第十六讲 Green函数（二）

北京大学 物理学院
数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
   - 分离变量法
   - 电像法
2. 含时问题的Green函数
   - 提法：定解问题
   - 对称性
   - 含时问题的Green函数解法
   - Green函数的求法

讲授要点

1. 圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
   - 分离变量法
   - 电像法
2. 含时问题的Green函数
   - 提法：定解问题
   - 对称性
   - 含时问题的Green函数解法
   - Green函数的求法

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§20.4 — 20.6
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§12.2, 12.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§14.3, 14.4, 14.6

圆内Poisson方程第一边值问题Green函数

$$\nabla_2^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad |\boldsymbol{r}|<a,\ |\boldsymbol{r}'|<a$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{r=a} = 0$$

其中

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

圆内Poisson方程第一边值问题Green函数

$$\nabla_2^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad |\boldsymbol{r}|<a,\ |\boldsymbol{r}'|<a$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{r=a} = 0$$

其中

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

讲授要点

1. 圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
   - 分离变量法
   - 电像法
2. 含时问题的Green函数
   - 提法：定解问题
   - 对称性
   - 含时问题的Green函数解法
   - Green函数的求法

标准的做法是：考虑到方程是一个非齐次方程，所以将Green函数按相应齐次问题本征函数展开

采用平面极坐标系，坐标原点放在圆心

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = R_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[R_{m1}(r)\cos m\phi + R_{m2}(r)\sin m\phi\right]$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{r'}\delta(r-r')$$
$$\times\left\{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\cos m\phi\cos m\phi' + \sin m\phi\sin m\phi'\right]\right\}$$

标准的做法是：考虑到方程是一个非齐次方程，所以将Green函数按相应齐次问题本征函数展开
采用平面极坐标系，坐标原点放在圆心

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = R_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[R_{m1}(r)\cos m\phi + R_{m2}(r)\sin m\phi\right]$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{r'}\delta(r-r') \times \left\{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\cos m\phi\cos m\phi' + \sin m\phi\sin m\phi'\right]\right\}$$

标准的做法是：考虑到方程是一个非齐次方程，所以将Green函数按相应齐次问题本征函数展开

采用平面极坐标系，坐标原点放在圆心

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = R_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[R_{m1}(r)\cos m\phi + R_{m2}(r)\sin m\phi\right]$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{r'}\delta(r-r') \times \left\{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\cos m\phi\cos m\phi' + \sin m\phi\sin m\phi'\right]\right\}$$

标准的做法是：考虑到方程是一个非齐次方程，所以将Green函数按相应齐次问题本征函数展开

采用平面极坐标系，坐标原点放在圆心

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = R_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[R_{m1}(r)\cos m\phi + R_{m2}(r)\sin m\phi\right]$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{r'}\delta(r-r') \times \left\{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\cos m\phi\cos m\phi' + \sin m\phi\sin m\phi'\right]\right\}$$

决定$R_0(r)$的常微分方程定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R_0(r)}{\mathrm{d}r}\right] = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\delta(r-r')$$

$R_0(0)$有界 $\qquad R_0(a) = 0$

$$R_0(r) = \begin{cases} A_0, & r < r', \\ B_0 \ln\dfrac{r}{a}, & r > r' \end{cases}$$

决定$R_0(r)$的常微分方程定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R_0(r)}{\mathrm{d}r}\right]=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\delta(r-r')$$

$R_0(0)$有界 $\qquad R_0(a)=0$

$$R_0(r)=\begin{cases}A_0, & r<r',\\ B_0\ln\dfrac{r}{a}, & r>r'\end{cases}$$

决定$R_0(r)$的常微分方程定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R_0(r)}{\mathrm{d}r}\right]=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\delta(r-r')$$

$R_0(0)$有界 $\qquad R_0(a)=0$

$$R_0(r)=\begin{cases}A_0, & r<r',\\ B_0\ln\dfrac{r}{a}, & r>r'\end{cases}$$

$$R_0(r)\Big|_{r'-0}^{r'+0}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}R_0(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_{r'-0}^{r'+0}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}$$

决定$R_0(r)$的常微分方程定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R_0(r)}{\mathrm{d}r}\right]=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\delta(r-r')$$

$R_0(0)$有界 $\qquad R_0(a)=0$

$$R_0(r)=\begin{cases}A_0, & r<r',\\ B_0\ln\dfrac{r}{a}, & r>r'\end{cases}$$

$$A_0=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r'}{a}\qquad B_0=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}$$

决定$R_0(r)$的常微分方程定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R_0(r)}{\mathrm{d}r}\right] = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\delta(r-r')$$

$R_0(0)$有界 $\qquad R_0(a) = 0$

$$R_0(r) = \begin{cases} A_0, & r < r', \\ B_0 \ln\dfrac{r}{a}, & r > r' \end{cases}$$

$$R_0(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r'}{a} & r < r' \\ -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{a} & r > r' \end{cases}$$

决定$R_{m1}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m1}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\cos m\phi'$$

$R_{m1}(0)$有界 $\qquad R_{m1}(a)=0$

$$R_{m1}(r)=\begin{cases}A_{m1}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r'\\ B_{m1}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r'\end{cases}$$

决定$R_{m1}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m1}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\cos m\phi'$$

$R_{m1}(0)$有界　　$R_{m1}(a)=0$

$$R_{m1}(r)=\begin{cases} A_{m1}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r' \\ B_{m1}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r' \end{cases}$$

决定$R_{m1}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m1}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\cos m\phi'$$

$R_{m1}(0)$有界 $\qquad R_{m1}(a)=0$

$$R_{m1}(r)=\begin{cases}A_{m1}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r'\\ B_{m1}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r'\end{cases}$$

$$R_{m1}(r)\Big|_{r'-0}^{r'+0}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}R_{m1}(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_{r'-0}^{r'+0}=-\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\cos m\phi'$$

决定$R_{m1}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m1}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\cos m\phi'$$

$R_{m1}(0)$有界 $\qquad R_{m1}(a)=0$

$$R_{m1}(r)=\begin{cases}A_{m1}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r'\\ B_{m1}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r'\end{cases}$$

$$A_{m1}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{r'}{a}\right)^m-\left(\frac{a}{r'}\right)^m\right]\cos m\phi'$$

$$B_{m1}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m}\left(\frac{r'}{a}\right)^m\cos m\phi'$$

决定$R_{m1}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m1}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\cos m\phi'$$

$R_{m1}(0)$有界 $\qquad R_{m1}(a)=0$

$$R_{m1}(r)=\begin{cases} A_{m1}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r' \\ B_{m1}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r' \end{cases}$$

$$R_{m1}(r)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{m}\left[\left(\dfrac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\dfrac{r}{r'}\right)^m\right]\cos m\phi' & r<r' \\ -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{m}\left[\left(\dfrac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\dfrac{r'}{r}\right)^m\right]\cos m\phi' & r>r' \end{cases}$$

决定$R_{m2}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m2}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\sin m\phi'$$

$R_{m2}(0)$有界 $\qquad R_{m2}(a)=0$

$$R_{m2}(r)=\begin{cases}A_{m2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r'\\ B_{m2}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r'\end{cases}$$

决定$R_{m2}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m2}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\sin m\phi'$$

$$R_{m2}(0)\text{有界}\qquad R_{m2}(a)=0$$

$$R_{m2}(r)=\begin{cases}A_{m2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r'\\ B_{m2}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r'\end{cases}$$

决定$R_{m2}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m2}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\sin m\phi'$$

$R_{m2}(0)$有界 $\qquad R_{m2}(a)=0$

$$R_{m2}(r)=\begin{cases}A_{m2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r'\\ B_{m2}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r'\end{cases}$$

$$R_{m2}(r)\Big|_{r'-0}^{r'+0}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}R_{m2}(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_{r'-0}^{r'+0}=-\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\sin m\phi'$$

决定$R_{m2}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m2}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\sin m\phi'$$

$$R_{m2}(0)\text{有界}\qquad R_{m2}(a)=0$$

$$R_{m2}(r)=\begin{cases}A_{m2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r'\\ B_{m2}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r'\end{cases}$$

$$A_{m2}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{r'}{a}\right)^m-\left(\frac{a}{r'}\right)^m\right]\sin m\phi'$$

$$B_{m2}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m}\left(\frac{r'}{a}\right)^m\sin m\phi'$$

决定$R_{m2}(r)$的常微分方程定解问题

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m2}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\sin m\phi'$$

$R_{m2}(0)$有界 $\qquad R_{m2}(a)=0$

$$R_{m2}(r)=\begin{cases}A_{m2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m & r<r'\\ B_{m2}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^m-\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right] & r>r'\end{cases}$$

$$R_{m2}(r)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{m}\left[\left(\dfrac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\dfrac{r}{r'}\right)^m\right]\sin m\phi' & r<r'\\ -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{m}\left[\left(\dfrac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\dfrac{r'}{r}\right)^m\right]\sin m\phi' & r>r'\end{cases}$$

圆内Poisson方程第一边值问题Green函数

$$\nabla_2^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad |\boldsymbol{r}|<a,\ |\boldsymbol{r}'|<a$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{r=a} = 0$$

当$r<r'$时

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\frac{r'}{a}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\frac{r}{r'}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi')\right\}$$

当$r>r'$时

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\frac{r}{a}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\frac{r'}{r}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi')\right\}$$

圆内Poisson方程第一边值问题Green函数

$$\nabla_2^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad |\boldsymbol{r}|<a,\ |\boldsymbol{r}'|<a$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{r=a} = 0$$

当$r<r'$时

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\frac{r'}{a} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^m - \left(\frac{r}{r'}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi')\right\}$$

当$r>r'$时

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\frac{r}{a} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^m - \left(\frac{r'}{r}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi')\right\}$$

圆内Poisson方程第一边值问题Green函数

$$\nabla_2^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad |\boldsymbol{r}|<a,\ |\boldsymbol{r}'|<a$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{r=a} = 0$$

当$r<r'$时

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\frac{r'}{a}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\frac{r}{r'}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi')\right\}$$

当$r>r'$时

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\frac{r}{a}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\frac{r'}{r}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi')\right\}$$

评述

- 这种方法，将Green函数按相应齐次问题的本征函数展开，一般说来，得到的解式会是无穷级数
- 当然，不排除在某些特殊情形下可以将级数求和
- 例如，现在得到的解式就是如此
- 不过，这需要比较熟悉级数求和的技巧

评述

- 这种方法，将Green函数按相应齐次问题的本征函数展开，一般说来，得到的解式会是无穷级数
- 当然，不排除在某些特殊情形下可以将级数求和
- 例如，现在得到的解式就是如此
- 不过，这需要比较熟悉级数求和的技巧

评述

- 这种方法，将Green函数按相应齐次问题的本征函数展开，一般说来，得到的解式会是无穷级数
- 当然，不排除在某些特殊情形下可以将级数求和
- 例如，现在得到的解式就是如此
- 不过，这需要比较熟悉级数求和的技巧

评述

- 这种方法，将Green函数按相应齐次问题的本征函数展开，一般说来，得到的解式会是无穷级数
- 当然，不排除在某些特殊情形下可以将级数求和
- 例如，现在得到的解式就是如此
- 不过，这需要比较熟悉级数求和的技巧

讲授要点

1. 圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
   - 分离变量法
   - 电像法
2. 含时问题的Green函数
   - 提法：定解问题
   - 对称性
   - 含时问题的Green函数解法
   - Green函数的求法

电像法

再介绍一种方法，它将直接给出解的有限形式

- 大家知道，一旦在接地圆中放上点电荷后，在圆周上必然出现感生电荷
- 圆内任意一点的电势，就是点电荷的电势和感生电荷的电势的叠加
- 前者在点电荷所在点是对数发散的，而后者在圆内是处处连续的
- 如果能够方便地求出感生电荷在圆内所产生的电势，当然也就求出了整个圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数

电像法

再介绍一种方法，它将直接给出解的有限形式

- 大家知道，一旦在接地圆中放上点电荷后，在圆周上必然出现感生电荷
- 圆内任意一点的电势，就是点电荷的电势和感生电荷的电势的叠加
- 前者在点电荷所在点是对数发散的，而后者在圆内是处处连续的
- 如果能够方便地求出感生电荷在圆内所产生的电势，当然也就求出了整个圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数

电像法

再介绍一种方法，它将直接给出解的有限形式

- 大家知道，一旦在接地圆中放上点电荷后，在圆周上必然出现感生电荷
- 圆内任意一点的电势，就是点电荷的电势和感生电荷的电势的叠加
- 前者在点电荷所在点是对数发散的，而后者在圆内是处处连续的
- 如果能够方便地求出感生电荷在圆内所产生的电势，当然也就求出了整个圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数

电像法

再介绍一种方法，它将直接给出解的有限形式

- 大家知道，一旦在接地圆中放上点电荷后，在圆周上必然出现感生电荷
- 圆内任意一点的电势，就是点电荷的电势和感生电荷的电势的叠加
- 前者在点电荷所在点是对数发散的，而后者在圆内是处处连续的
- 如果能够方便地求出感生电荷在圆内所产生的电势，当然也就求出了整个圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数

电像法

再介绍一种方法，它将直接给出解的有限形式

- 大家知道，一旦在接地圆中放上点电荷后，在圆周上必然出现感生电荷
- 圆内任意一点的电势，就是点电荷的电势和感生电荷的电势的叠加
- 前者在点电荷所在点是对数发散的，而后者在圆内是处处连续的
- 如果能够方便地求出感生电荷在圆内所产生的电势，当然也就求出了整个圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数

电像法

- 基本思想是将边界上的感生电荷用一个等价的点电荷代替
- 换句话说，就是把接地圆内的点电荷的问题等价地转化为无界空间中的两个点电荷(一个是真实的点电荷，另一个是等价的“虚”电荷)的问题
- 这个“虚”电荷的等价性，就表现在它和圆内的真实的点电荷一起，在圆内能给出和原来问题同样的解

电像法

- 基本思想是将边界上的感生电荷用一个等价的点电荷代替
- 换句话说，就是把接地圆内的点电荷的问题等价地转化为无界空间中的两个点电荷(一个是真实的点电荷，另一个是等价的“虚”电荷)的问题
- 这个“虚”电荷的等价性，就表现在它和圆内的真实的点电荷一起，在圆内能给出和原来问题同样的解

电像法

- 基本思想是将边界上的感生电荷用一个等价的点电荷代替
- 换句话说，就是把接地圆内的点电荷的问题等价地转化为无界空间中的两个点电荷(一个是真实的点电荷，另一个是等价的“虚”电荷)的问题
- 这个“虚”电荷的等价性，就表现在它和圆内的真实的点电荷一起，在圆内能给出和原来问题同样的解

电像法

- 如果能够方便地求出感生电荷在圆内所产生的电势，当然也就求出了整个圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
- 只要圆内的电荷分布不变，只要这两个点电荷也能产生出圆周$r=a$接地(电势为0)的效果，边值问题解的存在唯一性，就能保证这样得到的解和原来问题的解在圆内一定一致
- 可以明确地预见到，这个等价电荷如果存在的话，它一定位于圆外，否则圆内的电荷分布就和原来的问题不同，就不能保证等价性

电像法

- 如果能够方便地求出感生电荷在圆内所产生的电势，当然也就求出了整个圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
- 只要圆内的电荷分布不变，只要这两个点电荷也能产生出圆周$r = a$接地(电势为0)的效果，边值问题解的存在唯一性，就能保证这样得到的解和原来问题的解在圆内一定一致
- 可以明确地预见到，这个等价电荷如果存在的话，它一定位于圆外，否则圆内的电荷分布就和原来的问题不同，就不能保证等价性

电像法

- 如果能够方便地求出感生电荷在圆内所产生的电势，当然也就求出了整个圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
- 只要圆内的电荷分布不变，只要这两个点电荷也能产生出圆周$r=a$接地(电势为0)的效果，边值问题解的存在唯一性，就能保证这样得到的解和原来问题的解在圆内一定一致
- 可以明确地预见到，这个等价电荷如果存在的话，它一定位于圆外，否则圆内的电荷分布就和原来的问题不同，就不能保证等价性

电像法

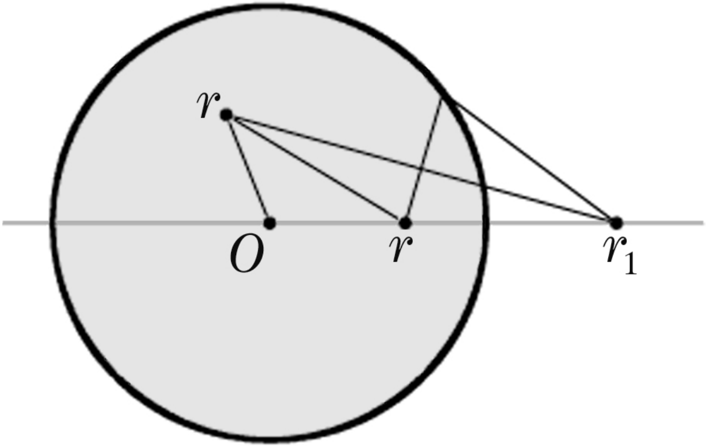
- 或者换一种说法，由于感生电荷的电势在圆内是处处连续的，在圆内的任何等价(点)电荷都不可能产生同样的效果
- 应用电像法成败的关键，就在于能否求出这个等价电荷的电量和它的空间位置．这是这个等价电荷是否存在的集中体现
- 根据对称性的考虑，还可以进一步断定，如果这个等价电荷存在的话，它还一定位于真实电荷所处的半径的延长线上

电像法

- 或者换一种说法，由于感生电荷的电势在圆内是处处连续的，在圆内的任何等价(点)电荷都不可能产生同样的效果
- 应用电像法成败的关键，就在于能否求出这个等价电荷的电量和它的空间位置．这是这个等价电荷是否存在的集中体现
- 根据对称性的考虑，还可以进一步断定，如果这个等价电荷存在的话，它还一定位于真实电荷所处的半径的延长线上

电像法

- 或者换一种说法，由于感生电荷的电势在圆内是处处连续的，在圆内的任何等价(点)电荷都不可能产生同样的效果
- 应用电像法成败的关键，就在于能否求出这个等价电荷的电量和它的空间位置．这是这个等价电荷是否存在的集中体现
- 根据对称性的考虑，还可以进一步断定，如果这个等价电荷存在的话，它还一定位于真实电荷所处的半径的延长线上



电像法示意图

电像法

设等价电荷的位置为$\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$，电量为$e$

它和真实点电荷一起，在圆内的电势就是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| + e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| + C\Big]$$

其中常数C与电势零点的选择有关

现在的问题就是要从要求圆周$r = a$上的电势为0

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| + e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| + C\Big]_{r=a} = 0$$

求出$\boldsymbol{r}_1$, e和C

此式应对圆上所有点均成立

电像法

设等价电荷的位置为$\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$，电量为$e$

它和真实点电荷一起，在圆内的电势就是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| + e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| + C\Big]$$

其中常数C与电势零点的选择有关

现在的问题就是要从要求圆周$r=a$上的电势为0

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| + e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| + C\Big]_{r=a} = 0$$

求出$\boldsymbol{r}_1$, e和C

此式应对圆上所有点均成立

电像法

设等价电荷的位置为$\boldsymbol{r}_1=(x_1, y_1)$，电量为$e$

它和真实点电荷一起，在圆内的电势就是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+C\Big]$$

其中常数C与电势零点的选择有关

现在的问题就是要从要求圆周$r=a$上的电势为0

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+C\Big]_{r=a}=0$$

求出$\boldsymbol{r}_1$, e和C

此式应对圆上所有点均成立

电像法

设等价电荷的位置为$\boldsymbol{r}_1=(x_1, y_1)$，电量为$e$

它和真实点电荷一起，在圆内的电势就是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+C\Big]$$

其中常数C与电势零点的选择有关

现在的问题就是要从要求圆周$r=a$上的电势为0

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+C\Big]_{r=a}=0$$

求出$\boldsymbol{r}_1$, e和C

此式应对圆上所有点均成立

电像法

采用平面极坐标，即令

$$x = r\cos\phi \qquad x' = r'\cos\phi' \qquad x_1 = r_1\cos\phi'$$
$$y = r\sin\phi \qquad y' = r'\sin\phi' \qquad y_1 = r_1\sin\phi'$$

则方程化为

$$\ln\left[a^2 + r'^2 - 2ar'\cos(\phi - \phi')\right] + e\ln\left[a^2 + r_1^2 - 2ar_1\cos(\phi - \phi')\right] + 2C = 0$$

电像法

采用平面极坐标，即令

$$x = r\cos\phi \qquad x' = r'\cos\phi' \qquad x_1 = r_1\cos\phi'$$
$$y = r\sin\phi \qquad y' = r'\sin\phi' \qquad y_1 = r_1\sin\phi'$$

则方程化为

$$\ln\left[a^2 + r'^2 - 2ar'\cos(\phi-\phi')\right] + e\ln\left[a^2 + r_1^2 - 2ar_1\cos(\phi-\phi')\right] + 2C = 0$$

电像法

利用展开式

$$\ln\left[1+t^2-2t\cos\phi\right]=\ln\left[1-te^{i\phi}\right]+\ln\left[1-te^{-i\phi}\right]$$
$$=-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}t^m\cos m\phi,\qquad |t|<1$$

则方程化为

$$2\ln a+\ln\left[1+\left(\frac{r'}{a}\right)^2-2\frac{r'}{a}\cos(\phi-\phi')\right]$$
$$+2e\ln r_1+e\ln\left[1+\left(\frac{a}{r_1}\right)^2-2\frac{a}{r_1}\cos(\phi-\phi')\right]+2C=0$$

电像法

利用展开式

$$
\begin{aligned}
\ln\left[1+t^2-2t\cos\phi\right] &= \ln\left[1-te^{i\phi}\right]+\ln\left[1-te^{-i\phi}\right] \\
&= -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}t^m\cos m\phi, \qquad |t|<1
\end{aligned}
$$

则方程化为

$$
\begin{aligned}
&2\ln a+\ln\left[1+\left(\frac{r'}{a}\right)^2-2\frac{r'}{a}\cos(\phi-\phi')\right] \\
&+2e\ln r_1+e\ln\left[1+\left(\frac{a}{r_1}\right)^2-2\frac{a}{r_1}\cos(\phi-\phi')\right]+2C=0
\end{aligned}
$$

电像法

$$2\ln a + 2e\ln r_1 + 2C - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{r'}{a}\right)^m + e\left(\frac{a}{r_1}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi') = 0$$

于是，就得到

$$\ln a + e\ln r_1 + C = 0$$

$$\left(\frac{r'}{a}\right)^m + e\left(\frac{a}{r_1}\right)^m = 0 \quad m = 1, 2, 3, \cdots$$

所以

$$e = -1 \qquad r_1 = \frac{a^2}{r'} \qquad 和 \qquad C = \ln\frac{a}{r'}$$

电像法

$$2\ln a + 2e\ln r_1 + 2C - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{r'}{a}\right)^m + e\left(\frac{a}{r_1}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi') = 0$$

于是，就得到

$$\ln a + e\ln r_1 + C = 0$$

$$\left(\frac{r'}{a}\right)^m + e\left(\frac{a}{r_1}\right)^m = 0 \quad m = 1, 2, 3, \cdots$$

所以

$$e = -1 \qquad r_1 = \frac{a^2}{r'} \qquad 和 \qquad C = \ln\frac{a}{r'}$$

电像法

$$2\ln a + 2e\ln r_1 + 2C - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{r'}{a}\right)^m + e\left(\frac{a}{r_1}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi') = 0$$

于是，就得到

$$\ln a + e\ln r_1 + C = 0$$

$$\left(\frac{r'}{a}\right)^m + e\left(\frac{a}{r_1}\right)^m = 0 \quad m = 1, 2, 3, \cdots$$

所以

$$e = -1 \qquad r_1 = \frac{a^2}{r'} \qquad \text{和} \qquad C = \ln\frac{a}{r'}$$

电像法

$$e=-1 \qquad r_1=\frac{a^2}{r'} \qquad 和 \qquad C=\ln\frac{a}{r'}$$

- 我们的确求出了这个等价电荷，它位于真实电荷所在半径的延长线上，并且满足$r'r_1=a^2$
- 凡是满足这个关系的两个点，均称为关于圆$r=a$的反演点对
- 上述结果说明，等价电荷和真实电荷构成对于圆$r=a$的反演点对，它们的电量相等，极性相反

电像法

$$e=-1 \qquad r_1=\frac{a^2}{r'} \qquad \text{和} \qquad C=\ln\frac{a}{r'}$$

- 我们的确求出了这个等价电荷，它位于真实电荷所在半径的延长线上，并且满足$r'r_1=a^2$
- 凡是满足这个关系的两个点，均称为关于圆$r=a$的反演点对
- 上述结果说明，等价电荷和真实电荷构成对于圆$r=a$的反演点对，它们的电量相等，极性相反

电像法

$$e=-1 \qquad r_1=\frac{a^2}{r'} \qquad \text{和} \qquad C=\ln\frac{a}{r'}$$

- 我们的确求出了这个等价电荷，它位于真实电荷所在半径的延长线上，并且满足$r'r_1=a^2$
- 凡是满足这个关系的两个点，均称为关于圆$r=a$的反演点对
- 上述结果说明，等价电荷和真实电荷构成对于圆$r=a$的反演点对，它们的电量相等，极性相反

电像法

$$e=-1 \qquad r_1=\frac{a^2}{r'} \qquad \text{和} \qquad C=\ln\frac{a}{r'}$$

- 我们的确求出了这个等价电荷，它位于真实电荷所在半径的延长线上，并且满足$r'r_1=a^2$
- 凡是满足这个关系的两个点，均称为关于圆$r=a$的反演点对
- 上述结果说明，等价电荷和真实电荷构成对于圆$r=a$的反演点对，它们的电量相等，极性相反

电像法

$$e = -1 \qquad r_1 = \frac{a^2}{r'} \qquad 和 \qquad C = \ln\frac{a}{r'}$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg\{\ln\left[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\phi-\phi')\right] - \ln\left[r^2 + \left(\frac{a^2}{r'}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{r'}\cos(\phi-\phi')\right] + 2\ln\frac{a}{r'}\Bigg\}$$

讲授要点

1. 圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
   - 分离变量法
   - 电像法
2. 含时问题的Green函数
   - 提法：定解问题
   - 对称性
   - 含时问题的Green函数解法
   - Green函数的求法

以波动方程为例

凡为了确定起见，讨论有界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = \mu(t) \qquad u(x,t)\Big|_{x=l} = \nu(t) \qquad t>0$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0<x<l$$

以波动方程为例

凡为了确定起见，讨论有界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = \mu(t) \qquad u(x,t)\Big|_{x=l} = \nu(t) \qquad t>0$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0<x<l$$

以波动方程为例

凡为了确定起见，讨论有界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = \mu(t) \qquad u(x,t)\Big|_{x=l} = \nu(t) \qquad t>0$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0<x<l$$

定解问题

相应的Green函数$G(x,t;x',t')$应该是瞬时(仅存在于某一时刻)点(仅存在于空间某点)源问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,t;\,x',t')=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$0<x,x'<l \qquad t,t'>0$$

在齐次定解条件

$$G\Big|_{x=0}=0 \qquad G\Big|_{x=l}=0 \qquad t,t'>0$$

$$G\Big|_{t<t'}=0 \qquad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0 \qquad 0<x,x'<l$$

下的解

定解问题

相应的Green函数$G(x,t;x',t')$应该是瞬时(仅存在于某一时刻)点(仅存在于空间某点)源问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,t;\,x',t')=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$0<x,x'<l \qquad t,t'>0$$

在齐次定解条件

$$G\Big|_{x=0}=0 \qquad G\Big|_{x=l}=0 \qquad t,t'>0$$

$$G\Big|_{t<t'}=0 \qquad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0 \qquad 0<x,x'<l$$

下的解

和一般的Green函数问题中一样，现在需要讨论三个问题

1. Green函数$G(x,t;x',t')$的对称性
2. 如何用Green函数及已知条件$f(x,t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$和$\phi(x)$, $\psi(x)$将定解问题的解$u(x,t)$表示出来
3. 如何求出Green函数

和一般的Green函数问题中一样，现在需要讨论三个问题

1. Green函数$G(x,t;x',t')$的对称性
2. 如何用Green函数及已知条件$f(x,t), \mu(t), \nu(t)$和$\phi(x), \psi(x)$将定解问题的解$u(x,t)$表示出来
3. 如何求出Green函数

和一般的Green函数问题中一样，现在需要讨论三个问题

1. Green函数$G(x,t;x',t')$的对称性
2. 如何用Green函数及已知条件$f(x,t),\mu(t),\nu(t)$和$\phi(x),\ \psi(x)$将定解问题的解$u(x,t)$表示出来
3. 如何求出Green函数

和一般的Green函数问题中一样，现在需要讨论三个问题

1. Green函数$G(x,t;x',t')$的对称性
2. 如何用Green函数及已知条件$f(x,t),\mu(t),\nu(t)$和$\phi(x),\ \psi(x)$将定解问题的解$u(x,t)$表示出来
3. 如何求出Green函数

讲授要点

1. 圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
   - 分离变量法
   - 电像法
2. 含时问题的Green函数
   - 提法：定解问题
   - 对称性
   - 含时问题的Green函数解法
   - Green函数的求法

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,t;x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G\Big|_{x=0} = 0 \quad G\Big|_{x=l} = 0 \qquad t, t' > 0$$

$$G\Big|_{t<t'} = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0 \quad 0 < x, x' < l$$

肯定不可能有$G(x,t;x',t') = G(x',t';x,t)$
因为这违反因果律
正确的结果：Green函数在空间上的对称性与时间上的倒易性

$$G(x,t;x',t') = G(x',-t';x,-t)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,t;\,x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G\Big|_{x=0} = 0 \quad G\Big|_{x=l} = 0 \qquad t,t' > 0$$

$$G\Big|_{t<t'} = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0 \quad 0 < x,x' < l$$

肯定不可能有$G(x,t;\,x',t') = G(x',t';\,x,t)$

因为这违反因果律

正确的结果：Green函数在空间上的对称性与时间上的倒易性

$$G(x,t;\,x',t') = G(x',-t';\,x,-t)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,t;\,x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G\Big|_{x=0} = 0 \quad G\Big|_{x=l} = 0 \qquad t,t' > 0$$

$$G\Big|_{t<t'} = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0 \quad 0 < x, x' < l$$

肯定不可能有$G(x,t;\,x',t') = G(x',t';\,x,t)$
因为这违反因果律

正确的结果：Green函数在空间上的对称性与时间上的倒易性

$$G(x,t;\,x',t') = G(x',-t';\,x,-t)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,t;\, x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G\Big|_{x=0} = 0 \quad G\Big|_{x=l} = 0 \qquad t,t' > 0$$

$$G\Big|_{t<t'} = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0 \quad 0 < x, x' < l$$

肯定不可能有$G(x,t;\, x',t') = G(x',t';\, x,t)$
因为这违反因果律
正确的结果：Green函数在空间上的对称性与时间上的倒易性

$$G(x,t;\, x',t') = G(x',-t';\, x,-t)$$

$G(x,t;\,x',t') = G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1 \equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\big|_{x=0} = 0 \qquad G_1\big|_{x=l} = 0$$

$$G_1\big|_{t<t'} = 0 \qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\bigg|_{t<t'} = 0$$

$G_2 \equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} = \delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\big|_{x=0} = 0 \qquad G_2\big|_{x=l} = 0$$

$$G_2\big|_{-t<-t''} = 0 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\bigg|_{-t<-t''} = 0$$

$G(x,t;x',t')=G(x',-t';x,-t)$的证明

$G_1\equiv G(x,t;x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\Big|_{x=0}=0 \qquad G_1\Big|_{x=l}=0$$

$$G_1\Big|_{t<t'}=0 \qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0$$

$G_2\equiv G(x,-t;x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}=\delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\Big|_{x=0}=0 \qquad G_2\Big|_{x=l}=0$$

$$G_2\Big|_{-t<-t''}=0 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{-t<-t''}=0$$

因为篇幅限制，以上均未写出定解问题的适用范围

$G(x,t;x',t')=G(x',-t';x,-t)$的证明

$G_1\equiv G(x,t;x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\Big|_{x=0}=0\qquad G_1\Big|_{x=l}=0$$

$$G_1\Big|_{t<t'}=0\qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0$$

$G_2\equiv G(x,-t;x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}=\delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\Big|_{x=0}=0\qquad G_2\Big|_{x=l}=0$$

$$G_2\Big|_{-t<-t''}=0\qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{-t<-t''}=0$$

对于G_1的定解问题，适用范围是

$$0<x,x'<l\qquad 0<t,t'<\infty$$

$G(x,t;\,x',t') = G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1 \equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\big|_{x=0} = 0 \qquad G_1\big|_{x=l} = 0$$

$$G_1\big|_{t<t'} = 0 \qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\bigg|_{t<t'} = 0$$

$G_2 \equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} = \delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\big|_{x=0} = 0 \qquad G_2\big|_{x=l} = 0$$

$$G_2\big|_{-t<-t''} = 0 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\bigg|_{-t<-t''} = 0$$

对于G_2的定解问题，适用范围是

$$0 < x, x'' < l \qquad 0 < t, t'' < \infty$$

$G(x,t;\,x',t')=G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1\equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\big|_{x=0}=0\qquad G_1\big|_{x=l}=0$$

$$G_1\big|_{t<t'}=0\qquad \left.\frac{\partial G_1}{\partial t}\right|_{t<t'}=0$$

$G_2\equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}=\delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\big|_{x=0}=0\qquad G_2\big|_{x=l}=0$$

$$G_2\big|_{-t<-t''}=0\qquad \left.\frac{\partial G_2}{\partial t}\right|_{-t<-t''}=0$$

关于G_2的初始条件，可改写为

$$G_2\big|_{t>t''}=0\qquad \left.\frac{\partial G_2}{\partial t}\right|_{t>t''}=0$$

$G(x,t;\,x',t')=G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1\equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\Big|_{x=0}=0\qquad G_1\Big|_{x=l}=0$$

$$G_1\Big|_{t<t'}=0\qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0$$

$G_2\equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}=\delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\Big|_{x=0}=0\qquad G_2\Big|_{x=l}=0$$

$$G_2\Big|_{t>t''}=0\qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{t>t''}=0$$

$G(x,t;\,x',t')=G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1\equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\Big|_{x=0}=0\qquad G_1\Big|_{x=l}=0$$

$$G_1\Big|_{t<t'}=0\qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0$$

$G_2\equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}=\delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\Big|_{x=0}=0\qquad G_2\Big|_{x=l}=0$$

$$G_2\Big|_{t>t''}=0\qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{t>t''}=0$$

证明方法：“交叉相乘，相减，再积分”

$G(x,t;\,x',t')=G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1\equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\Big|_{x=0}=0\qquad G_1\Big|_{x=l}=0$$

$$G_1\Big|_{t<t'}=0\qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0$$

$G_2\equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}=\delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\Big|_{x=0}=0\qquad G_2\Big|_{x=l}=0$$

$$G_2\Big|_{t>t''}=0\qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{t>t''}=0$$

$$\text{左端}=\int_0^l \mathrm{d}x\left[G_2\frac{\partial G_1}{\partial t}-G_1\frac{\partial G_2}{\partial t}\right]_0^\infty$$

$$-a^2\int_0^\infty \mathrm{d}t\int_0^l\left(G_2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}-G_1\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t$$

$G(x,t;\,x',t') = G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1 \equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\big|_{x=0} = 0 \quad G_1\big|_{x=l} = 0$$

$$G_1\big|_{t<t'} = 0 \quad \frac{\partial G_1}{\partial t}\bigg|_{t<t'} = 0$$

$G_2 \equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} = \delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\big|_{x=0} = 0 \quad G_2\big|_{x=l} = 0$$

$$G_2\big|_{t>t''} = 0 \quad \frac{\partial G_2}{\partial t}\bigg|_{t>t''} = 0$$

$$\text{左端} = \int_0^l \mathrm{d}x \left[G_2\frac{\partial G_1}{\partial t} - G_1\frac{\partial G_2}{\partial t}\right]_0^\infty - a^2\int_0^\infty \mathrm{d}t\left[G_2\frac{\partial G_1}{\partial x} - G_1\frac{\partial G_2}{\partial x}\right]_0^l$$

$G(x,t;\,x',t') = G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1 \equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\big|_{x=0} = 0 \qquad G_1\big|_{x=l} = 0$$

$$G_1\big|_{t<t'} = 0 \qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0$$

$G_2 \equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} = \delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\big|_{x=0} = 0 \qquad G_2\big|_{x=l} = 0$$

$$G_2\big|_{t>t''} = 0 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{t>t''} = 0$$

$$\begin{aligned}左端 = {} & \int_0^l \mathrm{d}x \left[G_2\frac{\partial G_1}{\partial t} - G_1\frac{\partial G_2}{\partial t}\right]_0^\infty \\ & - a^2\int_0^\infty \mathrm{d}t \left[G_2\frac{\partial G_1}{\partial x} - G_1\frac{\partial G_2}{\partial x}\right]_0^l \\ = {} & 0\end{aligned}$$

$G(x,t;\,x',t')=G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1\equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\big|_{x=0}=0\qquad G_1\big|_{x=l}=0$$

$$G_1\big|_{t<t'}=0\qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\bigg|_{t<t'}=0$$

$G_2\equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}=\delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\big|_{x=0}=0\qquad G_2\big|_{x=l}=0$$

$$G_2\big|_{t>t''}=0\qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\bigg|_{t>t''}=0$$

$$\begin{aligned}\text{右端}=&\int_0^l\mathrm{d}x\int_0^\infty G_2\delta(x-x')\delta(t-t')\mathrm{d}t\\&-\int_0^l\mathrm{d}x\int_0^\infty G_1\delta(x-x'')\delta(t-t'')\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$G(x,t;\,x',t')=G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1\equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\big|_{x=0}=0 \qquad G_1\big|_{x=l}=0$$

$$G_1\big|_{t<t'}=0 \qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\bigg|_{t<t'}=0$$

$G_2\equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}=\delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\big|_{x=0}=0 \qquad G_2\big|_{x=l}=0$$

$$G_2\big|_{t>t''}=0 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\bigg|_{t>t''}=0$$

$$\begin{aligned}\text{右端}&=\int_0^l \mathrm{d}x\int_0^\infty G_2\delta(x-x')\delta(t-t')\mathrm{d}t\\&\quad-\int_0^l \mathrm{d}x\int_0^\infty G_1\delta(x-x'')\delta(t-t'')\mathrm{d}t\\&=G(x',-t';x'',-t'')-G(x'',t'';x',t')\end{aligned}$$

$G(x,t;\,x',t') = G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1 \equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\Big|_{x=0} = 0 \qquad G_1\Big|_{x=l} = 0$$

$$G_1\Big|_{t<t'} = 0 \qquad \frac{\partial G_1}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0$$

$G_2 \equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} = \delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\Big|_{x=0} = 0 \qquad G_2\Big|_{x=l} = 0$$

$$G_2\Big|_{t>t''} = 0 \qquad \frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{t>t''} = 0$$

所以

$$G(x',-t';x'',-t'') - G(x'',t'';x',t') = 0$$

$G(x,t;\,x',t')=G(x',-t';\,x,-t)$的证明

$G_1\equiv G(x,t;\,x',t')$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$G_1\Big|_{x=0}=0\quad G_1\Big|_{x=l}=0$$

$$G_1\Big|_{t<t'}=0\quad \frac{\partial G_1}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0$$

$G_2\equiv G(x,-t;\,x'',-t'')$

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}=\delta(x-x'')\delta(t-t'')$$

$$G_2\Big|_{x=0}=0\quad G_2\Big|_{x=l}=0$$

$$G_2\Big|_{t>t''}=0\quad \frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{t>t''}=0$$

所以

$$G(x',-t';x'',-t'')-G(x'',t'';x',t')=0$$

将x'',t''改写为x,t，即得

$$G(x',-t';x,-t)=G(x,t;x',t')$$

讲授要点

1. 圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
   - 分离变量法
   - 电像法
2. 含时问题的Green函数
   - 提法：定解问题
   - 对称性
   - 含时问题的Green函数解法
   - Green函数的求法

有界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = \mu(t) \qquad u(x,t)\Big|_{x=l} = \nu(t) \qquad t>0$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0<x<l$$

相应的Green函数$G = G(x,t;x',t')$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t') \qquad 0<x,x'<l,\ t,t'>0$$

$$G\Big|_{x=0} = 0 \qquad G\Big|_{x=l} = 0 \qquad t,t'>0$$

$$G\Big|_{t<t'} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0 \qquad 0<x,x'<l$$

有界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \mu(t) \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = \nu(t) \qquad t>0$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0<x<l$$

相应的Green函数$G = G(x,t;x',t')$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t') \qquad 0<x,x'<l,\ t,t'>0$$

$$G\big|_{x=0} = 0 \qquad G\big|_{x=l} = 0 \qquad t,t'>0$$

$$G\big|_{t<t'} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t<t'} = 0 \qquad 0<x,x'<l$$

问题：如何用Green函数方法求解上述有界弦的波动问题？

换句话说，如何能用Green函数$G(x,t;x',t')$及定解问题中的非齐次项$f(x,t),\mu(t),\nu(t),\phi(x),\psi(x)$表示$u(x,t)$？

问题：如何用Green函数方法求解上述有界弦的波动问题?

换句话说，如何能用Green函数$G(x,t;x',t')$及定解问题中的非齐次项$f(x,t),\mu(t),\nu(t),\phi(x),\psi(x)$表示$u(x,t)$?

第一步，将关于$u(x,t)$的定解问题中的自变量x,t改写为x',t'

$$\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} = f(x',t')$$

$$0 < x' < l,\ t' > 0$$

$$u(x',t')\Big|_{x'=0} = \mu(t') \qquad u(x',t')\Big|_{x'=l} = \nu(t')$$

$$t' > 0$$

$$u(x',t')\Big|_{t'=0} = \phi(x') \qquad \frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\Big|_{t'=0} = \psi(x')$$

$$0 < x' < l$$

第一步，将关于$u(x,t)$的定解问题中的自变量x,t改写为x',t'

$$\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} = f(x',t')$$

$$0 < x' < l,\ t' > 0$$

$$u(x',t')\Big|_{x'=0} = \mu(t') \qquad u(x',t')\Big|_{x'=l} = \nu(t')$$

$$t' > 0$$

$$u(x',t')\Big|_{t'=0} = \phi(x') \qquad \frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\Big|_{t'=0} = \psi(x')$$

$$0 < x' < l$$

第一步，将关于$u(x,t)$的定解问题中的自变量x,t改写为x',t'

$$\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} = f(x',t')$$

$$0 < x' < l,\ t' > 0$$

$$u(x',t')\Big|_{x'=0} = \mu(t') \qquad u(x',t')\Big|_{x'=l} = \nu(t')$$

$$t' > 0$$

$$u(x',t')\Big|_{t'=0} = \phi(x') \qquad \frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\Big|_{t'=0} = \psi(x')$$

$$0 < x' < l$$

第二步，写出关于$G(x',-t';x,-t)$的定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(-t')^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]G(x',-t';x,-t)=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$0<x,x'<l,\ t,t'>0$$

$$G(x',-t';x,-t)\Big|_{x'=0}=0 \qquad G(x',-t';x,-t)\Big|_{x'=l}=0$$

$$t,t'>0$$

$$G(x',-t';x,-t)\Big|_{-t'<-t}=0 \qquad \frac{\partial G(x',-t';x,-t)}{\partial(-t')}\Big|_{-t'<-t}=0$$

$$0<x,x'<l$$

第二步，写出关于$G(x', -t'; x, -t)$的定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(-t')^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]G(x', -t'; x, -t) = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$0 < x, x' < l, \ t, t' > 0$$

$$G(x', -t'; x, -t)\Big|_{x'=0} = 0 \qquad G(x', -t'; x, -t)\Big|_{x'=l} = 0$$

$$t, t' > 0$$

$$G(x', -t'; x, -t)\Big|_{-t'<-t} = 0 \qquad \frac{\partial G(x', -t'; x, -t)}{\partial(-t')}\Big|_{-t'<-t} = 0$$

$$0 < x, x' < l$$

第二步，写出关于$G(x',-t';x,-t)$的定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(-t')^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]G(x',-t';x,-t)=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$0<x,x'<l,\ t,t'>0$$

$$G(x',-t';x,-t)\Big|_{x'=0}=0 \qquad G(x',-t';x,-t)\Big|_{x'=l}=0$$

$$t,t'>0$$

$$G(x',-t';x,-t)\Big|_{-t'<-t}=0 \qquad \frac{\partial G(x',-t';x,-t)}{\partial(-t')}\Big|_{-t'<-t}=0$$

$$0<x,x'<l$$

再利用Green函数的对称性$G(x',-t';x,-t)=G(x,t;x',t')$，将上述定解问题改写为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]G(x,t;x',t')=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$0<x,x'<l,\ \ t,t'>0$$

$$G(x,t;x',t')\Big|_{x'=0}=0 \qquad G(x,t;x',t')\Big|_{x'=l}=0$$

$$t,t'>0$$

$$G(x,t;x',t')\Big|_{t'>t}=0 \qquad \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'}\Big|_{t'>t}=0$$

$$0<x,x'<l$$

第三步，将方程

$$\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} = f(x',t')$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]G(x,t;x',t')=\delta(x-x')\delta(t-t')$$

交叉相乘，相减，再积分

$$\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty \left[G\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - u(x',t')\frac{\partial^2 G}{\partial t'^2}\right]\mathrm{d}t'$$

$$-a^2\int_0^\infty \mathrm{d}t' \int_0^l \left[G\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} - u(x',t')\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2}\right]\mathrm{d}x'$$

$$=\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty G(x,t;x',t')f(x',t')\mathrm{d}t'$$

$$-\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty u(x',t')\delta(x-x')\delta(t-t')\mathrm{d}t'$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty G(x,t;x',t') f(x',t') \mathrm{d}t' \\
& - \int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty \left[G \frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - u(x',t') \frac{\partial^2 G}{\partial t'^2} \right] \mathrm{d}t' \\
& + a^2 \int_0^\infty \mathrm{d}t' \int_0^l \left[G \frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} - u(x',t') \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} \right] \mathrm{d}x'
\end{aligned}
$$

第四步，代入边界条件和初始条件，化简

右端第一项

$$\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty G(x,t;x',t')f(x',t')\mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^t G(x,t;x',t')f(x',t')\mathrm{d}t'$$

第四步，代入边界条件和初始条件，化简

右端第一项

$$\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty G(x,t;x',t')f(x',t')\mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^t G(x,t;x',t')f(x',t')\mathrm{d}t'$$

第四步，代入边界条件和初始条件，化简

右端第一项

$$\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty G(x,t;x',t') f(x',t') \mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^t G(x,t;x',t') f(x',t') \mathrm{d}t'$$

右端第二项

$$\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty \left[G\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - u(x',t')\frac{\partial^2 G}{\partial t'^2}\right]\mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^l \mathrm{d}x' \left[G\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'} - u(x',t')\frac{\partial G}{\partial t'}\right]_{t'=0}^{\infty}$$

$$= -\int_0^l \left[\psi(x')G\Big|_{t'=0} - \phi(x')\frac{\partial G}{\partial t'}\Big|_{t'=0}\right]\mathrm{d}x'$$

右端第二项

$$\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty \left[G\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - u(x',t')\frac{\partial^2 G}{\partial t'^2} \right] \mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^l \mathrm{d}x' \left[G\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'} - u(x',t')\frac{\partial G}{\partial t'} \right]_{t'=0}^{\infty}$$

$$= -\int_0^l \left[\psi(x')G\Big|_{t'=0} - \phi(x')\frac{\partial G}{\partial t'}\Big|_{t'=0} \right] \mathrm{d}x'$$

右端第二项

$$\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty \left[G\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - u(x',t')\frac{\partial^2 G}{\partial t'^2}\right]\mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^l \mathrm{d}x' \left[G\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'} - u(x',t')\frac{\partial G}{\partial t'}\right]_{t'=0}^{\infty}$$

$$= -\int_0^l \left[\psi(x')G\big|_{t'=0} - \phi(x')\frac{\partial G}{\partial t'}\bigg|_{t'=0}\right]\mathrm{d}x'$$

右端第三项

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t' \int_0^l \left[G\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} - u(x',t')\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2}\right]\mathrm{d}x'$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}t' \left[G\frac{\partial u(x',t')}{\partial x'} - u(x',t')\frac{\partial G}{\partial x'}\right]_0^l$$

$$= -\int_0^\infty \left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=l} - \mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'$$

$$= -\int_0^t \left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=l} - \mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'$$

右端第三项

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t' \int_0^l \left[G\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} - u(x',t')\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2}\right]\mathrm{d}x'$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}t' \left[G\frac{\partial u(x',t')}{\partial x'} - u(x',t')\frac{\partial G}{\partial x'}\right]_0^l$$

$$= -\int_0^\infty \left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=l} - \mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'$$

$$= -\int_0^t \left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=l} - \mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'$$

右端第三项

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t' \int_0^l \left[G\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} - u(x',t')\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2}\right]\mathrm{d}x'$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}t' \left[G\frac{\partial u(x',t')}{\partial x'} - u(x',t')\frac{\partial G}{\partial x'}\right]_0^l$$

$$= -\int_0^\infty \left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=l} - \mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'$$

$$= -\int_0^t \left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=l} - \mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'$$

右端第三项

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t' \int_0^l \left[G\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} - u(x',t')\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2}\right]\mathrm{d}x'$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}t' \left[G\frac{\partial u(x',t')}{\partial x'} - u(x',t')\frac{\partial G}{\partial x'}\right]_0^l$$

$$= -\int_0^\infty \left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=l} - \mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'$$

$$= -\int_0^t \left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=l} - \mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'$$

最后就得到

$$u(x,t)=\int_0^l \mathrm{d}x'\int_0^t G(x,t;x',t')f(x',t')\mathrm{d}t'$$

$$+\int_0^l\left[\psi(x')G\Big|_{t'=0}-\phi(x')\frac{\partial G}{\partial t'}\Big|_{t'=0}\right]\mathrm{d}x'$$

$$-a^2\int_0^t\left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\Big|_{x'=l}-\mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\Big|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'$$

讲授要点

1. 圆内Poisson方程第一边值问题的Green函数
   - 分离变量法
   - 电像法
2. 含时问题的Green函数
   - 提法：定解问题
   - 对称性
   - 含时问题的Green函数解法
   - Green函数的求法

例16.1　求解有界弦波动问题的Green函数

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,t;x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$0 < x, x' < l,\ \ t, t' > 0$$

$$G(x,t;x',t')\Big|_{x=0} = 0 \qquad G(x,t;x',t')\Big|_{x=l} = 0$$

$$t, t' > 0$$

$$G(x,t;x',t')\Big|_{t<t'} = 0 \qquad \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0$$

$$0 < x, x' < l$$

按相应齐次问题的本征函数展开

$$G(x,t;x',t')=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

同时，将δ函数也按该组本征函数展开

$$\delta(x-x')=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x'\sin\frac{n\pi}{l}x$$

于是，$T_n(t)$就满足常微分方程的初值问题

$$T''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x'\delta(t-t')$$

$$T_n(t<t')=0 \qquad T_n'(t<t')=0$$

按相应齐次问题的本征函数展开

$$G(x,t;x',t') = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x$$

同时，将δ函数也按该组本征函数展开

$$\delta(x-x') = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x' \sin\frac{n\pi}{l}x$$

于是，$T_n(t)$就满足常微分方程的初值问题

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = \frac{2}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x'\delta(t-t')$$

$$T_n(t<t') = 0 \qquad T_n'(t<t') = 0$$

按相应齐次问题的本征函数展开

$$G(x,t;x',t')=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

同时，将δ函数也按该组本征函数展开

$$\delta(x-x')=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x'\sin\frac{n\pi}{l}x$$

于是，$T_n(t)$就满足常微分方程的初值问题

$$T''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x'\delta(t-t')$$

$$T_n(t<t')=0\qquad T_n'(t<t')=0$$

解之即得

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi a} \sin \frac{n\pi}{l} x' \sin \frac{n\pi}{l} a(t-t')\, \eta(t-t')$$

所以，Green函数$G(x,t;x',t')$就是

$$G(x,t;x',t') = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x' \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} a(t-t')\eta(t-t')$$

例16.2 求解三维无界空间波动问题的Green函数

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\nabla^2\right]G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$$

$$t,t' > 0$$

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\Big|_{t<t'} = 0 \qquad \frac{\partial G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0$$

$$0 < x,x' < l$$

作Fourier变换

$$g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

于是定解问题就化为

$$\left[(-\mathrm{i}\omega)^2 - a^2\nabla^2\right] g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

即

$$\left[\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right] g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}a^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

作Fourier变换

$$g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

于是定解问题就化为

$$\left[(-\mathrm{i}\omega)^2-a^2\nabla^2\right]g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

即

$$\left[\nabla^2+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right]g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

作Fourier变换

$$g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

于是定解问题就化为

$$\left[(-\mathrm{i}\omega)^2-a^2\nabla^2\right]g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

即

$$\left[\nabla^2+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right]g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}a^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

根据上一讲的结果(三维无界空间Helmholtz方程的Green函数)

$$g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/a)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

所以，Green函数$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$就是

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/a)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}-(t-t')\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-a(t-t')\right)$$

所以，Green函数$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$就是

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/a)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}-(t-t')\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-a(t-t')\right)$$

所以，Green函数$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$就是

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/a)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}-(t-t')\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-a(t-t')\right)$$

所以，Green函数$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$就是

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/a)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}-(t-t')\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-a(t-t')\right)$$