

李变换方法在超环面光栅成像理论中的应用*

王洁玮¹, 吴伟¹, 贺正权², 吕丽军³

(1 上海大学 理学院, 上海 200444)

(2 中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710119)

(3 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200444)

摘要:应用李变换方法研究了超环面光栅的成像及其像差,介绍了李变换基本原理.光栅成像过程可分成五个部分,分别对应五个李变换;其中最重要的变换就是超环面光栅的衍射李变换.利用这五个李变换推导出了超环面光栅的成像公式,并应用光线追迹,对研究结果进行了验证,说明了李变换的方法能准确地描述超环面光栅的成像.该方法可以处理平面光源,能计算远离子午焦平面处的像差.李变换方法导出的成像公式描述了像平面坐标与物平面坐标、方向余弦之间的函数关系,体现了物空间变量与像空间对应变量之间映射关系.

关键词:李变换;超环面光栅;成像理论

中图分类号: O435.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2008)11-2250-3

0 引言

传统分析平面对称光学系统成像是应用特征函数和波像差方法. A. J. Dragt 首先将李变换的方法应用于轴对称光学系统的成像分析^[1]. K. Goto 和 T. Kurosaki 将这一方法运用到平面对称(球面光栅)的光学系统中,计算球面光栅的像差和成像公式^[2].这几种方法有各自的优缺点.李变换作为一个新的处理方法,其中有些问题还有待进一步研究,因此,在国际上仍有许多科学工作者在研究这方面的课题^[3].

本文将运用李变换的方法来研究超环面光栅的成像及其像差.首先,将简要介绍李变换的基本原理;其次,阐述超环面光栅李变换;最后,讨论李变换的成像公式及其相关的像差系数.

1 几何光学的辛映射

考虑到光学系统是典型的非线性哈密顿系统,可以用处理非线性动力学中的李代数方法分析,通过相空间坐标来描述光线通过光学系统的成像情况.在一个光学系统中,可以定义矢量 $w^i = (x, y, p, q)$ 和 $w^f = (x', y', p', q')$. x, y 表示物平面上光源点的坐标, p, q 表示光源发出光线分别与 x, y 轴的方向余弦, x', y', p', q' 分别对应像平面上的坐标和方向余弦.用这个矢量就可以描述一条光线在空间中的传播状态.可以用一个函数关系或映射 M 来描述初始和终端光线状态之间的关系

$$w^f = M w^i \quad (1)$$

光线的初值 w^i 与末值 w^f 之间的关系由 Hamilton 量决定,这与 Fermat 原理是等价的,因此可以推知 M 是一个辛映射^[1].李变换就是这种辛映射在数学上的具体形式^[4].

将光线通过整个光学系统的过程分解若干个单一过程.对每个单一过程,都可以找到变换 $w^f = w^f(w^i)$,并将其转换成李变换的形式.它们对应的李变换为 M_1, M_2, \dots, M_n .整个光学系统的李变换就是各个单一过程的李变换的乘积.

2 超环面光栅的李变换

在物空间和像空间中,定义物平面 Σ 和像平面 Σ' ,根据图 1 中建立的坐标系,假定 α 为负值, β 为正值.光栅中心到物平面和像平面的距离分别是 r_1, r_2 ^[5].平面 1 垂直于入射主光线;平面 2 与光栅曲面相切;平面 3 垂直于衍射主光线,这三个平面都包含光栅中心.

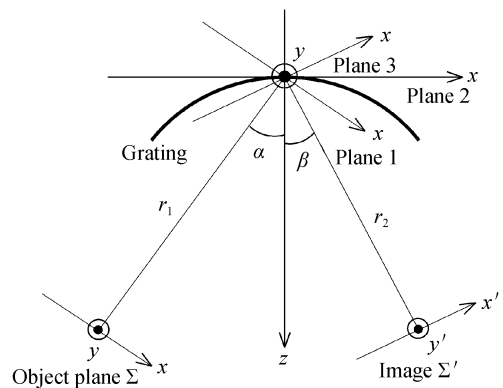


图 1 光栅光学系统

Fig. 1 The optical scheme of a grating

* 国家自然科学基金(60578040)资助

Tel: 029-88204271 Email: jerrywang@graduate.shu.edu.cn

收稿日期: 2007-06-15

从物平面到像平面的李变换可以表示成五个变换的乘积: 1)表示光线从物平面传到平面 1 的李变换 M_{r_1} ^[2]; 2)表示光线坐标从平面 1 坐标系转换到平面 2 坐标系的李变换 M_a ^[2]; 3)表示光线在平面 2 坐标系内光栅衍射的李变换 M_G ; 4)表示光线坐标从平面 2 坐标系转换到平面 3 坐标系的李变换 M_β ^[2]; 5)表示光线从平面 3 传到像平面的李变换 M_{r_2} ^[2].

3 成像公式

根据前文中的五个李变换,可以得到超环面光栅的成像公式.由李变换得到的子午和弧矢方向的聚焦条件,与波相差理论中的聚焦条件相一致^[3].

在光栅光谱仪设计中,子午聚焦平面上的像差分析十分重要.在子午聚焦条件下,像平面坐标展开到三阶为

$$x' = M_x x + B_{1010}^* x p + B_{0200}^* y^2 + B_{0101}^* y q + B_{0020}^* p^2 + B_{0002}^* q^2 + B_{0210}^* y^2 p + B_{0111}^* y p q + B_{0030}^* p^3 + B_{0012}^* p q^2 \quad (2)$$

$$y' = M_y y + W_q q + C_{0110}^* y p + C_{0011}^* p q + C_{1100}^* x y + C_{1001}^* x q + C_{0300}^* y^3 + C_{0003}^* q^3 + C_{0201}^* y^2 q + C_{0120}^* y p^2 + C_{0021}^* p^2 q + C_{0102}^* y q^2 \quad (3)$$

在式(2)和(3)中,所有系数由李变换展开得到,一阶系数 M_x, M_y 代表了放大率.在 x, y, p, q 所组成的二次方项和三次方项中,只包含 p, q 的项前面的系数表示轴上点的像差,其余的则为轴外点的像差.

4 应用李变换描绘光学系统的成像

利用成像式(2)和(3),可以求出光源点发出的光线经过光学系统后在像平面上的分布(光线点列图).光学系统(超环面镜)参量为:物距 $r_1 = 200$ cm,子午焦距 $r'_m = 100$ cm,入射角 α /反射角 $\beta = 86^\circ$,主半径 $R = 1\ 911.4$ cm,次半径 $\rho = 9.3$ cm.

光线追迹软件可以得到光学系统成像的精确数值计算结果,以此作为标准来检验李变换所得结果的准确性.根据李变换得到的成像公式所作的图,与应用光线追迹软件 Shadow 所得结果进行比较.Shadow 追迹程序是严格遵循光线传播的几何理论,依靠它可以得到与实际光学系统几乎一致的成像结果.

从图 2(a)、(b)、(d)、(e)可以看出,无论像平面是否在子午方向的焦点上,李变换成像公式能够准确描绘该光学系统的成像.对于离轴的情况图 2(c)、(f)成像公式与 Shadow 的结果也符合的很好.

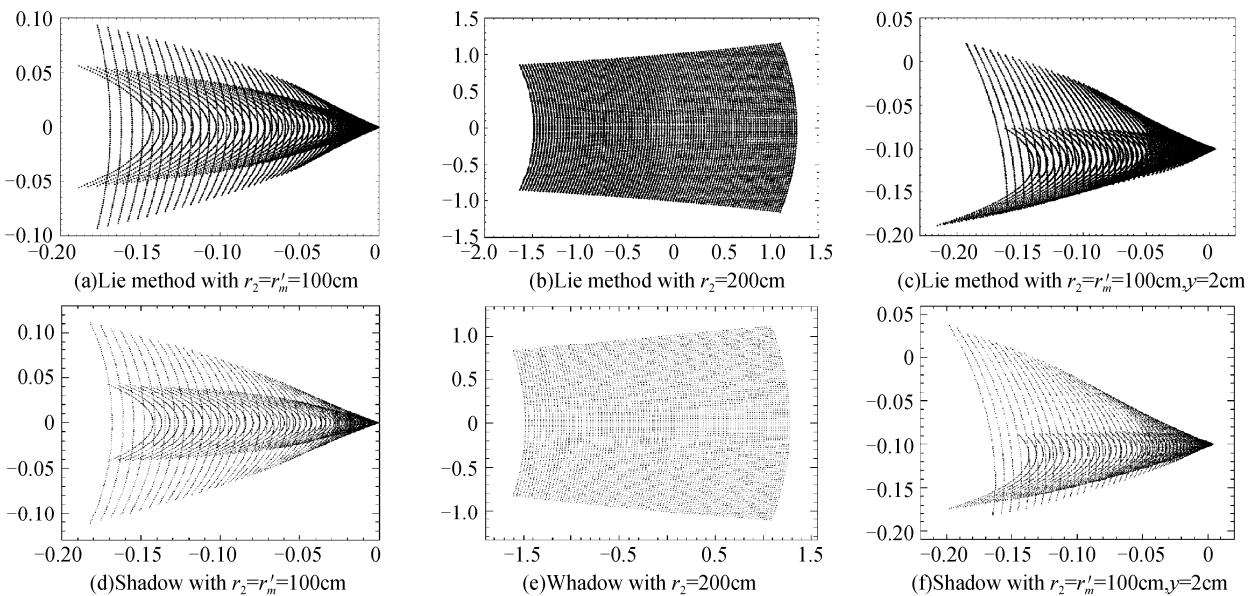


图 2 不同像距下,由光线追迹所得的点列图
Fig. 2 Spot diagrams by tracking rays with different f_2

5 结论

应用李变换的方法来研究超环面光栅的成像,把光栅成像分解成五个单一过程的李变换;利用这五个李变换可得出光栅的成像公式及其像差.应用光线追迹软件得到了光学系统成像的精确数值计算结果,以此对李变换方法所得结果进行验证,表明李

变换方法是正确的.与目前常用的光栅像差理论相比,李变换的方法有一定的优势:1)在李变换中不出现光瞳坐标.在处理多元件光学系统时,就不必定义每个元件的光瞳坐标,不需要考虑如何将这些坐标统一起来.同时该方法能转换成矩阵形式,更有利于多元件的像差表达.2)李变换的方法从一开始就考虑物是二维的,可以得到二维轴外点成像.李变换的

方法可以得到远离焦平面处的像差表达式. 目前 Chrisp 波像差理论只能导出像平面在焦点附近的像差公式.

李变换方法导出的成像公式描述了像平面坐标与物平面坐标、方向余弦之间的函数关系, 公式中并没有出现如光栅表面坐标之类的中间变量, 体现了物空间变量与像空间对应变量之间的映射关系.

参考文献

- [1] DRAGT A J. Lie algebraic theory of geometrical optics and optical aberrations[J]. *JOSA*, 1982, **72**(3):372-379.
- [2] GOTO K, KUROSAKI T. Canonical formulation for the geometrical optics of concave gratings[J]. *JOSA*, 1993, **10**(3):451-465.
- [3] PALMER C A, MCKINNEY W R, WHEELER B S. Imaging equations for spectroscopic systems using Lie transformations: I. theoretical foundations[C]. *SPIE*, 1998, **3450**:55-66.
- [4] DRAGT A J, FINN J. Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps[J]. *J Math Phy*, 1976, **17**(12):2215-2225.
- [5] WANG Jie. Analytic expression of diffraction fringe of varied-line-space plane gratings[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(1):124-127.
- 王劼. 平面变线距光栅衍射场的解析表达式[J]. *光子学报*, 2003, **32**(1):124-127.

Imaging Equations for Toroidal Gratings Using Lie Transformations

WANG Jie-wei¹, WU Wei¹, HE Zheng-quan², LU Li-jun³

(1 College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

(2 Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics of Chinese Academy of Science, Xi'an 710119, China)

(3 School of Mechatronics Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Received date: 2007-06-15

Abstract: The Lie method to characterize imaging of a toroidal grating was presented. A brief introduction of Lie method was given. There are the five transformations to describe the imaging processes of a toroidal grating. The formulae for calculation of the coordinate and direction of light ray were obtained with the above Lie transformation, and its numerical results were compared with those by raytracing program of Shadow. An advantage of the Lie theory of optical imaging was that the pupil (aperture) coordinates did not appear in the Lie theory. The phase space variables x and y in the Lie theory provided for the extent of the object. The image equations show that the direction relationship between variables of the object space coordinate system and those of the image space coordinate system.

Key words: Lie optics; Toroidal grating; Imaging; Theory



WANG Jie-wei was born in 1981 and is a postgraduate student at Shanghai University. His research interests focus on aberration theory and Lie optics.