第 十 二 讲

内积空间与函数空间

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. 内积空间
   - 内积与内积空间
   - 正交性
   - 完备性
2. 函数空间
   - 函数的内积
   - 函数的正交归一性
   - 正交归一函数集的完备性

讲授要点

1. 内积空间
   - 内积与内积空间
   - 正交性
   - 完备性
2. 函数空间
   - 函数的内积
   - 函数的正交归一性
   - 正交归一函数集的完备性

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§18.1, 18.2

讲授要点

1. 内积空间
   - 内积与内积空间
   - 正交性
   - 完备性
2. 函数空间
   - 函数的内积
   - 函数的正交归一性
   - 正交归一函数集的完备性

n维矢量空间

定义

元素$x, y, z, \cdots$ (称为矢量)的集合称为实(复)矢量空间，如果下列公理成立

(1) 任给一对矢量x与y，有加法运算，即存在对应的矢量$x+y$，称为x与y之和，具有下列性质：

(a) $x+y=y+x$

(b) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(c) 存在唯一矢量0，使得对于每个x，$x+0=x$

(d) 对于每个矢量x，存在唯一矢量，记为$-x$，使得$x+(-x)=0$

(2) 任给矢量x及实(复)数α，有数乘运算，即存在对应的矢量αx，使得

(a) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ (b) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(c) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (d) $1x=x$

n维矢量空间

定义

元素$x, y, z, \cdots$ (称为矢量)的集合称为实(复)矢量空间，如果下列公理成立

(1) 任给一对矢量x与y，有加法运算，即存在对应的矢量$x+y$，称为x与y之和，具有下列性质：

(a) $x+y=y+x$

(b) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(c) 存在唯一矢量0，使得对于每个x，$x+0=x$

(d) 对于每个矢量x，存在唯一矢量，记为$-x$，使得 $x+(-x)=0$

(2) 任给矢量x及实(复)数α，有数乘运算，即存在对应的矢量αx，使得

(a) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ (b) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(c) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (d) $1x=x$

n维矢量空间

定义

元素$x, y, z, \cdots$(称为矢量)的集合称为实(复)矢量空间，如果下列公理成立

(1) 任给一对矢量x与y，有加法运算，即存在对应的矢量$x+y$，称为x与y之和，具有下列性质：
- (a) $x+y=y+x$
- (b) $x+(y+z)=(x+y)+z$
- (c) 存在唯一矢量0，使得对于每个x，$x+\mathsf{0}=x$
- (d) 对于每个矢量x，存在唯一矢量，记为$-x$，使得$x+(-x)=\mathsf{0}$

(2) 任给矢量x及实(复)数α，有数乘运算，即存在对应的矢量αx，使得
- (a) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$
- (b) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
- (c) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
- (d) $1x=x$

内积

可以把三维矢量空间中矢量的长度概念推广到n维矢量空间

为此，先定义n维矢量的内积

设在数域K上定义了n维矢量空间V，它的元素(矢量)用$x, y, \cdots$表示

内积

可以把三维矢量空间中矢量的长度概念推广到n维矢量空间

为此，先定义n维矢量的内积

设在数域K上定义了n维矢量空间V，它的元素(矢量)用$x, y, \cdots$表示

内积

可以把三维矢量空间中矢量的长度概念推广到n维矢量空间

为此，先定义n维矢量的内积

设在数域K上定义了n维矢量空间V，它的元素(矢量)用$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$表示

实n维矢量空间中的内积

给定实n维矢量空间(即K为实数域)，在选定了一组基$\{\boldsymbol{e}_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$之后， 空间中的任意一个矢量$\boldsymbol{x}$都可以用它在这一组基上的投影(坐标) $x_1, x_2, \cdots, x_n$表示

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i$$

Definition

对于空间中的矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，最常见的内积定义

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

实n维矢量空间中的内积

给定实n维矢量空间(即K为实数域)，在选定了一组基$\{\boldsymbol{e}_i, i=1,2,\cdots,n\}$之后， 空间中的任意一个矢量$\boldsymbol{x}$都可以用它在这一组基上的投影(坐标) $x_1, x_2, \cdots, x_n$表示

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i$$

Definition

对于空间中的矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，最常见的内积定义

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

实n维矢量空间中的内积

Definition

对于空间中的矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，最常见的内积定义

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

- $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$是一个实数
- $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$ $\qquad$ $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geq 0$
- 当且仅当$\boldsymbol{x} = 0$时，才有$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 0$

Definition: 矢量$\boldsymbol{x}$的长度$\|\boldsymbol{x}\|$

$$\|\boldsymbol{x}\| = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})^{1/2}$$

实n维矢量空间中的内积

Definition

对于空间中的矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，最常见的内积定义

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是一个实数
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$
- 当且仅当$\boldsymbol{x} = 0$时，才有$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$

Definition: 矢量$\boldsymbol{x}$的长度$\|\boldsymbol{x}\|$

$$\|\boldsymbol{x}\| = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{1/2}$$

实n维矢量空间中的内积

Definition

对于空间中的矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，最常见的内积定义

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是一个实数
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ $\quad$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$
- 当且仅当$\boldsymbol{x} = 0$时，才有$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$

Definition: 矢量$\boldsymbol{x}$的长度$\|\boldsymbol{x}\|$

$$\|\boldsymbol{x}\| = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{1/2}$$

实n维矢量空间中的内积

Definition

对于空间中的矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，最常见的内积定义

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是一个实数
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ $\qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$
- 当且仅当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$时，才有$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$

Definition: 矢量$\boldsymbol{x}$的长度$\|\boldsymbol{x}\|$

$$\|\boldsymbol{x}\| = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{1/2}$$

实n维矢量空间中的内积

Definition

对于空间中的矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，最常见的内积定义

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

- $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$是一个实数
- $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geq 0$
- 当且仅当$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$时，才有$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 0$

Definition: 矢量$\boldsymbol{x}$的长度$\|\boldsymbol{x}\|$

$$\|\boldsymbol{x}\| = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})^{1/2}$$

复n维矢量空间中的内积

- 对于复n维矢量空间，如果仍保留上述内积定义，则矢量长度就可能不是实数
- 为了保持矢量长度仍是实数，必须保证矢量和它自身的内积为正
- 不妨在保持长度定义的前提下，将内积定义定义修改

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1^*y_1+x_2^*y_2+\cdots+x_n^*y_n=\sum_{i=1}^{n}x_i^*y_i$$

其中x_i^*是x_i的复共轭

显然，在复矢量空间中$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})^*$

复n维矢量空间中的内积

- 对于复n维矢量空间，如果仍保留上述内积定义，则矢量长度就可能不是实数
- 为了保持矢量长度仍是实数，必须保证矢量和它自身的内积为正
- 不妨在保持长度定义的前提下，将内积定义定义修改

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \cdots + x_n^* y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

其中x_i^*是x_i的复共轭

显然，在复矢量空间中$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$

复n维矢量空间中的内积

- 对于复n维矢量空间，如果仍保留上述内积定义，则矢量长度就可能不是实数
- 为了保持矢量长度仍是实数，必须保证矢量和它自身的内积为正
- 不妨在保持长度定义的前提下，将内积定义定义修改

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \cdots + x_n^* y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

其中x_i^*是x_i的复共轭

显然，在复矢量空间中$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$

复n维矢量空间中的内积

- 对于复n维矢量空间，如果仍保留上述内积定义，则矢量长度就可能不是实数
- 为了保持矢量长度仍是实数，必须保证矢量和它自身的内积为正
- 不妨在保持长度定义的前提下，将内积定义定义修改

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \cdots + x_n^* y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

其中x_i^*是x_i的复共轭

显然，在复矢量空间中$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})^*$

复n维矢量空间中的内积

- 对于复n维矢量空间，如果仍保留上述内积定义，则矢量长度就可能不是实数
- 为了保持矢量长度仍是实数，必须保证矢量和它自身的内积为正
- 不妨在保持长度定义的前提下，将内积定义定义修改

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \cdots + x_n^* y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

其中x_i^*是x_i的复共轭

显然，在复矢量空间中$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})^*$

- 这样的内积概念显然是三维矢量的标积的简单推广
- 但还不够普遍和抽象，特别是矢量的内积明显依赖于基的选取
- 需要从内积的各种可能定义中抽象出它的最本质的要素．从而给出一个公理化的内积定义

- 这样的内积概念显然是三维矢量的标积的简单推广
- 但还不够普遍和抽象，特别是矢量的内积明显依赖于基的选取
- 需要从内积的各种可能定义中抽象出它的最本质的要素．从而给出一个公理化的内积定义

- 这样的内积概念显然是三维矢量的标积的简单推广
- 但还不够普遍和抽象，特别是矢量的内积明显依赖于基的选取
- 需要从内积的各种可能定义中抽象出它的最本质的要素．从而给出一个公理化的内积定义

内积公理

(定义在实数或复数域K上的)矢量空间中矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的内积$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是它们的标量值函数，满足

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$
2. $(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$，其中$\alpha$和$\beta$是数域$K$上的标量
3. 对于任何$\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$；当且仅当$\boldsymbol{x} = 0$时，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$

内积公理显然涵盖了上面的几种内积定义

内积公理

(定义在实数或复数域K上的)矢量空间中矢量x和y的内积(x, y)是它们的标量值函数，满足

1. $(x, y) = (y, x)^*$
2. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha^*(x, z) + \beta^*(y, z)$，其中$\alpha$和$\beta$是数域$K$上的标量
3. 对于任何x，$(x, x) \geq 0$； 当且仅当 $x = 0$时，$(x, x) = 0$

内积公理显然涵盖了上面的几种内积定义

内积公理

(定义在实数或复数域K上的)矢量空间中矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的内积$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是它们的标量值函数，满足

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$
2. $(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$，其中$\alpha$和$\beta$是数域$K$上的标量
3. 对于任何$\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$； 当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$时，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$

内积公理显然涵盖了上面的几种内积定义

内积公理

(定义在实数或复数域K上的)矢量空间中矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的内积$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是它们的标量值函数，满足

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$
2. $(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$，其中$\alpha$和$\beta$是数域$K$上的标量
3. 对于任何$\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$； 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$时，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$

内积公理显然涵盖了上面的几种内积定义

内积公理

(定义在实数或复数域K上的)矢量空间中矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的内积$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是它们的标量值函数，满足

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$
2. $(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$，其中$\alpha$和$\beta$是数域$K$上的标量
3. 对于任何$\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$； 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$时，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$

内积公理显然涵盖了上面的几种内积定义

1. 根据内积公理中的第1条要求，可以看出，不论是实的或复的矢量空间，一个矢量和它自身的内积总是实数，这样第3条要求中的不等式才有意义

2. 在此基础上，就可以定义

矢量x的模(即矢量x的“长度”)

$$(x, x)^{1/2} = \|x\|$$

1. 根据内积公理中的第1条要求，可以看出，不论是实的或复的矢量空间，一个矢量和它自身的内积总是实数，这样第3条要求中的不等式才有意义
2. 在此基础上，就可以定义

矢量x的模(即矢量x的“长度”)

$$(x,\, x)^{1/2} = \|x\|$$

1. 根据内积公理中的第1条要求，可以看出，不论是实的或复的矢量空间，一个矢量和它自身的内积总是实数， 这样第3条要求中的不等式才有意义
2. 在此基础上，就可以定义

矢量x的模(即矢量x的“长度”)

$$(x,\, x)^{1/2} = \|x\|$$

1. 从内积公理中的第1和第2条要求，可得

$$(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

2. 因此

$$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}\| &= (\alpha\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{x})^{1/2} \\ &= \left[\alpha\alpha^*(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})\right]^{1/2} = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|\end{aligned}$$

任何一个非零矢量除以它的模就成为“单位长度”的矢量，或称为归一化的矢量

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|},\ \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right) = 1$$

1. 从内积公理中的第1和第2条要求，可得

$$(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})$$

2. 因此

$$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}\| &= (\alpha\boldsymbol{x},\,\alpha\boldsymbol{x})^{1/2}\\ &= \Big[\alpha\alpha^*(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})\Big]^{1/2} = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|\end{aligned}$$

任何一个非零矢量除以它的模就成为“单位长度”的矢量，或称为归一化的矢量

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|},\,\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)=1$$

1. 从内积公理中的第1和第2条要求，可得

$$(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$$

2. 因此

$$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}\| &= (\alpha\boldsymbol{x},\, \alpha\boldsymbol{x})^{1/2}\\ &= \left[\alpha\alpha^*(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})\right]^{1/2} = |\alpha|\, \|\boldsymbol{x}\|\end{aligned}$$

任何一个非零矢量除以它的模就成为“单位长度”的矢量，或称为归一化的矢量

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|},\, \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right) = 1$$

例12.1

已知实数域上的列矢量$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

以及对角矩阵(对角元P_{ii}均为正实数)

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

例12.1

则可定义矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的内积为

$$(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

例12.1

则可定义矢量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的内积为

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

或者看成矩阵乘法

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \widetilde{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$$

$\widetilde{\boldsymbol{x}}$是$\boldsymbol{x}$的转置

例12.2

实变量t的所有复系数的多项式的集合，在多项式加法以及多项式和复数的乘法下构成一个复矢量空间

例12.2

实变量t的所有复系数的多项式的集合，在多项式加法以及多项式和复数的乘法下构成一个复矢量空间

不妨假设$0 \leq t \leq 1$

例12.2

若$x(t)$和$y(t)$是此矢量空间中的两个矢量(即多项式)，则它们的内积可定义为

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \int_0^1 x^*(t)\, y(t)\, \rho(t)\, \mathrm{d}t$$

其中已知函数$\rho(x) \geq 0$ 且 $\neq 0$

例12.2

若$x(t)$和$y(t)$是此矢量空间中的两个矢量(即多项式)，则它们的内积可定义为

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\int_0^1 x^*(t)\,y(t)\,\rho(t)\,\mathrm{d}t$$

其中已知函数$\rho(x)\geq 0$且$\neq 0$

它的特殊情形是$\rho(x)\equiv 1$

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\int_0^1 x^*(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t$$

内积空间

- 定义了内积的矢量空间称为内积空间
- 具有内积的实矢量空间称为欧几里德空间(Euclidean space)
- 具有内积的复矢量空间称为酉空间(unitary space)

内积空间

- 定义了内积的矢量空间称为内积空间
- 具有内积的实矢量空间称为欧几里德空间(Euclidean space)
- 具有内积的复矢量空间称为酉空间(unitary space)

内积空间

- 定义了内积的矢量空间称为内积空间
- 具有内积的实矢量空间称为欧几里德空间(Euclidean space)
- 具有内积的复矢量空间称为酉空间(unitary space)

讲授要点

1. 内积空间
   - 内积与内积空间
   - 正交性
   - 完备性
2. 函数空间
   - 函数的内积
   - 函数的正交归一性
   - 正交归一函数集的完备性

正交概念

在建立了内积定义后，就可以引入矢量正交的概念

当且仅当$(x, y) = 0$时，两矢量x, y正交

零矢量与任何矢量都正交

正交概念

在建立了内积定义后，就可以引入矢量正交的概念

当且仅当$(x, y) = 0$时，两矢量x, y正交

零矢量与任何矢量都正交

正交概念

在建立了内积定义后，就可以引入矢量正交的概念

当且仅当$(x, y) = 0$时，两矢量x, y正交

零矢量与任何矢量都正交

正交归一与正交归一基

若对于所有的i和j，$(\boldsymbol{x}_i,\, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$， 则称矢量组$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$正交归一

- 正交归一矢量一定线性无关，因为如果将它们线性组合成零矢量

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{x}_3 + \cdots = \boldsymbol{0}$$

则一定有$\alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$

- n维矢量空间中的任何一组n个正交归一矢量都可以构成此空间的基，称为正交归一基(或称正交标准基)
- 选择正交归一基，无论在理论上或实用上，都具有极大的重要性

正交归一与正交归一基

若对于所有的i和j，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$，则称矢量组$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$正交归一

- 正交归一矢量一定线性无关，因为如果将它们线性组合成零矢量

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3 + \cdots = \mathbf{0}$$

  则一定有$\alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$

- n维矢量空间中的任何一组n个正交归一矢量都可以构成此空间的基，称为正交归一基(或称正交标准基)
- 选择正交归一基，无论在理论上或实用上，都具有极大的重要性

正交归一与正交归一基

若对于所有的i和j，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$， 则称矢量组$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$正交归一

- 正交归一矢量一定线性无关，因为如果将它们线性组合成零矢量
$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3 + \cdots = \boldsymbol{0}$$
则一定有$\alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$
- n维矢量空间中的任何一组n个正交归一矢量都可以构成此空间的基，称为正交归一基(或称正交标准基)
- 选择正交归一基，无论在理论上或实用上，都具有极大的重要性

正交归一与正交归一基

若对于所有的i和j，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$， 则称矢量组$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$正交归一

- 正交归一矢量一定线性无关，因为如果将它们线性组合成零矢量
$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3 + \cdots = \mathbf{0}$$
则一定有$\alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$
- n维矢量空间中的任何一组n个正交归一矢量都可以构成此空间的基，称为正交归一基(或称正交标准基)
- 选择正交归一基，无论在理论上或实用上，都具有极大的重要性

讲授要点

1. 内积空间
   - 内积与内积空间
   - 正交性
   - 完备性
2. 函数空间
   - 函数的内积
   - 函数的正交归一性
   - 正交归一函数集的完备性

正交归一矢量集的完备性概念

在有限维矢量空间中，如果一组正交归一的矢量(称为一个正交归一矢量集)，并不包含在另一个更大的正交归一矢量集之中， 则称该正交归一矢量集是完备的

- 在有限维的矢量空间中，一个完备的正交归一矢量集中矢量的个数必然与空间的维数相同
- 实际问题中，往往并不是先知道矢量空间的维数， 反而是要通过找出一组完备的正交归一矢量(一组特殊的最大线性无关矢量组)来判断空间的维数， 而建立这个矢量空间的一组基
- 在一个内积空间V中，要判断一组正交归一的矢量是否完备，是一个非常重要的现实问题

正交归一矢量集的完备性概念

在有限维矢量空间中，如果一组正交归一的矢量(称为一个正交归一矢量集)，并不包含在另一个更大的正交归一矢量集之中， 则称该正交归一矢量集是完备的

- 在有限维的矢量空间中，一个完备的正交归一矢量集中矢量的个数必然与空间的维数相同
- 实际问题中，往往并不是先知道矢量空间的维数， 反而是要通过找出一组完备的正交归一矢量(一组特殊的最大线性无关矢量组)来判断空间的维数， 而建立这个矢量空间的一组基
- 在一个内积空间V中，要判断一组正交归一的矢量是否完备，是一个非常重要的现实问题

正交归一矢量集的完备性概念

在有限维矢量空间中，如果一组正交归一的矢量(称为一个正交归一矢量集)，并不包含在另一个更大的正交归一矢量集之中， 则称该正交归一矢量集是完备的

- 在有限维的矢量空间中，一个完备的正交归一矢量集中矢量的个数必然与空间的维数相同
- 实际问题中，往往并不是先知道矢量空间的维数， 反而是要通过找出一组完备的正交归一矢量(一组特殊的最大线性无关矢量组)来判断空间的维数， 而建立这个矢量空间的一组基
- 在一个内积空间V中，要判断一组正交归一的矢量是否完备，是一个非常重要的现实问题

正交归一矢量集完备的判别法

在给定的内积空间V中，如何判断一组正交归一的矢量$\{\boldsymbol{x}_i, i=1,2,\cdots,k\}$是否完备?

1. 当且仅当$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$时，$(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x})=0,\ i=1,2,\cdots,k$
2. 对于任意的$\boldsymbol{x}\in V$，恒有$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{\infty} k(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_i$
3. Bessel不等式中的等号成立，即对于任意的$\boldsymbol{x}\in V$，恒有 $\|\boldsymbol{x}\|^2=\sum\limits_{i=1}^{\infty} k\left|(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x})\right|^2$
4. Parseval方程成立，即对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$，恒有 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{\infty} k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x})$

这些判据都是充分必要条件，彼此完全等价

正交归一矢量集完备的判别法

在给定的内积空间V中，如何判断一组正交归一的矢量$\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, 2, \cdots, k\}$是否完备?

1. 当且仅当$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$时，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, k$
2. 对于任意的$\boldsymbol{x} \in V$，恒有$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{\infty} k(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_i$
3. Bessel不等式中的等号成立，即对于任意的$\boldsymbol{x} \in V$，恒有 $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} k\left|(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})\right|^2$
4. Parseval方程成立，即对于任意的$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$，恒有 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})$

这些判据都是充分必要条件，彼此完全等价

正交归一矢量集完备的判别法

在给定的内积空间V中，如何判断一组正交归一的矢量$\{\boldsymbol{x}_i, i=1,2,\cdots,k\}$是否完备?

1. 当且仅当$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$时，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})=0,\ i=1,2,\cdots,k$
2. 对于任意的$\boldsymbol{x}\in V$，恒有$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{\infty} k(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_i$
3. Bessel不等式中的等号成立，即对于任意的$\boldsymbol{x}\in V$，恒有 $\|\boldsymbol{x}\|^2=\sum_{i=1}^{\infty} k\left|(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})\right|^2$
4. Parseval方程成立，即对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$，恒有$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{\infty} k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})$

这些判据都是充分必要条件，彼此完全等价

正交归一矢量集完备的判别法

在给定的内积空间V中，如何判断一组正交归一的矢量$\{\boldsymbol{x}_i, i=1,\,2,\,\cdots,\,k\}$是否完备?

1. 当且仅当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$时，$(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x})=0,\ i=1,\,2,\,\cdots,\,k$
2. 对于任意的$\boldsymbol{x}\in V$，恒有$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}k(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_i$
3. Bessel不等式中的等号成立，即对于任意的$\boldsymbol{x}\in V$，恒有 $\|\boldsymbol{x}\|^2=\sum\limits_{i=1}^{\infty}k\left|(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x})\right|^2$
4. Parseval方程成立，即对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$，恒有 $(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}k(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x})$

这些判据都是充分必要条件，彼此完全等价

正交归一矢量集完备的判别法

在给定的内积空间V中，如何判断一组正交归一的矢量$\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, 2, \cdots, k\}$是否完备?

1. 当且仅当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$时，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, k$
2. 对于任意的$\boldsymbol{x} \in V$，恒有$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{\infty} k(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_i$
3. Bessel不等式中的等号成立，即对于任意的$\boldsymbol{x} \in V$，恒有 $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} k\left|(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})\right|^2$
4. Parseval方程成立，即对于任意的$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$，恒有 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})$

这些判据都是充分必要条件，彼此完全等价

讲授要点

1. 内积空间
   - 内积与内积空间
   - 正交性
   - 完备性
2. 函数空间
   - 函数的内积
   - 函数的正交归一性
   - 正交归一函数集的完备性

函数空间

函数空间是一类特殊的矢量空间：空间的元素是函数，更确切地说，本课程中讨论的是定义在一定区间(可以是有界区间、无界区间或半无界区间，为确定起见，以下不妨写为$a \leq x \leq b$)上的复值平方可积函数$f(x)$(即积分$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x$存在)

- 定义元素f_1和f_2的加法$f_1 + f_2$就是两函数相加

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 元素f和复数α的数乘αf是

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

函数空间

函数空间是一类特殊的矢量空间：空间的元素是函数，更确切地说，本课程中讨论的是定义在一定区间(可以是有界区间、 无界区间或半无界区间，为确定起见，以下不妨写为$a\leq x\leq b$)上的复值平方可积函数$f(x)$(即积分$\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$存在)

- 定义元素f_1和f_2的加法f_1+f_2就是两函数相加

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

- 元素f和复数α的数乘αf是

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

函数空间

函数空间是一类特殊的矢量空间：空间的元素是函数，更确切地说，本课程中讨论的是定义在一定区间(可以是有界区间、无界区间或半无界区间，为确定起见，以下不妨写为$a \le x \le b$)上的复值平方可积函数$f(x)$(即积分$\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$存在)

- 定义元素f_1和f_2的加法$f_1 + f_2$就是两函数相加
$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
- 元素f和复数α的数乘αf是
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

函数空间

函数空间是一类特殊的矢量空间：空间的元素是函数，更确切地说，本课程中讨论的是定义在一定区间(可以是有界区间、 无界区间或半无界区间，为确定起见，以下不妨写为$a \leq x \leq b$)上的复值平方可积函数$f(x)$(即积分 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$存在)

- 定义元素f_1和f_2的加法$f_1 + f_2$就是两函数相加
$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
- 元素f和复数α的数乘αf是
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

函数空间

这样的平方可积函数的集合，对于加法和数乘是封闭的，因此的确构成矢量空间

特别是因为

$$\left|f_1(x)+f_2(x)\right|^2+\left|f_1(x)-f_2(x)\right|^2 = 2\Big[\left|f_1(x)\right|^2+\left|f_2(x)\right|^2\Big]$$

所以，两个平方可积函数之和仍是平方可积的

$$\left|f_1(x)+f_2(x)\right|^2\le 2\Big[\left|f_1(x)\right|^2+\left|f_2(x)\right|^2\Big]$$

函数空间

这样的平方可积函数的集合，对于加法和数乘是封闭的，因此的确构成矢量空间

特别是因为

$$\left|f_1(x)+f_2(x)\right|^2+\left|f_1(x)-f_2(x)\right|^2 = 2\Big[\left|f_1(x)\right|^2+\left|f_2(x)\right|^2\Big]$$

所以，两个平方可积函数之和仍是平方可积的

$$\left|f_1(x)+f_2(x)\right|^2 \leq 2\Big[\left|f_1(x)\right|^2+\left|f_2(x)\right|^2\Big]$$

函数空间

这样的平方可积函数的集合，对于加法和数乘是封闭的，因此的确构成矢量空间

特别是因为

$$\begin{aligned}|f_1(x)+f_2(x)|^2+|f_1(x)-f_2(x)|^2\\ =2\Big[\,|f_1(x)|^2+|f_2(x)|^2\,\Big]\end{aligned}$$

所以，两个平方可积函数之和仍是平方可积的

$$|f_1(x)+f_2(x)|^2\leq 2\Big[\,|f_1(x)|^2+|f_2(x)|^2\,\Big]$$

函数的内积

Definition

设$f_1(x)$和$f_2(x)$是函数空间中的两个函数，它们的内积是 $(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x$

函数的内积

Definition

设$f_1(x)$和$f_2(x)$是函数空间中的两个函数，它们的内积是 $(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x$

由于

$$|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 - 2\,|f_1(x)| \cdot |f_2(x)| = \Big[\,|f_1(x)| - |f_2(x)|\,\Big]^2 \geq 0$$

函数的内积

Definition

设$f_1(x)$和$f_2(x)$是函数空间中的两个函数，它们的内积是 $(f_1, f_2)=\int_a^b f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$

由于

$$|f_1(x)|^2+|f_2(x)|^2-2\,|f_1(x)|\cdot|f_2(x)|=\Big[\,|f_1(x)|-|f_2(x)|\,\Big]^2\geq 0$$

因此

$$|f_1^*(x)f_2(x)|=|f_1(x)|\cdot|f_2(x)|\leq\frac{1}{2}\Big[\,|f_1(x)|^2+|f_2(x)|^2\Big]$$

函数的内积

Definition

设$f_1(x)$和$f_2(x)$是函数空间中的两个函数，它们的内积是 $(f_1,\ f_2)=\displaystyle\int_a^b f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$

由于

$$\left|f_1(x)\right|^2+\left|f_2(x)\right|^2-2\left|f_1(x)\right|\cdot\left|f_2(x)\right|=\Big[\left|f_1(x)\right|-\left|f_2(x)\right|\Big]^2\geq 0$$

因此

$$\left|f_1^*(x)f_2(x)\right|=\left|f_1(x)\right|\cdot\left|f_2(x)\right|\leq\frac{1}{2}\Big[\left|f_1(x)\right|^2+\left|f_2(x)\right|^2\Big]$$

所以积分$\displaystyle\int_a^b\left|f_1^*(x)f_2(x)\right|\mathrm{d}x$存在

函数的内积

Definition

设$f_1(x)$和$f_2(x)$是函数空间中的两个函数，它们的内积是 $(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$

又因为

$$\left|\int_a^b f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \left|f_1^*(x)f_2(x)\right|\mathrm{d}x$$

函数的内积

Definition

设$f_1(x)$和$f_2(x)$是函数空间中的两个函数，它们的内积是 $(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x$

又因为

$$\left| \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \left| f_1^*(x) f_2(x) \right| \mathrm{d}x$$

所以，只要$f_1(x)$和$f_2(x)$平方可积，那么它们的内积也一定存在

函数的内积

Definition

设$f_1(x)$和$f_2(x)$是函数空间中的两个函数，它们的内积是 $(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x$

在此基础上，可以定义函数$f(x)$的范数

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}$$

亦即函数$f(x)$的“长度”

评述

- 问题是：在此内积定义下，如果$(f, f) = 0$，$f(x)$并不见得在整个区间上处处为0
  事实是，$f(x)$可以在有限个点上不为0，但这些不为0的函数值并不会影响积分值，所以仍可以有$(f, f) = 0$
- 准确地说，如果$(f, f) = 0$，则$f(x)$可以在测度为零的点集上取非零值． 所以只能说$(f, f) = 0$隐含着$f(x)$几乎处处为0
- 如果采用广义的零函数的概念，把任何几乎处处为0的函数称为零函数，那么， 这里定义的内积也就符合内积公理中的第3条要求

评述

- 问题是：在此内积定义下，如果$(f, f) = 0$，$f(x)$并不见得在整个区间上处处为0
  事实是，$f(x)$可以在有限个点上不为0，但这些不为0的函数值并不会影响积分值，所以仍可以有$(f, f) = 0$
- 准确地说，如果$(f, f) = 0$，则$f(x)$可以在测度为零的点集上取非零值．所以只能说$(f, f) = 0$隐含着$f(x)$几乎处处为0
- 如果采用广义的零函数的概念，把任何几乎处处为0的函数称为零函数，那么，这里定义的内积也就符合内积公理中的第3条要求

评述

- 问题是：在此内积定义下，如果$(f, f) = 0$，$f(x)$并不见得在整个区间上处处为0
  事实是，$f(x)$可以在有限个点上不为0，但这些不为0的函数值并不会影响积分值，所以仍可以有$(f, f) = 0$
- 准确地说，如果$(f, f) = 0$，则$f(x)$可以在测度为零的点集上取非零值． 所以只能说$(f, f) = 0$隐含着$f(x)$几乎处处为0
- 如果采用广义的零函数的概念，把任何几乎处处为0的函数称为零函数，那么， 这里定义的内积也就符合内积公理中的第3条要求

讲授要点

1. 内积空间
   - 内积与内积空间
   - 正交性
   - 完备性
2. 函数空间
   - 函数的内积
   - 函数的正交归一性
   - 正交归一函数集的完备性

函数的正交归一性

若函数$f(x)$和$g(x)$满足

$$(f, g) \equiv \int_a^b f^*(x) g(x) \mathrm{d}x = 0$$

则称它们(在区间$[a, b]$上)正交

若函数$f(x)$和它自身的内积

$$(f, f) \equiv \int_a^b f^*(x) f(x) \mathrm{d}x = 1 \quad 亦即 \quad \|f\| = 1$$

则称$f(x)$是归一化的

函数的正交归一性

若函数$f(x)$和$g(x)$满足

$$(f, g) \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$$

则称它们(在区间$[a, b]$上)正交

若函数$f(x)$和它自身的内积

$$(f, f) \equiv \int_a^b f^*(x)f(x)\mathrm{d}x = 1 \quad 亦即 \quad \|f\| = 1$$

则称$f(x)$是归一化的

函数的正交归一性

合并起来，若对于函数集合$\{f_i\}$，恒有

$$(f_i,\ f_j) \equiv \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) \mathrm{d}x = \delta_{ij}$$

则称此函数集合正交归一

Example

函数集合$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{inx},\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$在区间$[-\pi,\ \pi]$上正交归一

函数的正交归一性

合并起来，若对于函数集合$\{f_i\}$，恒有

$$(f_i, f_j) \equiv \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) \mathrm{d}x = \delta_{ij}$$

则称此函数集合正交归一

Example

函数集合$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$在区间$[-\pi, \pi]$上正交归一

讲授要点

1. 内积空间
   - 内积与内积空间
   - 正交性
   - 完备性
2. 函数空间
   - 函数的内积
   - 函数的正交归一性
   - 正交归一函数集的完备性

正交归一函数集的完备性概念

若对于(函数空间中的)任意函数$f(x)$，总可以表示成正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$的线性组合

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i(x)$$

则称正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$是完备的

1. 正交归一函数集的完备性概念总是和任意函数是否可以按该函数集展开相联系的

这里隐含了此函数集为可数集的假设

正交归一函数集的完备性概念

若对于(函数空间中的)任意函数$f(x)$，总可以表示成正交归一函数集$\{f_i, i=1,2,\cdots\}$的线性组合

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)$$

则称正交归一函数集$\{f_i, i=1,2,\cdots\}$是完备的

1. 正交归一函数集的完备性概念总是和任意函数是否可以按该函数集展开相联系的

这里隐含了此函数集为可数集的假设

正交归一函数集的完备性概念

若对于(函数空间中的)任意函数$f(x)$，总可以表示成正交归一函数集$\{f_i, i=1,2,\cdots\}$的线性组合

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x)$$

则称正交归一函数集$\{f_i, i=1,2,\cdots\}$是完备的

1. 正交归一函数集的完备性概念总是和任意函数是否可以按该函数集展开相联系的

这里隐含了此函数集为可数集的假设

正交归一函数集的完备性概念

若对于(函数空间中的)任意函数$f(x)$，总可以表示成正交归一函数集$\{f_i, i = 1, 2, \cdots\}$的线性组合

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x)$$

则称正交归一函数集$\{f_i, i = 1, 2, \cdots\}$是完备的

关于正交归一函数集中函数的数目(即空间的维数)，可以是有限的(空间的维数有限)，也可以是无穷(空间的维数为无穷)，但我们更关心于无穷维的函数空间

正交归一函数集的完备性概念

若对于(函数空间中的)任意函数$f(x)$，总可以表示成正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$的线性组合

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)$$

则称正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$是完备的

❷ 展开式应该对区间$[a,\ b]$内的每一点x都成立，或者说，对于区间$[a,\ b]$内的每一点x，级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)$都收敛于$f(x)$

这种收敛性称为逐点收敛

正交归一函数集的完备性概念

若对于(函数空间中的)任意函数$f(x)$，总可以表示成正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$的线性组合

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)$$

则称正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$是完备的

2. 展开式应该对区间$[a,\ b]$内的每一点x都成立，或者说，对于区间$[a,\ b]$内的每一点x，级数$\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)$都收敛于$f(x)$

   这种收敛性称为逐点收敛

正交归一函数集的完备性概念

若对于(函数空间中的)任意函数$f(x)$，总可以表示成正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$的线性组合

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i(x)$$

则称正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$是完备的

为了和广义零函数的概念相适应，也可以把展开式理解为左右两端相差一个广义的零函数，即将级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_if_i(x)$理解为平均收敛于$f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}c_if_i(x)\right|^2\mathrm{d}x=0$$

正交归一函数集的完备性概念

若对于(函数空间中的)任意函数$f(x)$，总可以表示成正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$的线性组合

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)$$

则称正交归一函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$是完备的

❸ 由函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$的正交归一性，可求得展开系数

$$c_i=\int_a^b f_i^*(x)f(x)\mathrm{d}x=(f_i,\ f)$$

❹ $$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right|^2 \mathrm{d}x$$

$$= (f,\, f) - \sum_{i=1}^{n} c_i^* (f_i,\, f) - \sum_{i=1}^{n} c_i (f,\, f_i) + \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$

$$= (f,\, f) - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$

因此，只要函数集$\{f_i, i = 1, 2, \cdots\}$是完备的，则根据级数的平均收敛性，就有

$$(f,\, f) = \sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(f_i,\, f)|^2$$

这就是函数集$\{f_i, i = 1, 2, \cdots\}$的完备性关系(Parseval方程)

❹
$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right|^2 \mathrm{d}x$$
$$= (f,\, f) - \sum_{i=1}^{n} c_i^* (f_i,\, f) - \sum_{i=1}^{n} c_i (f,\, f_i) + \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$
$$= (f,\, f) - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$

因此，只要函数集$\{f_i,\, i=1,2,\cdots\}$是完备的，则根据级数的平均收敛性，就有

$$(f,\, f) = \sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(f_i,\, f)|^2$$

这就是函数集$\{f_i,\, i=1,2,\cdots\}$的完备性关系(Parseval方程)

④
$$\begin{aligned}\int_a^b \left|f(x)-\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right|^2 \mathrm{d}x &= (f,\,f)-\sum_{i=1}^{n} c_i^*(f_i,\,f)-\sum_{i=1}^{n} c_i(f,\,f_i)+\sum_{i=1}^{n}\left|c_i\right|^2 \\ &= (f,\,f)-\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\end{aligned}$$

因此，只要函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$是完备的，则根据级数的平均收敛性，就有

$$(f,\,f)=\sum_{i=1}^{\infty}|c_n|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(f_i,\,f)|^2$$

这就是函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$的完备性关系(Parseval方程)

函数的最佳逼近

问题：设有正交归一的函数集$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$，然而不一定完备，如果用这个函数集的线性组合$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$来逼近$f(x)$，如何选择(与$n$无关的)组合系数$a_i$，可以得到最佳逼近，使误差

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) \right\|^2 \equiv \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) \right|^2 \mathrm{d}x$$

取极小？

函数的最佳逼近

仿照Parseval方程的证明方法，可以求得

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) \right|^2 \mathrm{d}x$$

$$= (f,\ f) - \sum_{i=1}^{n} a_i^*(f_i,\ f) - \sum_{i=1}^{n} a_i(f,\ f_i) + \sum_{i=1}^{n} \left|a_i\right|^2$$

函数的最佳逼近

仿照Parseval方程的证明方法，可以求得

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right|^2 \mathrm{d}x$$

$$= (f,\ f) - \sum_{i=1}^n a_i^* (f_i,\ f) - \sum_{i=1}^n a_i (f,\ f_i) + \sum_{i=1}^n |a_i|^2$$

$$= (f,\ f) - \sum_{i=1}^n a_i^* c_i - \sum_{i=1}^n a_i c_i^* + \sum_{i=1}^n a_i^* a_i$$

函数的最佳逼近

仿照Parseval方程的证明方法，可以求得

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|f(x)-\sum_{i=1}^n a_i f_i(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= (f,\ f)-\sum_{i=1}^n a_i^*(f_i,\ f)-\sum_{i=1}^n a_i(f,\ f_i)+\sum_{i=1}^n \left|a_i\right|^2 \\
&= (f,\ f)-\sum_{i=1}^n a_i^* c_i-\sum_{i=1}^n a_i c_i^*+\sum_{i=1}^n a_i^* a_i \\
&= (f,\ f)+\sum_{i=1}^n \left|a_i-c_i\right|^2-\sum_{i=1}^n c_i^* c_i
\end{aligned}$$

函数的最佳逼近

因此，当$a_i = c_i \equiv (f_i, f)$时，误差

$$(f, f) - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \geq 0$$

一定取极小值

函数的最佳逼近

因此，当$a_i = c_i \equiv (f_i, f)$时，误差

$$(f, f) - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \geq 0$$

一定取极小值．而且，随着项数n的增加，误差越来越小

函数的最佳逼近

因此，当$a_i = c_i \equiv (f_i, f)$时，误差

$$(f, f) - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \geq 0$$

一定取极小值．而且，随着项数n的增加，误差越来越小．但无论如何，总有

函数空间中的Bessel不等式

$$(f, f) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

函数的最佳逼近

因此，当$a_i = c_i \equiv (f_i, f)$时，误差

$$(f, f) - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \geq 0$$

一定取极小值．而且，随着项数n的增加，误差越来越小．但无论如何，总有

函数空间中的Bessel不等式

$$(f, f) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

等号(即Parseval方程)对应于函数集是完备的情形

函数空间的完备性概念

如果由空间内的函数组成的Cauchy序列的极限仍保持在该空间内，则称该空间为完备的

平方可积函数构成的空间是完备的

通常，把完备的内积空间称为Hilbert空间．这个概念，特别是可分的希尔伯特空间(此时空间的基是可数的)，在物理学中有广泛的应用

下面的讨论，实际上都是在Hilbert空间的范围内进行的

函数空间的完备性概念

如果由空间内的函数组成的Cauchy序列的极限仍保持在该空间内，则称该空间为完备的

平方可积函数构成的空间是完备的

通常，把完备的内积空间称为Hilbert空间．这个概念，特别是可分的希尔伯特空间(此时空间的基是可数的)，在物理学中有广泛的应用

下面的讨论，实际上都是在Hilbert空间的范围内进行的

函数空间的完备性概念

如果由空间内的函数组成的Cauchy序列的极限仍保持在该空间内，则称该空间为完备的

平方可积函数构成的空间是完备的

通常，把完备的内积空间称为Hilbert空间．这个概念，特别是可分的希尔伯特空间(此时空间的基是可数的)，在物理学中有广泛的应用

下面的讨论，实际上都是在Hilbert空间的范围内进行的

函数空间的完备性概念

如果由空间内的函数组成的Cauchy序列的极限仍保持在该空间内，则称该空间为完备的

平方可积函数构成的空间是完备的

通常，把完备的内积空间称为Hilbert空间．这个概念，特别是可分的希尔伯特空间(此时空间的基是可数的)，在物理学中有广泛的应用

下面的讨论，实际上都是在Hilbert空间的范围内进行的

函数内积概念的推广

函数内积的定义还可以进一步推广为

$$(f_1,\ f_2)_\rho = \int_a^b f_1^*(x)\, f_2(x)\, \rho(x)\, \mathrm{d}x$$

其中$\rho(x) \geq 0$且$\neq 0$

有关公式均需要作相应的修改

例如，关于函数平方可积的要求也应该修改为

$$\text{要求积分} \int_a^b \left|f(x)\right|^2 \rho(x)\, \mathrm{d}x \ \text{存在}$$

函数内积概念的推广

函数内积的定义还可以进一步推广为

$$(f_1,\ f_2)_\rho = \int_a^b f_1^*(x)\, f_2(x)\, \rho(x)\, \mathrm{d}x$$

其中$\rho(x) \geq 0$且$\neq 0$

有关公式均需要作相应的修改

例如，关于函数平方可积的要求也应该修改为

$$\text{要求积分} \int_a^b \big|f(x)\big|^2 \rho(x)\, \mathrm{d}x \text{ 存在}$$

函数内积概念的推广

函数内积的定义还可以进一步推广为

$$(f_1,\ f_2)_\rho = \int_a^b f_1^*(x)\, f_2(x)\, \rho(x)\, \mathrm{d}x$$

其中$\rho(x) \geq 0$ 且 $\neq 0$

有关公式均需要作相应的修改

例如，关于函数平方可积的要求也应该修改为

$$\text{要求积分}\quad \int_a^b \left|f(x)\right|^2 \rho(x)\, \mathrm{d}x \ \text{存在}$$