

基于多小波变换的图像去噪新方法*

孙伟峰^{1,2}, 何俊华¹

(1 中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710119)

(2 中国科学院研究生院, 北京 100049)

摘要: 离散多小波在图像去噪和图像融合方面有突出的效果. 利用 GHM 多小波, 对图像去噪中阈值的选取给出了具体的方法, 对单小波与多小波去噪方法进行了比较. 结果表明, 多小波在图像去噪的效果上明显优于单小波.

关键词: 多小波; 分解; 重构; 去噪; 阈值; 信噪比

中图分类号: TN911

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2008)11-2360-5

0 引言

小波分析是近年来国际上一个非常热门的前沿研究领域, 是继 Fourier 分析之后的一个突破性进展, 它给许多相关领域带来了崭新的思想, 提供了强有力的工具. 从工程角度看, 小波分析是一种信号与信息处理的工具, 是继 Fourier 分析之后又一有效的时频分析方法. 小波变换作为一种新的多分辨分析方法, 可同时进行时域和频域分析, 具有时频局部化和多分辨特性, 因此特别适合于处理非平稳信号. 与单小波不同, 多小波基由多个小波母函数经过伸缩平移生成, 对应的有多个尺度函数. 单小波在对信号进行处理时, 可对采样数据直接进行分解和重构, 但多小波就不能, 需在分解前进行数据预处理, 然后对处理后的数据进行分解, 对重构后的数据还要进行后处理才能得到重构数据. 多小波在构造时具有更多的自由度, 因此它们比单个小波具有更短的支集和更多的消失矩, 而且它们可以同时满足正交性和对称性. 多小波既保持了单小波的诸多优点, 又克服了单小波的缺陷. 在实际应用中可以把十分重要的光滑性、紧支性和对称性完美地结合在一起.

1 多小波理论

r 元多分辨分析 MRA^r 是 $L^2(R)$ 上一串闭子空间嵌套序列 $\{V_j\}_{j \in Z}$, 满足以下条件

- 1) 单调性: $V_j \subseteq V_{j+1}, j \in Z$;
- 2) 逼近性: $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(R), \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$;
- 3) 伸缩性: $f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$;
- 4) 平移不变性: $f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_j, \forall k \in Z$;
- 5) 存在函数 $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)^T$, 使得整数变换族

$\varphi_l(x-k), k \in Z, 1 \leq l \leq r$, 形成 V_0 上的 Riesz 基.

称 Φ 是 MRA^r 的多重尺度函数. 如果 Φ 是正交的, 则称 $\{V_j\}$ 是正交的 MRA^r .

对正交的 $\{V_j\}$, 令 W_j 为 V_j 在 V_{j+1} 空间上的正交补, 即 $V_{j+1} = W_j \oplus V_j$, 于是由 MRA^r 的单调性和逼近性可知: $W_j \perp W_k (j \neq k)$, 且 $\sum_{j \in Z} \oplus W_j = L^2(R)$.

如果 $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)^T$ 形成 W_0 上的规范正交基, 则 $\{\Psi(2^j x - k), k \in Z, x \in R\}$ 是 W_j 的规范正交基, 称 Ψ 是正交多小波

2 图像的多小波变换

2.1 多小波变换

多小波变换与单小波变换不同, 在进行变换前, 需进行预滤波. 预滤波是为了消除多小波的不恰当离散性. 预滤波完成后, 进行相应的多个小波变换. 同理, 完成多个小波重构后, 要进行后滤波才能实现完整的多小波重构.

多小波是由 $r \geq 2$ 的尺度函数 $\{\phi_k(x)\}_{1 \leq k \leq r} \in L^2(R)$ 和相应的小波函数 $\{\Psi_k(x)\}_{1 \leq k \leq r} \in L^2(R)$ 伸缩平移生成. 设 $\{H_k\}_{0 \leq k \leq L-1}$ 和 $\{G_k\}_{0 \leq k \leq L-1}$ 为相应的 $r \times r$ 滤波器矩阵, $\Phi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)\}^T, \Psi(x) = \{\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_r(x)\}^T$ 分别为尺度函数矢量和多小波函数矢量, 则多小波变换表示为

$$\Phi(x) = 2 \sum_{k=0}^{L-1} H_k \Phi(2x-k) \quad (1)$$

$$\Psi(x) = 2 \sum_{k=0}^{L-1} G_k \Phi(2x-k) \quad (2)$$

H_k 和 G_k 是 $r \times r$ 阶矩阵, 称为两尺度方程的矩阵尺度系数, 也称为矩阵滤波器系数.

将正交单小波中的分解与重构的 Mallat 算法推广至正交多小波, 可得到多小波的分解

$$C_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_{n-2k} C_{j,n}, j, k \in Z \quad (3)$$

* 国防科技重点实验室基金(5144830105ZK1801)资助
Tel: 029-88887548-8001 Email: breeze005@163.com
收稿日期: 2007-07-03

$$D_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} g_{n-2k} C_{j,n}, j, k \in Z \quad (4)$$

多小波的重构

$$C_{j,k} = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_{k-2n}^* C_{j-1,n} + g_{k-2n}^* D_{j-1,n} \quad (5)$$

式中, $C_{j,k} = [c_{0,j,k}, \dots, c_{r-1,j,k}]^T$, $D_{j,k} = [d_{0,j,k}, \dots, d_{r-1,j,k}]^T$, h_n^* 和 g_n^* 分别是 h_n 和 g_n 的共轭转置。

2.2 图像多小波交换的实现方法

设待处理的信号 $x(m, n)$, $m, n \in Z, 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N$, 预处理后, 生成四个 $m/2 \times n/2$ 分量: $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$, 对这四个分量进行多小波变换, 生成 16 个 $m/4 \times n/4$ 分量

$$M_w = \begin{pmatrix} C_{LL1} & C_{LL2} & C_{HL1} & C_{HL2} \\ C_{LL3} & C_{LL4} & C_{HL3} & C_{HL4} \\ C_{LH1} & C_{LH2} & C_{HH1} & C_{HH2} \\ C_{LH3} & C_{LH4} & C_{HH3} & C_{HH4} \end{pmatrix} \quad (6)$$

整个变换过程中总像素保持不变. GHM 多小波分解与重构的系统框图如图 1.

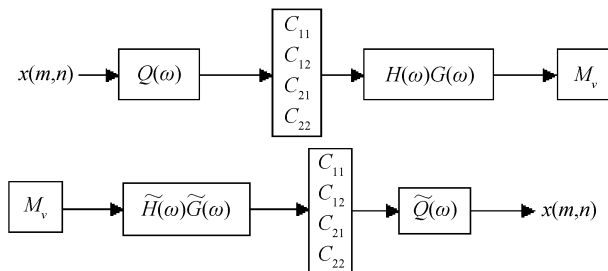
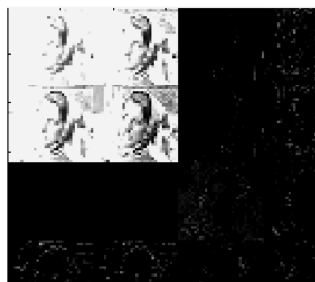


图 1 多小波分解与重构的系统结构
Fig. 1 The system frame of multiwavelet decomposition and reconstruction

图中 $H(\omega)G(\omega)$ 为多小波滤波器, $\tilde{H}(\omega)\tilde{G}(\omega)$ 为多小波逆滤波器, $Q(\omega)$ 和 $\tilde{Q}(\omega)$ 分别表示预滤波器和后滤波器. 图像的分解与重构如图 2.



(a) GHM multiwavelet decomposition



(b) Reconstruction

图 2 Woman 图像的 GHM 多小波分解与重构
Fig. 2 GHM multiwavelet decomposition and reconstruction of Women image

2.3 GHM 多小波滤波器的设计

为了消除多小波的不恰当离散性, 在多小波变换中首先需对原始的标量输入信号进行预滤波, 得到用于多小波分解的初始矢量信号. 预滤波完成后, 进行相应的多小波变换. 同理, 完成多个小波重构后, 要进行后滤波才能实现完整的多小波重构. Xie 等把预滤波器和多小波的第一级分解结合起来考虑, 将本文采用的 GHM 多小波滤波器的构造转化为低通滤波器和高通滤波器的设计. 通常采用的 GHM 多小波前置和后置滤波器为

$$\text{Pre}(0) = \begin{bmatrix} 3/8\sqrt{2} & 10/8\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{Pre}(1) = \begin{bmatrix} 3/8\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Post}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3/10 \end{bmatrix}, \text{Post}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4\sqrt{2}/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

采用 GHM 多小波进行去噪处理, GHM 滤波器分别为

$$L(0) = \begin{bmatrix} 3/5\sqrt{2} & 4/5 \\ -1/20 & -3/10\sqrt{2} \end{bmatrix}, L(1) = \begin{bmatrix} 3/5\sqrt{2} & 0 \\ 9/20 & 1/20 \end{bmatrix}$$

$$L(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9/20 & -3/10\sqrt{2} \end{bmatrix}, L(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(0) = \begin{bmatrix} -1/20 & -3/10\sqrt{2} \\ 1/10\sqrt{2} & 3/10 \end{bmatrix}, H(1) = \begin{bmatrix} 9/20 & -1/\sqrt{2} \\ 9/10\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(2) = \begin{bmatrix} 9/20 & -3/10\sqrt{2} \\ 9/10\sqrt{2} & -3/10 \end{bmatrix}, H(3) = \begin{bmatrix} -1/20 & 0 \\ -1/10\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3 基于多小波变换的图像去噪

设 $f(x, y)$ 为原始信号, $f_{\text{noise}}(x, y)$ 为被高斯白噪声污染的信号, 噪声为 $n(x, y)$, 其服从 $N(0, 0.1)$ 分布, 有噪声信号模型为

$$f_{\text{noise}}(x, y) = f(x, y) + n(x, y) \quad (7)$$

由多小波的变换特性可知, 高斯白噪声的多小波变换仍然是高斯分布的, 在不同尺度上都有分量表现, 但能量在高频部分上较集中且均匀分布; 而图像细节信号在各个尺度高频分量上都有突出的表现. 因此图像去噪可以在多小波变换的高频域内进行. 其中, D. L. Donoho 提出的小波阈值去噪方法在最小均方差意义上有效并可达到很好的效果. 该方法的关键是阈值的选取和量化, 从某种程度上来说, 它直接关系到图像消噪的质量.

小波阈值去噪的基本思路是:

1) 先对含噪图像 $f_{\text{noise}}(x, y)$ 做小波变换, 得到一组小波系数 $w_{j,k}$;

2) 通过对 $w_{j,k}$ 进行阈值处理, 得出估计小波系数 $\hat{w}_{j,k}$, 使得 $\|\hat{w}_{j,k} - w_{j,k}\|$ 尽可能小;

3) 利用 $\hat{\omega}_{j,k}$ 进行小波重构, 得到的图像即为去噪后的图像。

对 $f_{\text{noise}}(x, y)$ 连续做几次小波分解后, 空间分布不均匀信号 $f(x, y)$ 所对应的各尺度上小波系数 $\omega_{j,k}$ 在某些特定的位置有较大的值, 这些点对应原始信号 $f(x, y)$ 的奇变位置和重要信息, 而其它大部分位置的 $\omega_{j,k}$ 值较小; 对于白噪声 $n(x, y)$, 它所对应的小波系数 $\omega_{j,k}$ 均匀分布在每一个尺度上, 并随着尺度的增加, $\omega_{j,k}$ 系数的幅值有所减小。因此, 通常消噪的基本思想是当小波变换系数 $\omega_{j,k}$ 小于某个临界阈值时, 此系数主要是由噪声引起的, 应当予以舍弃; 当 $\omega_{j,k}$ 大于这个临界阈值时, 此系数主要是由信号引起的, 就把这一部分 $\omega_{j,k}$ 直接保留下来(硬阈值方法)或者按一个固定量向零收缩(软阈值方法), 用新的小波系数进行小波重构得到去噪后的图像。

硬阈值方法模型定义为

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \omega_{j,k} & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0 & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (8)$$

软阈值方法模型定义为

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \text{sign}(\omega_{j,k}) * (|\omega_{j,k}| - \lambda) & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0 & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (9)$$

以上两种方法运用于单小波变换可以去除大部分噪声的小波系数, 同时较好地保留了图像高频细节信号。但若将这两种方法用于多小波去噪, 其优越性完全消失, 因为根据噪声在多小波变换域中的特征可知, 噪声的强度随着分解尺度的增大而降低, 如果在各个尺度上使用相同的全局阈值, 一定程度上去掉了很多信号的小波系数; 而且在多小波变换域上, 每层分解后的 r 维高频系数并不完全一致, 设置相同的小波去噪阈值并不是最佳选择。因此要对各层信号去噪阈值和每层 r 维的信号去噪阈值做进一步的处理, 以达到更好的效果。

为了解决上述问题, 可用如下方法来获取原始图像的重要小波系数, 首先对一幅图像进行多小波分解, 接着根据多小波分解后的能量分布特性, 在不同尺度的高频子带内, 对小波系数进行不同阈值处理, 大于 $T_{j,k}^l$ ($j=1, 2, \dots, J$ (层数), $l=1, 2, 3$ (分别为水平、垂直、对角方向), $k=1, 2, 3, 4$ (每个子带的小子带编号)) 则保留, 否则置 0; 其中: $T_{j,k}^l = \omega_{j,k}^l T_0$, 根据能量集中的原理, 可以确定各小子带阈值权重 $\omega_{l,k}^j, \omega_{l,k}^j$ 由以下几个步骤算出:

1) 计算每个子带小波系数模值的平均值

$$\left. \begin{aligned} H_{j\text{mean}} &= \frac{1}{m \times n} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n |H_{j,m,n}| \\ V_{j\text{mean}} &= \frac{1}{m \times n} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n |V_{j,m,n}| \\ D_{j\text{mean}} &= \frac{1}{m \times n} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n |D_{j,m,n}| \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2) 计算每一层的小波系数模值的平均值, $\text{Average}_j = \frac{H_{j\text{mean}} + V_{j\text{mean}} + D_{j\text{mean}}}{3}$;

3) 确定各小子带阈值权重 $\omega_{l,k}^j, \omega_{l,k}^j = \frac{\text{Average}_j}{H_{j\text{mean}}}, \omega_{l,k}^j = \frac{\text{Average}_j}{V_{j\text{mean}}}, \omega_{l,k}^j = \frac{\text{Average}_j}{D_{j\text{mean}}}$;

最后经多小波反变换, 得到重构图像。

由上述分析, 可以得到基于 GHM 类多小波去噪的算法流程:

1) 滤波, 对图像 $f_{\text{noise}}(x, y)$ 做预滤波生成图像 $c(x, y)$;

2) 对带噪图像 $c(x, y)$ 进行多小波分解, 选择分解层数为 J , 本文选择 $J=1$;

3) 初始阈值可按文献 [1] 选取 $T_0 = \sqrt{2 \log(N\sigma)}$, 然后确定各小子带的阈值 $T_{l,k}^j = \omega_{l,k}^j T_0$;

4) 对小波系数进行阈值化处理。

$$\omega_{l,k}^j(m, n) = \begin{cases} \omega_{l,k}^j(m, n) & |W_{l,k}^j| \geq T_{l,k}^j \\ 0 & |W_{l,k}^j| < T_{l,k}^j \end{cases};$$

5) 利用以上得到的全部高频系数和低频系数进行多小波反变换, 由二维多小波重构公式可得到降噪后的图像, 然后经过后滤波得到我们需要的去噪图像 $f'(x, y)$ 。

4 图像去噪方法比较与分析

本文采用 Woman 和 Rice 图像做样本, 将单小波和其它方法去噪与多小波去噪进行比较。单小波选择 DB4 小波, 多小波选择 GHM 多小波。选择 Daubechies 正交单小波基 Db4 和 GHM 多小波一样具有二阶消失矩, 这样在相同消失矩的情况下, 具有一定的可比性。信噪比是衡量去噪效果的一个很重要的指标。可以通过图像降噪前后的信噪比 (SNR) 说明降噪效果。设大小为 $M \times N$ 的原始图像为 $f(m, n)$, $\bar{f}(m, n)$ 为原始图像的均值图像, 含噪重构图像为 $f'(m, n)$, 则含噪图像的信噪比可以定义为

$$\text{SNR} = 10 \log \left[\frac{\sum_{m=1n=1}^M \sum_{n=1}^N [f(m, n) - \bar{f}(m, n)]^2}{\sum_{m=1n=1}^M \sum_{n=1}^N [f(m, n) - f'(m, n)]^2} \right] \quad (11)$$

为了更加突出多小波的去噪效果, 增加了几种图像去噪方法进行比较。在图像噪声方差均为 $\sigma^2 = 0.01$ 的实验结果如图 3、图 4 和表 1。从图和表中可以看出多小波在图像去噪方面有较好的效果, 既能较好地保持图像细节, 又能很好地去除由高斯白噪声干扰引起的噪声点, 从几幅图的比较中, 可以看出多小波在图像去噪方面的优越性。

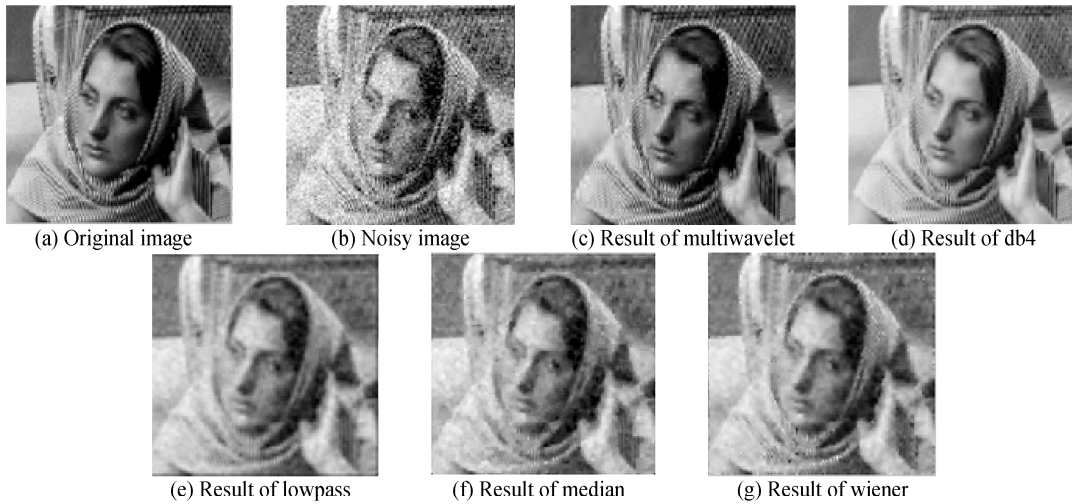


图 3 Woman 图像处理结果
Fig. 3 The results of Woman image processing

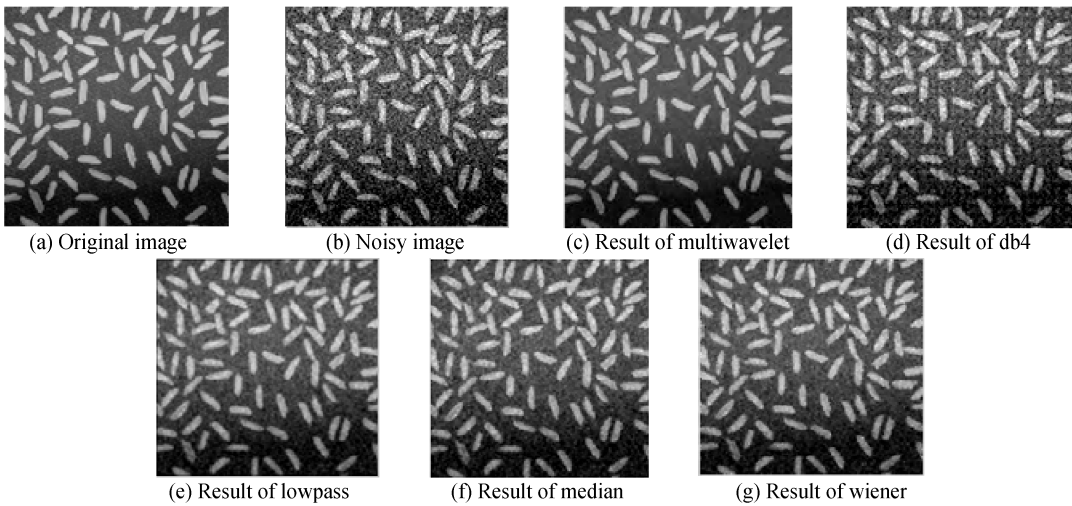


图 4 Rice 图像处理结果
Fig. 4 The results of Rice image processing

表 1 图像去噪后的 SNR/dB 比较

去噪方法	Woman 图像 SNR	Rice 图像 SNR
噪音图像	7.450 0	5.792 2
多小波去噪图像	15.504 5	14.026 8
单小波去噪图像	14.128 5	9.177 8
低通滤波图像	8.278 0	6.843 3
中值滤波图像	8.077 9	6.893 3
维纳滤波图像	8.077 9	6.893 3

5 结论

常用的去噪算法需要在图像边缘纹理和噪音去除之间进行平衡,用单一阈值方法去噪,并没有考虑图像分解后的各层之间以及每层的水平、垂直和细节分量小波系数之间的差异,不可避免地会造成各个子带去噪的不平衡,不利于图像恢复.本文提出了一种基于多小波变换及多层阈值的噪音去除方法,根据能量集中的原理,给出了各小子带阈值权重 $\omega_{l,k}$ 的计算方法.实验表明,此方法能很好地去除图像受到高斯白噪音干扰引起的噪音点,较好地保留

图像的细节信息.

参考文献

[1] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding [J]. *IEEE Trans on IT*, 1995, **41**(3): 613-627.

[2] STRELA V. The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1999, **8**(4): 548-563.

[3] VIDAKOVIEC B, LOZOYA C B. On time-dependent wavelet de-noising [J]. *IEEE Trans Signal Processing*, 1998, **46**(9): 2549-2551.

[4] LIU Xin-wen, WANG Hui-nan, QIAN Zhi-yu. Noising process of OCT image based on wavelet transform [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(6): 935-939.

刘新文, 王惠南, 钱志余. 小波变换对 OCT 图像的降噪处理 [J]. *光子学报*, 2006, **35**(6): 935-939.

[5] WU Dong-mei. Noisy image estimation with translation invariant wavelet thresholding [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(2): 306-309.

吴冬梅. 基于平移不变小波阈值算法的噪音图像估计 [J]. *光子学报*, 2005, **34**(2): 306-309.

[6] CHENG Zheng-xing, ZHANG Ling-ling. Multiwavelet analysis

- and application [J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2001, **18**(1):99-107.
- 程正兴,张玲玲.多小波分析与应用[J].工程数学学报,2001, **18**(1):99-107.
- [7] CHENG Zheng-xing, ZHANG Ling-ling. Multiwavelet theory progress and study[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2001, **18**(3):1-16.
- 程正兴,张玲玲.多小波理论发展与研究[J].工程数学学报,2001, **18**(3):1-16.
- [8] HOU Jian-hua, TIAN Jin-wen, LIU Jian. An improved joint scheme for image denoising[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(11):1748-1751.
- 侯建华,田金文,柳健.一种改进的图像组合滤波方法[J].光子学报,2005, **34**(11):1748-1751.

A New Image De-noising Method Based on Multiwavelet Transform

SUN Wei-feng^{1,2}, HE Jun-hua¹

(1 *Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710119, China*)

(2 *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

Received date:2007-07-03

Abstract: Comparing with wavelet, discrete multiwavelet has a lot of advantages in image processing, especially in image de-noising and fusion. The method of choosing threshold while using multiwavelet in image de-noising was presented used GHM multiwavelet. A comparison was made between wavelet and multiwavelet in image de-noising. The results show that multiwavelet performs better than wavelet.

Key words: Multiwavelet; Decomposition; Reconstruction; De-noising; Threshold; Signal-to-noise ratio



SUN Wei-feng was born in 1982. She received her B. S. degree from Anhui University of Science and Technology in 2005. Now she is pursuing her M. S. degree at Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics of CAS. Her research interests focus on image processing.