins S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics[J]. *J Opt Soc Am*, 1970, **60**:1168-1177.
- [12] Wen J J, Breazeale M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beam[J]. *J Acoust Soc Am*, 1988, **83**(5): 1752-1756.
- [13] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of integrals, series, and products[M]. New York: Academic Press, 1980.
- [14] Freund I, Shvartsman N. Wave-field phase singularities: the sign principle[J]. *Phys Rev A*, 1994, **50**(6):5164-5172.
- [15] Palacios D M, Maleev I D, Marathay A S, et al. Spatial correlation singularity of a vortex field[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **92**:**143905**.

Evolution of phase singularities of higher-order Bessel-Gaussian pulsed beams

Ding Chaoliang¹, Lü Baida¹, Pan Liuzhan²

(1. *Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*;

2. *Department of Physics, Luoyang Normal College, Luoyang 471022, China*)

Abstract: The analytical expressions of the field and intensity distributions of higher-order Bessel-Gaussian pulsed beams diffracted by an aperture have been derived, which enables us to study the evolution of the phase singularities of the diffracted higher-order Bessel-Gaussian pulsed beams. It is shown that there always exists an optical vortex at the center of the beams and the topological charge is conserved. The phase contours rotate anti clockwise about the z -axis with the increasing pulse frequency and duration. The size of the vortex core decreases with the increasing pulse frequency, but is almost unaffected by pulse duration. The phase contours rotate anti clockwise and clockwise about the z -axis with the increasing truncation parameter and propagation distance respectively. The size of the vortex core varies with the increasing truncation parameter, and increases with the increasing propagation distance and beam order.

Key words: higher-order Bessel-Gaussian pulsed beam; singular optics; optical vortex; phase singularity; aperture diffraction