

一种新的基于偏微分方程的图像修复

廉晓丽¹, 徐中宇¹, 冯丽丽¹, 晁玉忠²

(1. 长春工业大学计算机科学与工程学院, 长春 130012; 2. 武汉理工大学计算机科学与技术学院, 武汉 430063)

摘要: 图像的修复是图像处理中一个重要的部分, 主要是利用一定的方法针对产生划痕和有缺损的图像进行修复, 或者从图像中去除指定的物体和文字, 以达到特定的目的。该文比较了 CDD 图像修复模型和快速图像修复模型的性能。它们都满足“连接整体性准则”, 对于具有较大破损区域及细小边缘的图像具有良好的修复能力。但是前者修复速度较慢, 而后者可以克服 CDD 修复速度较慢的缺点。实验结果表明, 该模型在保证与 CDD 模型相近修复质量的情况下可以大幅度地提高修复速度。

关键词: 图像修复; 偏微分方程; TV 模型; CDD 模型; 连接整体性准则

Novel Image Inpainting Based on Partial Differential Equation

LIAN Xiao-li¹, XU Zhong-yu¹, FENG Li-li¹, CHAO Yu-zhong²

(1. College of Computer Science & Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130012;

2. College of Computer Science & Technology, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063)

【Abstract】 Image inpainting is an important part of image processing. It is mainly used to restore the damaged image with some algorithms to attain to special goals, through the restoration of damaged painting with cracks and scratches to the removal or replacement of objects or word. This paper puts emphasis on comparing CDD model with fast inpainting model based on the Curvature Driven Diffusions(CDD). They all realize the connectivity and holistic principle, and have good ability for inpainting the large domain and minute edges, but the former inpainting speed is quite slow, the latter can overcome the shortcoming of slow speed. Experiment demonstrates this fast inpainting model can greatly advance the speed in inpainting, provided with the same quality of QCDD model.

【Key words】 image inpainting; Partial Differential Equation(PDE); Total Variation(TV) model; Curvature-Driven Diffusions(CDD) model; connectivity and holistic principle

1 概述

数字图像处理是研究“图像信息的获取、传输、存储、变换、显示、理解与综合利用的”一门崭新的学科^[1]。根据抽象的程度不同, 数字图像处理可以分为 3 个层次: 狭义图像处理, 图像分析和图像理解。

图像修复技术^[2]针对图像中遗失或者损坏的部分, 利用未被损坏的图像信息, 按照一定的规则填补, 使填补后的图像接近或达到原图的视觉效果。

图像修复可以有效地数字化恢复损坏的艺术作品, 并去除图像中的文字或者其他不可期望的物体; 也可以用于视频点播, 对网络中丢弃或者损坏的视频信息进行修复以改善观看质量。

图像修复主要利用一些算法针对产生划痕和有缺陷有破损的图像进行修复, 或者从图像中去除文字和制定物体的方法, 以达到指定的目的。

2 CDD 模型

2.1 模型综述

TV 模型^[3]图像修复方法是 Rudin, Osher, Fatemi 的著名修复模型的封闭变换。该模型在修复中可保持尖锐的边缘并且数值实现简单, 但是 TV 修复模型和其他的基于分割的修复模型有个共同的缺点, 不能满足“连接完整性准则”, 即当破损区域大于待修复物体宽度时不能完成修复。

针对这个问题, Chan, Shen 又提出了基于曲率驱动(Curvature Driven Diffusions, CDD)修复模型^[4], 此模型在 TV

模型的基础上引入了曲率项, 其传导系数取决于等照线度的曲率, 从而使得“连接整体性准则”得以满足, 所以此模型具备了修复较大的破损区域及细小边缘的能力。

曲率驱动扩散模型是基于曲率驱动扩散的一种新的数字偏微分方程模型^[5], 是由整体变分模型激发产生的。在 TV 模型中, 扩散是沿垂直等照度线方向或者其反方向进行的, 而扩散的强度反映在传导系数上:

$$\hat{D} = \frac{1}{|\nabla u|} \quad (1)$$

因此, 扩散的方向并不是沿着等照线的几何信息方向。对于平面的曲线, 其包含的几何信息是用纯量曲率 k 来表示的。曲率大的地方一般扩散强度也大^[6]; 曲率小的地方扩散强度也小, 因此这个模型克服了上面的 2 个缺点, 使之处于整体稳定性, 如果图像没有达到稳定状态则再一次继续演化图像, 所以 CDD 模型可以表示为如图 1 所示。

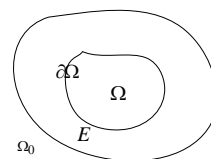


图 1 受损区域

作者简介: 廉晓丽(1983 -), 女, 硕士, 主研方向: 图形图像处理; 徐中宇, 副教授; 冯丽丽、晁玉忠, 硕士

收稿日期: 2008-06-18 **E-mail:** lianxiaoli601@163.com

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{g(|k|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] & x \in D \\ u = u^0 & x \in E \end{cases} \quad (2)$$

其中, D 为破损区域; E 为破损区域周围完好的区域; Ω 为整个区域。一般来说, 图像修复的同时也会要求去噪, 因此, 可以利用 TV 的去噪模型^[2-3]。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda(u - u_0) \quad x \in E \quad (3)$$

将 2 个方程合起来, 得到修复和去噪的方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{G(x, |k|)}{|\nabla u|} \right] + \lambda_c(u - u_0) \quad x \in E \cup D \quad (4)$$

该模型在对破损区域 D 修复的同时, 可以对完好区域 E 进行去噪。现在只考虑修复不考虑去噪, 所以主要用到式(2)中的第 1 个式子

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{g(k)}{|\nabla u|} \nabla u \right] \quad (5)$$

简写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \varphi, \quad \varphi = \frac{g(|k|)}{|\nabla u|} \nabla u = \hat{D} \nabla u$$

根据迭代方程: $u^{n+1} = u^n + \Delta t \nabla \cdot \varphi^n$, 其中, Δt 是迭代时间步长, 也可以看作是扩散的程度; n 表示迭代的次数。

CDD 是 3 阶的偏微分方程^[7], 可以采用半点中心差分法求解。对于目标像素点 (i, j) , 假设

$$\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) = (\hat{D}u_x, \hat{D}u_y)_{(i, j)}$$

则

$$\nabla \cdot \varphi = \frac{\varphi^1_{(i+\frac{1}{2}, j)} - \varphi^1_{(i-\frac{1}{2}, j)}}{h} + \frac{\varphi^2_{(i, j+\frac{1}{2})} - \varphi^2_{(i, j-\frac{1}{2})}}{h} \quad (6)$$

因此, 需要用到中间点的梯度和曲率^[7], 这些点为 $(i+k, j+1)$ 。其中, $kl=0, |k|+|l|=1/2$ 。

对于属于破损区的每个像素点, 按照式(5)迭代, 根据所用的半点中心差分法可知将会利用到破损区外部的有用的信息, 因此符合外部信息向内部扩散的复原原理。

2.2 实验结果

在本文中破损的区域都是假设已知的。一般可以采用二值图像作为破损的模版图像, 破损区域标记为白色, 像素标志位 flag 记为 1, 完好区域标记为黑色, 像素标志位 flag 记为 0。该模版图像可以事先指定, 也可以根据所要修复的图像标记为待修复区域而形成模版。迭代算法只是针对破损区域, 算法的执行如下:

- (1) 读入原来的破损图像和模版图像;
- (2) 对于破损区域的每个像素点计算出 ∇u 和 k 转入(3);
- (3) 计算出 $\nabla \varphi$, 然后乘以 ∇t 加上上一次迭代的图像, 转入(4);

(4) 如果迭代后的图像和上次迭代的图像之差小于给定的阈值, 迭代结束, 输出修复后的图像, 否则转入(2)进行新的迭代。

3 CDD 模型的改进 QCDD 模型

3.1 QCDD 原理

对 CDD 模型的修复速度进行分析: 一般在破损区域的边缘处有较大的梯度, 然而在破损边缘的角点处有较大的曲率。由于 CDD 模型的传导系数为 $\frac{g(|k|)}{|\nabla u|}$, 即当曲率越大时扩散越大, 而梯度越大时扩散越小。这样在角点处其曲率与梯度

对扩散的影响相互抵消, 而在其边缘点处由于曲率基本为 0, 扩散也基本为 0, 因此就导致了 CDD 修复模型比较缓慢。

综合上述 CDD 模型在保证“连接整体性准则”和修复速度方面的分析, 可以得出如下的结论:

(1) 通过在扩散中引入等照度线的几何信息——曲率, 可以使得“连接整体性准则”得以满足。

(2) 在扩散中曲率与梯度值的综合作用结果导致扩散速度很慢。由于 CDD 在 TV 模型的基础上加入了曲率项得到, 因此影响其扩散速度的项继承了 TV 模型。

由上述结论可以看出, CDD 建立在 TV 的基础上对上述两方面并未得到任何效果, 反而降低了修复速度。这样可以绕过 TV 模型, 引出本文的快速 CDD 修复模型(QCDD), 其形式如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (g(|k|) \nabla u) \quad (7)$$

其中, $g(s)$ 为 s 的增函数:

$$g(s) = \begin{cases} 0 & s = 0 \\ \infty & s = \infty \\ 0 \text{到} \infty \text{的中间值} & 0 < s < \infty \end{cases} \quad (8)$$

通常取 $g(s) = s^p, s > 0, p > 1$ 。

不同于 CDD 模型, QCDD 直接建立在热扩散的基础上, 其传导系数为 $g(|k|)$, 此时其扩散强度仅依赖于等照线的几何信息——曲率。由结论(1)可看出, 该模型满足“连接整体性准则”。由结论(2)可看出, 由于 QCDD 模型建立在热扩散的基础上, 去除了梯度值对扩散速度的负面影响, 因此其修复速度必然会加快。

3.2 数值实现方法

采用时间步进法求解。令 $v = (v^1, v^2) = g(|k|) \nabla u$, 则迭代形式如下:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \nabla \cdot v^{(n)} \quad (9)$$

其中, Δt 为时间步长; $u^{(n)}$ 表示待修复点在 $n\Delta t$ 时刻的值。散度形式是 3 阶 PDE, 对于散度算子采用半点中心差分法实现。令修复点 E, N, W, S 为 O 的 4 邻域点, e, n, w, s 分别为对应的 4 邻域半点。此时 $\nabla \cdot v_0$ 可被离散化为

$$\nabla \cdot v_0 = \frac{v_e^1 - v_w^1}{h} - \frac{v_n^2 - v_s^2}{h} \quad (10)$$

其中, h 为网格大小, 通常令 $h=1$ 。由于 e, n, w, s 为半点, 因此其值不能从图像中直接得到, 下面以 e 点为例, 令

$$\nabla u_e = (\nabla u_e^1, \nabla u_e^2):$$

$$v_e^1 = g(|k_e|) \nabla u_e^1 \quad (11)$$

$$\nabla u_e = (\nabla u_e^1, \nabla u_e^2) = \left(\frac{u_E - u_O}{h}, \frac{u_{NE} - u_N - u_{SE} - u_S}{4h} \right) \quad (12)$$

$$k_e = \nabla \cdot \left[\frac{\nabla u_e}{|\nabla u_e|} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nabla u_e^1}{|\nabla u_e|} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nabla u_e^2}{|\nabla u_e|} \right] \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\nabla u_e^2}{|\nabla u|} \right] = \left(\frac{\nabla u_{NE}^2}{|\nabla u_{NE}|} + \frac{\nabla u_N^2}{|\nabla u_N|} - \frac{\nabla u_{SE}^2}{|\nabla u_{SE}|} - \frac{\nabla u_S^2}{|\nabla u_S|} \right) / 4h \quad (14)$$

其中, $\nabla u_N, \nabla u_{NE}, \nabla u_S, \nabla u_{SE}$ 可用通常的中心差分法得到。综合式(11)~式(14)即可求得。由于在数值实现中基本上采用的是散度的离散实现形式, 因此其满足数值计算的保守定律, 实验结果也证明了该算法是稳定的。

4 实验结果

笔者分别适用模拟图像和真实图像进行了实验分析, 并将 CDD 和 QCDD 两种算法在修复效果和修复时间上进行了比较。实验中图像的破损区域由随机噪声初始化, 取时间步

长 $\nabla t = 0.2$, 网格大小 $h=1, p=1$, 迭代停止条件为相邻的连词迭代的图像差异最大值小于 0.01。

图 2 为模拟图像的修复结果, 其中破损区域的宽度大于物体宽度。在这种情况下, TV 模型将选择不连接物体。而由实验结果可以看出, CDD 和本文的 QCDD 模型均选择连接, 即满足“连接整体性准则”, 并且其修复效果基本相同。



图 2 竖条的修复结果比较

图 3 为在真实图像下消除图像中的划痕的修复结果。

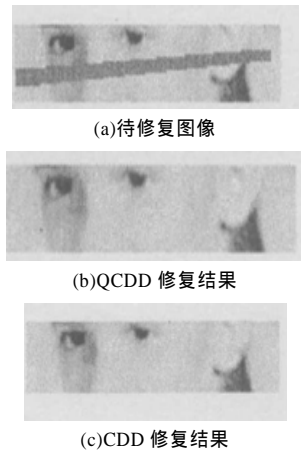


图 3 消除脸部划痕修复结果

要完成这 2 幅图像的修复, CDD 和 QCDD 模型需要迭代次数和修复时间的比较如表 1 所示。

表 1 2 种模型所需迭代次数和修复时间的比较

图像	模型	迭代次数	修复时间/s	修复像素
竖条	CDD	19 980	943	150
	QCDD	824	73	
脸	CDD	47 841	9 876	894
	QCDD	550	119	

由上述实验中 2 种模型在修复效果和修复时间的比较结果可以看出, QCDD 模型同 CDD 模型具有相近的修复效果, 在本文中迭代次数及相应的修复时间要大大低于 CDD 模型。

5 结束语

本文在对 CDD 保持“连接整体性准则”和修复速度分析的基础上, 提出一种新的基于曲率驱动扩散的快速修复模型(QCDD)。实验结果表明该模型同 CDD 一样同属于非纹理修复模型, 由于缺乏图像中的先验性知识及对图像整体结构的分析, 因此该模型的恢复能力有限, 这也是今后的改进方向。

参考文献

- [1] 冈萨里斯. 数字图像处理[M]. 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [2] Perona P, Malik J. Scale Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion[J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 30(12): 629-630.
- [3] 杨 新. 图像偏微分方程的原理与应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2003.
- [4] 邵肖伟, 刘政凯, 宋 璧. 一种基于 TV 模型的自适应图像修复方法[J]. 电路与系统学报, 2004, 10(9): 113-117.
- [5] 陆金甫. 偏微分方程差分方法[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [6] Goldenberg R, Kimmel R, Rudzsky M. Fast Geodesic Active Contour[J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2001, 10(10): 539-540.
- [7] 陈 刚. 基于偏微分方程的图像处理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

编辑 顾逸斐

(上接第 233 页)

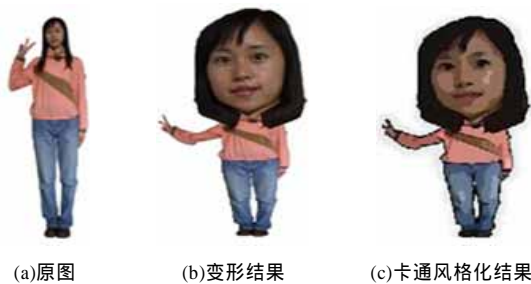


图 9 D 类人物 Q 版渲染结果

3 结束语

本文从分析 Q 版卡通人物的几何特征和视觉特点 2 个方面入手, 总结 Q 版卡通人物的创作规律, 提出基于图像的 Q 版卡通人物计算机辅助生成方法, 借助图形学原理和图像处理方法较好地模拟了这种夸张而自由的艺术形式。该方法需获取预处理人物图像和特征点参数, 然后执行变形和卡通风格化算法生成 Q 版卡通结果。考虑到图像的可视效果, 对附属物进行相应的特殊处理。该方法所需参数较少, 思路简单, 易于控制, 且符合绘画基本规范, 所得结果接近于手绘效果, 适合于非艺术专业人员操作以及数字娱乐等领域的应用。

当然, 由于在该方法中映射变换采用的是线性函数, 下

颞以上的脖子部分会在局部变形中被放大, 因此可采用非线性或线性与非线性相结合的函数代替进行坐标映射, 以得到更理想的效果。下一步工作将运用人脸识别技术自动生成面部特征点, 并开发抛物样条的优化算法, 从而使头部变形能更加满足 Q 版卡通的变形要求。

参考文献

- [1] 李 晶, 廖欢欢. Photoshop 卡通漫画设计专业教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [2] Holger W. Real-time Video Abstraction[C]//Proc. of ACM SIGGRAPH. [S. l.]: ACM Press, 2006.
- [3] Brennan S E. Caricature Generator[D]. Cambridge, MA, USA: Massachusetts Institute of Technology, 1982.
- [4] Gooch B, Reinhard E, Gooch A. Human Facial Illustrations: Creation and Psychophysical Evaluation[J]. ACM Trans. on Graph, 2004, 23(1): 27-44.
- [5] 陈 洪, 郑南宁, 徐迎庆. 基于样本学习的人像线条画生成系统[J]. 软件学报, 2003, 14(3): 202-208.
- [6] Cootes T F, Taylor C J, Graham J. Active Shape Models Training and Application[J]. Computer Vision and Image Understanding, 1995, 61(1): 38-59.
- [7] 陈元琰, 张晓竟. 计算机图形学实用技术[M]. 北京: 科学出版社, 2000.

编辑 陈 文