文章编号: 1001-4322(2008)04-0573-06

束流位置监测器测量束流四极分量的新方法

李 鹏, 孙葆根, 罗 箐, 王晓辉, 卢 平, 徐宏亮, 方 佳

(中国科学技术大学 国家同步辐射实验室,合肥 230029)

摘 要: 束流位置监测器可以用来进行发射度的非拦截测量,且不受束流分布的影响。对从条带 BPM 电极中引出的信号经过对数比检波模块处理,得出了一种对数比处理方法来提取束流的四极分量,并推导出一 种同时利用差比和处理方法和对数比处理方法的混合提取方法来提取四极分量。对这些方法进行了数值模拟 计算和比较,结果表明:混合提取方法效果最佳,对数比处理方法优于差比和处理方法。利用提取出的四极分 量,通过多次改变四极铁的电流计算出束流的发射度。

关键词: 束流位置监测器; 发射度; 四极分量; 差比和; 对数比; 混合提取; 非拦截测量 中图分类号: TL506 **文献标识码:** A

1983 年 R. Miller 等人首次提出用束流位置监测器(BPM)进行发射度的非拦截测量^[1],此后被多个实验 室研究并应用。一般来说,从电子枪发射出的电子束流分布是未知的,而且不宜简单地假设为高斯分布。1993 年 J. Russell 等人发现利用 BPM 进行发射度的测量完全不受束流分布的影响^[2],这使得 BPM 成为测量发射 度的理想工具。近年来,对于 BPM 条带电极上的感应信号,国外大多数研究人员采取差比和的数据处理方法 来提取束流的四极分量^[2-5],国内对此也有理论研究^[6],但是具体开展实际在线测量还刚刚起步。在合肥光源, 我们采取了对数比的处理方法,而且进一步把这两种方法结合在一起,得出了一种提取四极分量的混合处理方 法。

1 条带 BPM 电极感应信号

条带 BPM 的 4 个电极分别位于上下左右的位置,如图 1 所示。 其中,条带电极的张角为 β,到 BPM 中心的距离为 b(四个电极完全 一致),BPM 的真空室半径为 a。

考虑一个在极坐标位置(*r*,*φ*)处的无限长的线电流 *I*(*r*,*φ*)在真 空壁上任意点(*a*,*θ*)处与其镜像电流共同作用产生的电流密度为

$$j(a,\theta,r,\varphi) = \frac{I(r,\varphi)}{2\pi a} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi)} = \frac{I(r,\varphi)}{2\pi a} \{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (r/a)^n \cos[n(\theta - \varphi)]\}$$
(1)

对于一个高斯分布的束流 $I_b(r,\varphi)$,束流的质心位置为 (x_0,y_0) , 束流的尺寸为 (σ_x,σ_y) ,则 $x_0 = r\cos\varphi$, $y_0 = r\sin\varphi$,而且 $\sigma_x,\sigma_y \leq a$ 。对 整个束流按高斯分布进行积分,则可以得到任意点的电流密度函数



Fig. 1 Stripline BPM electrode positions 图 1 条带 BPM 结构示意图

$$j(a,\theta) = \iint j(a,\theta,r,\varphi) \, dr d\varphi = \frac{I_{\rm b}}{2\pi a} \{1 + 2\left[\frac{x_0}{a}\cos\theta + \frac{y_0}{a}\sin\theta\right] + 2\left[\left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{a^2} + \frac{x_0^2 - y_0^2}{a^2}\right)\cos2\theta + 2\left(\frac{x_0y_0}{a^2}\sin2\theta\right] + 2\left[\frac{3\sigma_x^2 - 3\sigma_y^2 + x_0^2 - 3y_0^2}{a^2}\frac{x_0}{a}\cos3\theta + \frac{3\sigma_x^2 - 3\sigma_y^2 + 3x_0^2 - y_0^2}{a^2}\frac{y_0}{a}\sin3\theta\right] + 2\left[\frac{3(x_0^2 - y_0^2 + \sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 - 2x_0^4 - 2y_0^4}{a^4}\cos4\theta + \frac{4x_0y_0(x_0^2 - y_0^2 + 3\sigma_x^2 - 3\sigma_y^2)}{a^4}\sin4\theta\right] + \text{higher order terms}\}$$
(2)

* 收稿日期:2007-11-16; 修订日期:2008-03-10

基金项目:国家自然科学基金资助课题(10675118);国家 985 项目(173123200402002)

作者简介:李 鹏(1983-),男,硕士,主要从事束流发射度的测量研究; manlouh@mail.ustc.edu.cn。

联系作者:孙葆根(1961一),男,研究员,从事束流诊断与测量研究; bgsun@ustc.edu.cn。

对于图 1 所示的 BPM 结构的 4 个条带电极,通常 *b*≈*a*。根据式(2),对每个电极的张角进行积分,由于 4 个电极的中心角 Φ 分别为 0°,90°,180°,270°,可以分别得到每个电极上的感应信号,如表 1 所示。

表 1	条带电极上的感应信号	(उत्तं	I., / 2 <i>b</i> f	19-	11)
	****	(^) .	$r_{\rm D}/20\mu$	24	ru /

Table 1 Signals from stripeline electrodes (normalized to $I_b/2b\beta$)

	$\operatorname{right}(\Phi=0^{\circ})$	$left(\Phi=180^{\circ})$	$top(\Phi=90^\circ)$	$bottom(\Phi=270^{\circ})$
monopole $(n=0)$	1	1	1	1
dipole $(n=1)$	Z_{1x}	$-Z_{1x}$	Z_{1y}	$-Z_{1y}$
quadrupole $(n=2)$	Z_2	Z_2	$-Z_2$	$-Z_2$
sextupole $(n=3)$	Z_{3x}	$-Z_{3x}$	$-Z_{3y}$	Z_{3y}
octupole $(n=4)$	Z_4	Z_4	Z_4	Z_4

表1中Z_{1x},Z_{1y},Z₂,Z_{3x},Z_{3y},Z₄是为了简化表达形式所引入的符号,其表达式如下

$$\begin{cases} Z_{1x} = 2 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \frac{x_0}{b} \\ Z_{1y} = 2 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \frac{y_0}{b} \\ Z_2 = 2 \frac{\sin\beta}{\beta} \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + x_0^2 - y_0^2}{b^2} \\ Z_{3x} = 2 \frac{\sin(3\beta/2)}{3\beta/2} \frac{3\sigma_x^2 - 3\sigma_y^2 + x_0^2 - 3y_0^2}{b^2} \frac{x_0}{b} \\ Z_{3y} = 2 \frac{\sin(3\beta/2)}{3\beta/2} \frac{3\sigma_x^2 - 3\sigma_y^2 + 3x_0^2 - y_0^2}{b^2} \frac{y_0}{b} \\ Z_4 = \frac{\sin(2\beta)}{\beta} \frac{3(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + x_0^2 - y_0^2)^2 - 2(x_0^4 + y_0^4)}{b^4} \end{cases}$$
(3)

实际上,并不严格要求束流为高斯分布。J. Russell 等人已经证明用 BPM 来测量发射度与束流的分布无关^[2]。

2 提取四极分量的方法

根据表 1 可得到 BPM 每个电极上的感应信号,再进行数据处理,就可以提取出束流的四极分量 $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ 。 2.1 差比和处理方法

差比和处理方法是目前国外研究人员常用的方法^[2-5]。 根据表1得出各个电极上的信号幅度为

$$\begin{cases} R = 1 + Z_{1x} + Z_2 + Z_{3x} + Z_4 + \cdots \\ L = 1 - Z_{1x} + Z_2 - Z_{3x} + Z_4 + \cdots \\ T = 1 + Z_{1y} - Z_2 - Z_{3y} + Z_4 + \cdots \\ B = 1 - Z_{1y} - Z_2 + Z_{3y} + Z_4 + \cdots \end{cases}$$

$$(4)$$

根据公式(3)和(4),可以得到

$$Q_{\Delta/\Sigma} = \frac{R+L-T-B}{R+L+T+B} = Z_2 + o(\frac{1}{b^6}) = 2\frac{\sin\beta}{\beta}(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{x_0^2 - y_0^2}{b^2}) + O(\frac{1}{b^6})$$
(5)

其中,O表示同阶无穷小,式(5)表示省略6次项及更高次项。

从公式(5)中可以看出,如果想得到四极分量 $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$,必须计算出 $x_0^2 - y_0^2$ 的值,忽略 3 次及高阶项,可知

$$\begin{cases} \frac{R-L}{R+L} \approx Z_{1x} = 4 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta} \frac{x_0}{b} \\ \frac{T-B}{T+B} \approx Z_{1y} = 4 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta} \frac{y_0}{b} \end{cases}$$
(6)

于是,从公式(6)中可以计算出 x_0 , y_0 的值,代入到公式(5)中便可以提取出 $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ 。

由此可以得到,差比和方法提取四极分量的灵敏度为

$$S_{\Delta/\Sigma} = 2 \, \frac{\sin\beta}{\beta} \, \frac{1}{b^2} \tag{7}$$

2.2 对数比处理方法

在合肥光源,条带 BPM 信号^[7]经过对数检波器和信号采集系统后传送到 PC 机上的信号变为 20lgR, 20lgL, 20lgT 和 20lgB^[8]。根据

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \qquad (-1 < x \le 1)$$
(8)

结合式(3)和(4),可以得到

$$\begin{cases} 20 \lg R = \frac{20}{\ln 10} \ln(\frac{I_{b}}{2\pi b\beta}) + \frac{20}{\ln 10} \{Z_{1x} + Z_{2} + Z_{3x} - \frac{1}{2}Z_{1x}^{2} - Z_{1x}Z_{2} + \frac{1}{3}Z_{1x}^{3} + O(\frac{1}{b^{4}})\} \\ 20 \lg L = \frac{20}{\ln 10} \ln(\frac{I_{b}}{2\pi b\beta}) + \frac{20}{\ln 10} \{-Z_{1x} + Z_{2} - Z_{3x} - \frac{1}{2}Z_{1x}^{2} + Z_{1x}Z_{2} - \frac{1}{3}Z_{1x}^{3} + O(\frac{1}{b^{4}})\} \\ 20 \lg T = \frac{20}{\ln 10} \ln(\frac{I_{b}}{2\pi b\beta}) + \frac{20}{\ln 10} \{Z_{1y} - Z_{2} + Z_{3y} - \frac{1}{2}Z_{1y}^{2} + Z_{1y}Z_{2} + \frac{1}{3}Z_{1y}^{3} + O(\frac{1}{b^{4}})\} \\ 20 \lg B = \frac{20}{\ln 10} \ln(\frac{I_{b}}{2\pi b\beta}) + \frac{20}{\ln 10} \{-Z_{1y} - Z_{2} + Z_{3y} - \frac{1}{2}Z_{1y}^{2} - Z_{1y}Z_{2} - \frac{1}{3}Z_{1y}^{3} + O(\frac{1}{b^{4}})\} \end{cases}$$

$$(9)$$

这样

$$Q_{\text{log-ratio}} = 20 \log \frac{RL}{TB} = \frac{80}{\ln 10} \left(Z_2 - \frac{Z_{1x}^2 - Z_{1y}^2}{4} \right) + O(\frac{1}{b^4}) = \frac{160}{\ln 10} \frac{\sin\beta}{\beta} \left\{ \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \left[1 - \frac{\tan(\beta/2)}{\beta} \right] \frac{x_0^2 - y_0^2}{b^2} \right\} + O(\frac{1}{b^4})$$
(10)

同理,略去3次及高阶项,计算出束流的质心位置

$$\begin{cases} 20 \lg \frac{R}{L} \approx \frac{40}{\ln 10} Z_{1x} = \frac{160}{\ln 10} \frac{\sin(\beta/2)}{\beta} \frac{x_0}{b} \\ 20 \lg \frac{T}{B} \approx \frac{40}{\ln 10} Z_{1y} = \frac{160}{\ln 10} \frac{\sin(\beta/2)}{\beta} \frac{y_0}{b} \end{cases}$$
(11)

将式(11)代入式(10)中,就可以提取出四极分量 $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ 。由于式(10)中系数 1 - tan($\beta/2$)/ β 小于 0.5,所以对 数比方法中 $x_0^2 - y_0^2$ 对四极分量 $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ 的影响小于差比和方法。

同样,对数比方法提取四极分量的灵敏度为

$$S_{\text{log-ratio}} = \frac{160}{\ln 10} \, \frac{\sin\beta}{\beta} \frac{1}{b^2} \tag{12}$$

可见,对数比方法的灵敏度高于差比和处理方法。

2.3 混合提取四极分量的方法

在差比和处理方法和对数比处理方法中,从式(5)和(10)中可以看出,为了提取四极分量,需要计算出关于 束流质心位置的一个复合值 x²₀ - y²₀。以上两种方法选择了分别求解出水平和垂直方向的束流质心位置,事实 上,可以把它作为一个量来求出,而不必分别求出每一部分,由于这种方法要同时利用上面两种方法,因此称之 为混合提取方法。

联立式(5)和(10),可以解得

$$\sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \frac{\beta}{\tan(\beta/2)} \frac{Q_{\text{log-ratio}}}{S_{\text{log-ratio}}} + \left[1 - \frac{\beta}{\tan(\beta/2)}\right] \frac{Q_{\Delta/\Sigma}}{S_{\Delta/\Sigma}}$$
(13)

其中,系数 $S_{\Delta/\Sigma} = 2(\sin\beta/\beta b^2)$, $S_{\text{log-ratio}} = (160/\ln 10)(\sin\beta/\beta b^2)$ 。

理论上,这种混合提取的方法有更好的精确度。

2.4 3种方法的数值分析比较

为了进行3种方法的优缺点比较,对这3种方法进行了数值计算分析。应用 Matlab 程序计算了3种方法 的非线性响应和束流质心位置的变化对四极分量提取的影响。在数值计算时,为了考虑高次项的影响,计算中 考虑了7次项的影响。

图 2 给出了 3 种方法的非线性响应。横坐标为四极分量与电极半径的比率($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$)/ b^2 ,纵坐标是 3 种方法提取的结果。在仿真中设定 $\sigma_y = 0$,通过改变 σ_x 的值来观察 3 种方法的效果。很显然,混合提取方法具有最好的非线性响应,对数比方法非线性响应次之,而差比和方法非线性响应最差。





图 3 显示了束流质心位置的变化对四极分量提取的 影响。在仿真中设定一定的束流尺寸,观测束流质心在 不同的位置时 3 种方法的不同效果。图中横坐标表示不 同的质心位置,纵坐标 κ 表示 3 种不同方法提取的四极 分量的结果与设定的四极分量的值的比率。显而易见, 混合提取方法效果最佳,对数比方法效果次之,而差比和 方法效果最差。

以上数值计算分析结果与理论公式推导的结果是一 致的。

3 发射度的测量

从以上 3 种方法中我们已经提取出了四极分量,这 样就可以用 Miller 等人提出的方法来测量束流的发射

度^[1]。假设束流从前面一点 f 点传输到 BPM 位置处 b 点的传输矩阵为 M_{fb} , f 点和 b 点的束流矩阵分别为 Σ_{f} , Σ_{b} 则根据束流矩阵的性质有

$$\boldsymbol{\Sigma}_{b} = \boldsymbol{M}_{fb} \boldsymbol{\Sigma}_{f} (\boldsymbol{M}_{fb})^{\mathrm{T}}$$
(14)
$$\boldsymbol{\Xi}_{b} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} & R_{34} \\ 0 & 0 & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{f} = \begin{bmatrix} \sigma_{11f} & \sigma_{12f} & 0 & 0 \\ \sigma_{21f} & \sigma_{22f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33f} & \sigma_{34f} \\ 0 & 0 & \sigma_{43f} & \sigma_{44f} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{b} = \begin{bmatrix} \sigma_{11b} & \sigma_{12b} & 0 & 0 \\ \sigma_{21b} & \sigma_{22b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33b} & \sigma_{34b} \\ 0 & 0 & \sigma_{43b} & \sigma_{44b} \end{bmatrix}.$$

展开可得

$$Q_{b} = \langle \sigma_{x}^{2} - \sigma_{y}^{2} \rangle_{b} = \sigma_{11b} - \sigma_{33b} = R_{11}^{2} \sigma_{11f} + 2R_{11}R_{12}\sigma_{12f} + R_{12}^{2}\sigma_{22f} - R_{33}^{2}\sigma_{33f} - 2R_{33}R_{34}\sigma_{34f} - R_{34}^{2}\sigma_{44f}$$
(15)

因为b点也就是 BPM 处的 Q_b 是可以测量得到的,f 点到b 点的传输矩阵也是已知的,于是公式(15)即为 一个六元一次方程,于是改变传输矩阵 m 次($m \ge 6$),并且每次测量相应的b 点处的四极分量 Q_b ,联立方程便 可以求得 f 点的所有束流矩阵参数(σ_{11f} , σ_{12f} , σ_{22f} , σ_{33f} , σ_{44f})^T。代入到发射度的计算公式(15)中便可 以很容易地求解出 x,y 方向的发射度

$$\epsilon_x = \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}, \quad \epsilon_y = \sqrt{\sigma_{33}\sigma_{44} - \sigma_{34}^2}$$
 (16)

S. Russell 指出发射度结果的精度依赖于联立的方程组的系数矩阵的稳定性^[4]。如果系数矩阵近似于一 个奇异矩阵,那么计算的结果误差也会很大,导致不可信。而且系数矩阵的稳定性是其固有的属性,并不能通 过任何数据处理方法来改进,唯有通过大幅度改变 *f* 点到 *b* 点的传输矩阵的变化来改进。目前大多数研究人 员均采用改变四极铁电流的方法来改变传输矩阵。S. Russell 等人试验出的一种稳定的方案结构是在 BPM 前排列 3 个四极铁供改变。



4 初步实验结果与讨论

在合肥光源,条带 BPM 和相应的数据获取系统已经研制并安装在 200 MeV 直线加速器束流输运段上^[9]。 条带 BPM 的电极张角为 60°,电极长度为 183.8 mm(7/4 波长)。数据获取系统包括前端模块,对数检波模块, 信号采集模块和软件部分。信号采集系统的工作频率为 2 856 MHz,工作带宽为 10 MHz,动态范围为 40 dB。

利用上述的方法进行实验测量成功地提取出了束流的质心位置和四极分量。图 4 给出了用混合提取方法 提取出的四极分量与所调节的前端的两块四极铁 QB7,QB8 的电流的关系图,并进行了线性拟合。图 4(a)的 相关系数为一0.987,图 4(b)的相关系数为 0.998。



Fig. 4 Second moment $\sigma_x^2 - \sigma_y^2 vs$ quadrupole magnet's current 图 4 混合提取方法提取的四极分量 $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ 与四极铁电流的关系

在实验过程中,发现现有的 BPM 与前面的四极铁距离太远,大约有 15 m。这样,误差被极大地放大。而 且经过 6 阶矩阵的作用,误差的确定变得十分困难。由于只有两个四极铁可供调节,求解四极分量的系数矩阵 近似为一个奇异矩阵,非常不稳定。所以我们虽然能够成功地提取出了束流的四极分量信息,但还是得不到一 个可信的发射度的结果。目前我们正在研制新的短条带的 BPM,其条带电极长度为 26.2 mm(1/4 波长),电 极张角为 45°,并将安装到合适的位置。

5 结 论

在利用 BPM 进行束流发射度的非拦截测量时,可以利用多种数据处理方法来提取束流的四极分量信息, 混合提取方法效果最佳,且对数比处理方法要优于差比和处理方法。进而改变传输矩阵便可以利用 Miller 的 方法来计算束流的发射度,最好调节3块或更多块四极铁电流来改变传输矩阵以得到一个合理稳定的结果。

参考文献:

- [1] Miller R H, Clendenin J E, James M B, et al. Nonintercepting emittance monitor[C]//Proc of the 12th International Conference on High Energy Accelerators. 1983;602-605.
- [2] Russell S J, Carlsten B E. Measuring emittance using beam position monitors[C]//Proc of the 1993 Particle Accelerator Conference. 1993: 2537-2539.
- [3] Jansson A, Williams D J. A new optimised quadrupole pick-up design using magnetic coupling[J]. Nucl Instr and Meth in Phys Res A, 2002, 479:233-242.
- [4] Assmann R, Dehning B, Matheson J. Use of movable beam position monitors for beam size measurements[C]//Proc of EPAC. 2000:1693-1695.
- [5] Russell S J. Unstable matrix equations and their relationship to measuring the emittance of an electron beam using beam position monitors
 [J]. Nucl Instr and Meth in Phys Res A, 1999, 430:498-506.
- [6] 赵敬霞,曹建社,裴士伦,等. 多条形电极束流能散度探测器的张角优化[J]. 强激光与粒子束, 2006, 18(8):1355-1358. (Zhao J X, Cao J S, Pei S L, et al. Optimization of electrode opening angle for beam energy spread monitor. *High Power Laser and Particle Beams*, 2006, 18 (8):1355-1358)
- [7] 郑普,孙葆根,卢平,等. 合肥光源 200 MeV 直线加速器束流位置检测器的计算[J]. 强激光与粒子束, 2003, 15(8):821-824. (Zheng P, Sun B G, Lu P, et al. Calculation of beam position monitor for 200 MeV LINAC of Hefei light source. *High Power Laser and Particle Beams*, 2003, 15(8):821-824)
- [8] 李吉浩,孙葆根,何多慧,等.用于合肥光源 200 MeV 直线加速器束流位置测量的信号处理系统[J].强激光与粒子束, 2005, 17(9):1434-1436. (Li J H, Sun B G, He D H, et al. Signal processing system for beam position monitor at HLS 200 MeV LINAC. *High Power Laser*

and Particle Beams, 2005, 17(9):1434-1436)

[9] 李吉浩,孙葆根,何多慧,等. 合肥光源直线加速器 BPM 系统的研制和测量[J]. 高能物理与核物理, 2007, **31**(1):96-100. (Li J H, Sun B G, He D H, et al. Research and measurement of BPM system at HLS LINAC. *High Energy Physics and Nuclear Physics*, 2007, **31**(1):96-100)

New methods of beam position monitors for measurement of quadrupole component

LI Peng, SUN Bao-gen, LUO Qing, WANG Xiao-hui, LU Ping, XU Hong-liang, FANG Jia (National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, P. O. Box 6022, Hefei 230029, China)

Abstract: Stripline beam position monitors(BPM) can be used as a nonintercepting emittance monitor and it is independent of the beam distribution. Usually, difference over sum method is used to pick up the quadrupole component. This paper puts forward two new methods' log-ratio method and combination method. The analysis and comparison of these methods are introduced. Combination method is the best, and log-ratio method is better than difference over sum method. Changing the current of quadrupole magnets m times (more than six times) upstream from BPM to change the transfer matrix and measuring the quadrupole component for each change, the emittance can be calculated.

Key words: Beam position monitor; Beam emittance; Quadrupole component; Difference over sum method; Log-ratio method; Combination method; Nonintercepting measurement