

方形自聚焦透镜折射率分析*

陈凯, 韩艳玲, 周自刚**

(西南科技大学 理学院, 四川 绵阳 621000)

摘 要:利用 MATLAB 偏微分方程工具箱(PDE)实现方形玻璃纤维边界条件下离子扩散的有限元解法, 给出一般步骤, 对离子交换制备方形自聚焦透镜过程进行计算机模拟. 运用分离变量法求解方形玻璃纤维中 Tl^+ 离子浓度定解方程, 由离子浓度与折射率的线性关系, 得到了方形自聚焦透镜折射率分布的数学表达式, 计算出折射率分布图以及理论值. 与实验值校验表明, 相对误差小于 0.33%.

关键词:方形自聚焦透镜; 离子交换; MATLAB; 分离变量法

中图分类号: O435.1

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2008)04-0648-4

0 引言

自聚焦透镜(GRIN)作为一种重要的光信息器件, 具有很好的聚光、准直和成像特性, 因此是改善光学系统性能的重要元件^[1-2]. 自聚焦透镜阵列(SLA)是在自聚焦透镜基础上发展起来的新型透镜, 广泛应用于成像^[3]和图像处理设备. 当前制作和应用的多是圆柱形或半球形自聚焦透镜元组成的阵列, 典型的有正方形和六角形紧密排列. 这种阵列制作工艺简单, 像差小, 但存在透镜元间孔隙大, 部分光信息泄漏的缺点^[4], 其理论极限光信息泄漏分别达 21.5% 和 9.3%^[5]. 为了克服这一缺陷, 人们把目光投向了方形自聚焦透镜, 这种透镜组成的阵列可以紧密排列, 增大受光面积, 减少孔隙间光信息泄漏, 有助于提高光学系统性能.

离子交换是制作方形自聚焦透镜的重要方法, 其数学模型是方形边界条件下的扩散方程. 本文依据这一模型, 介绍 MATLAB PDE 工具箱对扩散过程进行分析的方法. 根据方形边界条件的特点, 使用分离变量法求解了离子扩散方程, 并进一步得到方形自聚焦透镜折射率分布数学表达式.

1 离子交换法和 MATLAB PDE 工具箱分析

1.1 离子交换法与数学模型

玻璃的折射率由组分原子(离子)含量及极化率决定, 离子交换就是改变某种离子的浓度分布, 或改变离子电极化率, 从而得到梯度折射率分布^[6]. 为了获得较大的折射率差, 通常选用电极化率相差大的

一价离子对(如 $Tl^+ - K^+$, $Li^+ - Na^+$)进行交换. 离子交换时玻璃中的高极化率离子扩散进入熔盐, 其浓度分布数学模型是相应定解条件下的扩散方程^[7]

$$\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

式中 D 是常扩散系数^[8].

1.2 MATLAB PDE 分析

MATLAB 是国际上最流行的工程计算软件, 广泛应用于数学计算, 信号处理, 系统仿真等许多领域. MATLAB 偏微分工具箱(PDE)是以有限元法为基础, 专门用于偏微分方程数值求解的计算工具^[9], 对于分析扩散方程(1)非常方便. 主要步骤为: 在命令方式下输入命令 PDE, 进入偏微分工具箱. 首先设置 PDE 定解问题, 即求解模式为 Diffusion(扩散). 在画图(Draw)模式下用图形交互模式或命令方式对方形交换区域建模. 命令方式建模

pdepoly (X, Y, 'C')

X, Y 分别是正方形顶点的 x 与 y 坐标向量, 模型命名是 C . 之后进入边界(Boundary)模式, 去掉子域边界, 因为扩散过程中边界高极化率离子浓度 C_1 不变, 故在模型的整个边界设置 Dirichlet 边界条件, 令 $h = 1, r = C_1$. 然后进入 PDE 模式设置 PDE 参量, PDE 类型为 Parabolic, 设置扩散系数 D 值.

选择 Mesh 菜单中的 Initialize Mesh 命令, 根据有限元法的要求进行网格划分, 如图 1.

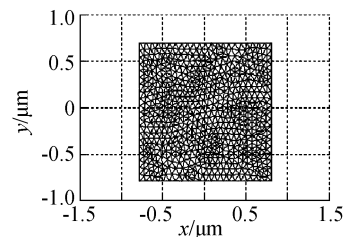


图 1 网格划分后的模型

Fig. 1 The model of mesh divided

* 西南科技大学引进人才基金(053102)资助

** Tel:0816-6089663 Email:zhouzigang@swust.edu.cn

收稿日期:2006-11-03

另一段在 Solve 模式下设求解参量,有时间向量(Time), u_{i0} (即 C_0) 等. 最后求解以及解的可视化. 其中 Plot Selection 选项提供了等值线(contour)、3-D等高线图、动画(Animation)等多种选择. 为研究扩散过程提供了灵活而实用的环境.

离子交换过程中高极化率离子扩散出透镜,浓度从中心向边缘逐渐减小,此过程的三维动画模拟演示如图 2.

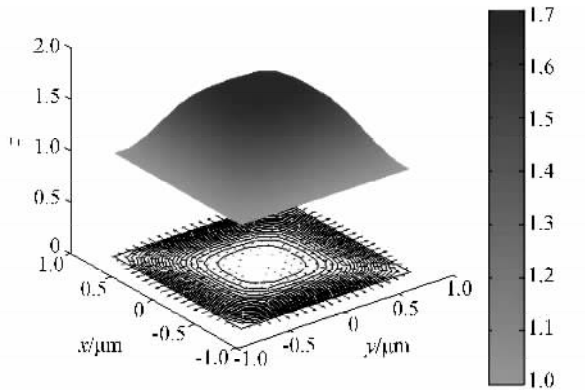


图 2 高极化率离子浓度变化动画三维模拟
Fig. 2 Animation imitate ion concentration variation

由于方形自聚焦透镜的边界并非旋转对称,所以离子交换程度在各个位置上不相同. 靠近直角对角线轴附近区域受到两边离子交换影响较大,浓度变化相对剧烈,中心区域变化比较均匀,图 3 显示了这种离子浓度分布的特点.

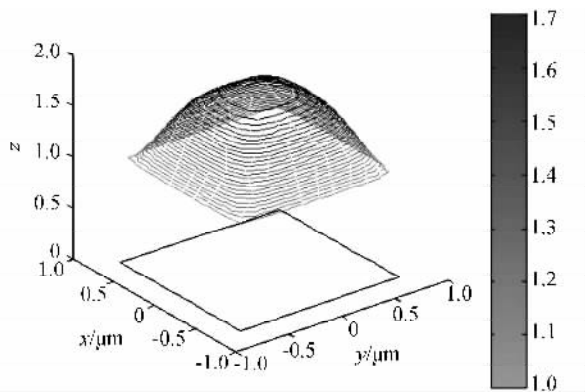


图 3 扩散中高极化率离子浓度等值线图
Fig. 3 Contour plot of ion concentration

2 分离变量法求解

2.1 离子浓度理论计算

在方形自聚焦透镜的研制中^[1],采用了含高极化率离子 Tl^+ 的方形玻璃纤维与 K^+ 离子进行交换,求解 Tl^+ 离子浓度分布的定解方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x,y,t)}{\partial t} = D(\frac{\partial^2 C(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x,y,t)}{\partial y^2}) \\ C(0,y,t) = C(a,y,t) = 0 & (t > 0) \\ C(x,0,t) = C(x,a,t) = 0 & (0 \leq x \leq a) \\ C(x,y,0) = C_0 - C_1 & (0 \leq y \leq a) \end{cases} \quad (2)$$

式中, C_1 为交换过程中边界高极化率离子浓度. C_0 为玻璃纤维中高极化率离子初始浓度, a 为方形玻璃纤维边长.

分离时间与坐标变量,令 $C(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$,并将其代入式(2),由于篇幅限制,故将求解过程略去,最终得

$$\begin{cases} T(t) = C_{mm} e^{-(\frac{m^2+n^2}{a^2})\pi^2 Dt} \\ X = A \sin(\frac{m\pi}{a}x) \\ Y = B \sin(\frac{n\pi}{a}y) \end{cases} \quad (3)$$

式中 C_{mm} 、 A 、 B 为常量, m 、 n 为正整数. 由叠加原理得

$$C(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mm} \sin(\frac{m\pi}{a}x) \sin(\frac{n\pi}{a}y) \cdot e^{-(\frac{m^2+n^2}{a^2})\pi^2 Dt}$$

根据初始条件 $C(x,y,0) = C_0 - C_1$,得到系数 C_{mm} .

$$C_{mm} = \frac{4}{a^2} \int_0^a \int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a}x) \sin(\frac{n\pi}{a}y) dx dy$$

所以,浓度分布表达式

$$C(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mm} \sin(\frac{m\pi}{a}x) \cdot \sin(\frac{n\pi}{a}y) e^{-(\frac{m^2+n^2}{a^2})\pi^2 Dt} + C_1 C_{mm} = \frac{4}{a^2} \int_0^a \int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a}x) \sin(\frac{n\pi}{a}y) dx dy$$

2.2 折射率分布

玻璃折射率的改变量与高极化率离子浓度呈线性关系,因此,可以把浓度表达式直接用折射率来表示^[9],得到方形自聚焦透镜折射率分布

$$\begin{aligned} \frac{n(x,y,t) - n_1}{n_0 - n_1} &= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mm} \sin(\frac{m\pi}{a}x) \cdot \sin(\frac{n\pi}{a}y) e^{-(\frac{m^2+n^2}{a^2})\pi^2 Dt} \\ C_{mm} &= \frac{4}{a^2} \int_0^a \int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a}x) \sin(\frac{n\pi}{a}y) dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\Delta = (n_0 - n_1) / n_0$ 为相对折射率差,是一常量. n_0 为玻璃初始折射率. n_1 是交换后玻璃边界折射率.

2.3 计算结果与分析

利用本文得到的折射率分布表达式,开发了 MATLAB 计算程序. 为验证式(4)的正确性,对文献[4]和[10]给出的实验结果进行了校核. 图 4 是计算折射率分布图,可以看出,中心部分折射率分布均匀,四个棱角内变化较大,与用干涉法得到的照片(图 5)符合得很好.

表 1 给出了计算值与文献[10]中实验值校验结果. 可以看出,相对误差均在 0.33% 以下,表明式(4)可以给出比较满意的折射率计算结果.

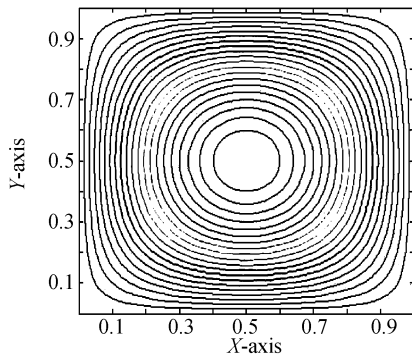


图4 理论计算折射率分布
Fig. 4 Theoretical Refractive index distribution

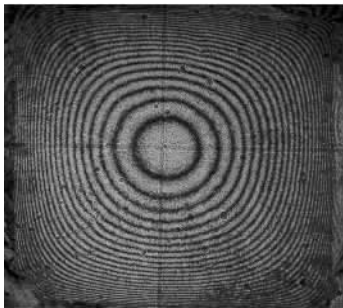


图5 方形自聚焦透镜的干涉环
Fig. 5 Square lens interference link photograph

表1 实验值与理论值及误差

坐标 (x, y)	实验值	理论值	相对误差
(1.131, 1.000)	1.6142	1.6127	0.093%
(1.525, 1.000)	1.5844	1.5798	0.290%
(1.511, 1.137)	1.5840	1.5813	0.170%
(1.657, 1.176)	1.5612	1.5561	0.330%
(1.065, 1.113)	1.6141	1.6127	0.087%
(1.272, 1.471)	1.5844	1.5838	0.004%
(1.093, 1.093)	1.6145	1.6127	0.011%
(1.391, 1.391)	1.5844	1.5854	0.063%
(1.535, 1.535)	1.5613	1.5624	0.070%

3 结论

利用偏微分方程描述方形边界扩散方程,应用MATLABPDE工具箱进行数值求解.这一方法具有建模简单,操作方便,解的可视化等优点.另外,也可以对圆柱形,平面等边界扩散进行分析.通过分离变量得到方形自聚焦透镜折射率分布数学表达式,具有较高的准确度,可用在方形自聚焦透镜的研制中.

参考文献

[1] ZHU Shao-li, XU Qiou-shuang, LIU De-sen, *et al.* The analysis of GRIN in optical fiber collimator[J]. *Journal of Southwest*

China Normal University, 2004, **29**(3):379-382.

朱少丽,徐秋霜,刘德森.自聚焦透镜在光纤准直器中的应用分析[J].西南师范大学学报,2004, **29**(3):379-382.

- [2] LI Yu-lin, HUO Jun-min, HE Zheng-quan. The development and application of GRIN lens [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(Z1):302-306.
李育林,霍军民,贺正权.梯度折射率透镜的开发及应用[J].光子学报,2000, **29**(Z1):302-306.
- [3] TIAN Wei-jian, YAO Sheng-li, CHEN Rong-li. Multit-Channel imaging system for detecting moving object [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(1):47-49.
田维坚,姚胜利,陈荣利,等.用于运动目标探测的多通道成像系统[J].光子学报,2002, **31**(1):47-49.
- [4] HAN Yan-ling, LIU De-sen, LI Jing-yan, *et al.* Research on manufacture of square Gradient-index lens [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(9):1301-1304.
韩艳玲,刘德森,李景艳,等.方形自聚焦透镜的研制[J].光子学报,2006, **35**(9):1301-1304.
- [5] AN Yu-ying, LIU Ji-fang, LI Qing-hui. Optical electronics technique [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2004.
安毓英,刘继芳,李庆辉.光电子技术[M].北京:电子工业出版社,2004.
- [6] LIU De-sen, GAO Ying-jun. Gradient-index material physics foundation [M]. Beijing: Nation Defence Industry Press, 1991.
刘德森,高应俊.变折射率介质物理基础[M].北京:国防工业出版社,1991.
- [7] LIANG Kun-miao. Mathematics physics method. Beijing: Higher Education Press, 2004.
梁昆淼.数学物理方法[M].北京:高等教育出版社,2004.
- [8] ZHOU Zi-gang, LIU De-sen, LIU Xiao-dong. Improvement of the edge index distribution for Tl glass selfoc lens [J]. *Acta Photonica Sinica*, 1999, **28**(10):943-946.
周自刚,刘德森,刘晓东.铊玻璃自聚焦透镜边缘折射率分布的改进[J].光子学报,1999, **28**(10):943-94.
- [9] HUANG Zuo-ying, QUE Pei-wen. Electromagnetic field numerical based on MATLAB [J]. *Computer Engineering and Applying*, 2004, **40**(36):196-202.
黄作英,阙沛文.基于MATLAB的电磁场数值分析[J].计算机工程与应用,2004, **40**(36):196-202.
- [10] HAN Yan-ling. Theoretical analysis and manufacture craft of square Self-focusing lens and its array academic dissertation [D]. Chongqing: Southwest China Normal University, 2005: 30-31.
韩艳玲.方形自聚焦透镜理论分析和制作工艺[D].重庆:西南师范大学,2005:30-31.

Analysis of Refractive-index Distribution of Square Gradient Lens

CHEN Kai, HAN Yan-ling, ZHOU Zi-gang

(School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang, Sichuan 621000, China)

Received date: 2006-11-03

Abstract: MATLAB diffusion partial differential toolbox is used to solve ion diffusion equation with square boundary conditions, and the ion concentration dynamic process is simulated during the ion exchange. The Solution can be played and showed. The Tl^+ concentration equation in square class fiber is calculated by variable separation method, the refractive-index distribution of Square GRIN lenses analytic solution is got based on the linear relation between refractive-index and ion concentration. The computation results are in good agreement with the measured ones. It can reflect the refractive-index of Square GRIN well.

Key words: Square GRIN Lenses; Ion exchange; MATLAB; Variable separation method

CHEN Kai was born in 1985. He is an undergraduate student of Southwest University of Science and Technology. His research interests focus on GRIN lens.

