第九讲

柱函数（一）

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. Bessel函数与Neumann函数
   - Bessel方程的基本解
   - 递推关系
   - 渐近展开
2. 整数阶Bessel函数的性质
   - Bessel函数的生成函数
   - Bessel函数的积分表示

讲授要点

1. Bessel函数与Neumann函数
   - Bessel方程的基本解
   - 递推关系
   - 渐近展开
2. 整数阶Bessel函数的性质
   - Bessel函数的生成函数
   - Bessel函数的积分表示

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§17.1 — 17.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§11.1, 11.2
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§13.2

Bessel函数与Neumann函数

引言

Helmholtz方程在柱坐标系下分离变量，可得到

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[\underline{k^2-\lambda}-\frac{\mu}{r^2}\right]R(r)=0$$

若$k^2-\lambda\neq 0$，作变换$x=\sqrt{k^2-\lambda}r$, $y(x)=R(r)$，则方程变为(其中$\mu=\nu^2$)

(ν阶)Bessel方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{x^2}\right]y(x)=0$$

本讲及下一讲集中讨论Bessel方程的解及其性质，以及在分离变量法中的应用

引言

Helmholtz方程在柱坐标系下分离变量，可得到

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right]R(r)=0$$

若$k^2-\lambda\neq 0$，作变换$x=\sqrt{k^2-\lambda}r$, $y(x)=R(r)$，则方程变为(其中$\mu=\nu^2$)

(ν阶)Bessel方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{x^2}\right]y(x)=0$$

本讲及下一讲集中讨论Bessel方程的解及其性质，以及在分离变量法中的应用

引言

Helmholtz方程在柱坐标系下分离变量，可得到

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right]R(r)=0$$

若$k^2-\lambda\neq 0$，作变换$x=\sqrt{k^2-\lambda}r$, $y(x)=R(r)$，则方程变为(其中$\mu=\nu^2$)

(ν阶)Bessel方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{x^2}\right]y(x)=0$$

本讲及下一讲集中讨论Bessel方程的解及其性质，以及在分离变量法中的应用

讲授要点

1. Bessel函数与Neumann函数
   - Bessel方程的基本解
   - 递推关系
   - 渐近展开
2. 整数阶Bessel函数的性质
   - Bessel函数的生成函数
   - Bessel函数的积分表示

已有结果

Bessel方程(约定Re $\nu \geq 0$)

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{z^2}\right]w(z)=0$$

- Bessel方程有两个奇点：$z=0$(正则奇点)和$z=\infty$(非正则奇点)
- 在正则奇点$z=0$处，指标$\rho=\pm\nu$
- 当$\nu\neq$整数时，Bessel方程的两个(线性无关)正则解是

$$J_{\pm\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm\nu}$$

已有结果

Bessel方程(约定Re $\nu \geq 0$)

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{z^2}\right]w(z)=0$$

- Bessel方程有两个奇点：$z=0$(正则奇点)和$z=\infty$(非正则奇点)
- 在正则奇点$z=0$处，指标$\rho=\pm\nu$
- 当$\nu\neq$ 整数时，Bessel方程的两个(线性无关)正则解是

$$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm\nu}$$

已有结果

Bessel方程(约定Re $\nu \geq 0$)

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{z^2}\right]w(z)=0$$

- Bessel方程有两个奇点：$z=0$(正则奇点)和$z=\infty$(非正则奇点)
- 在正则奇点$z=0$处，指标$\rho=\pm\nu$
- 当$\nu\neq$ 整数时，Bessel方程的两个(线性无关)正则解是

$$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm\nu}$$

已有结果

Bessel方程(约定$\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$)

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{z^2}\right]w(z)=0$$

- Bessel方程有两个奇点：$z=0$(正则奇点)和$z=\infty$(非正则奇点)
- 在正则奇点$z=0$处，指标$\rho=\pm\nu$
- 当$\nu\neq$ 整数时，Bessel方程的两个(线性无关)正则解是

$$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm\nu}$$

已有结果

Bessel方程(约定Re $\nu \geq 0$)

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{z^2}\right]w(z)=0$$

- 也可取Bessel方程的第一解为

$$\mathrm{J}_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

而第二解为$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)$的线性组合

$$\mathrm{N}_\nu(z)=\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

已有结果

Bessel方程(约定$\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$)

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{z^2}\right]w(z)=0$$

- 当$\nu =$ 整数n时，$\mathrm{J}_n(z)$和$\mathrm{J}_{-n}(z)$线性相关

$$\mathrm{J}_{-n}(z)=(-)^n\mathrm{J}_n(z)$$

- 此时，Bessel方程的第一解仍是$\mathrm{J}_n(z)$，第二解则可取为

$$\mathrm{N}_n(z)=\lim_{\nu\to n}\mathrm{N}_\nu(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

已有结果

Bessel方程(约定Re $\nu \geq 0$)

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{z^2}\right]w(z)=0$$

- 当$\nu=$ 整数n时，$\mathrm{J}_n(z)$和$\mathrm{J}_{-n}(z)$线性相关

$$\mathrm{J}_{-n}(z)=(-)^n\mathrm{J}_n(z)$$

- 此时，Bessel方程的第一解仍是$\mathrm{J}_n(z)$，第二解则可取为

$$\mathrm{N}_n(z)=\lim_{\nu\to n}\mathrm{N}_\nu(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

已有结果

Bessel方程(约定Re $\nu \geq 0$)

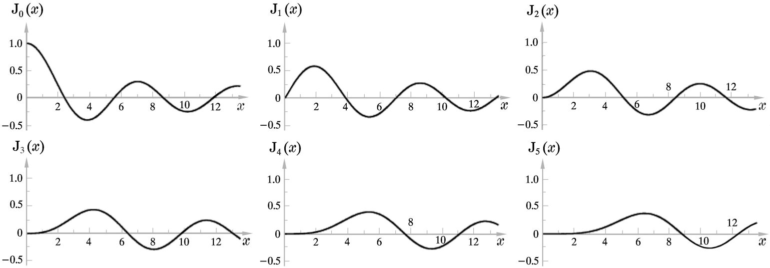
$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{z^2}\right]w(z)=0$$

应用L'Hospital法则，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_n(z)=&\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(z)\ln\frac{z}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(k+n)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}\end{aligned}$$

并且约定，当$n=0$时，需去掉表达式中第二项的有限和

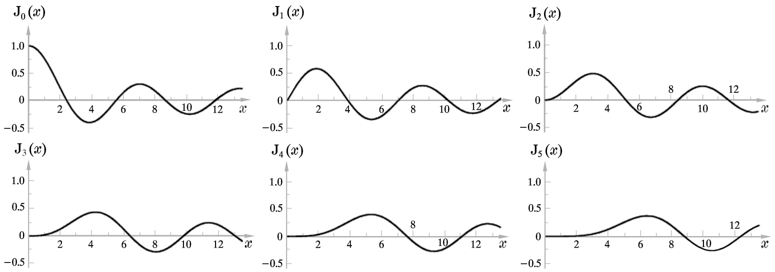
Bessel函数的图形



注意Bessel函数图形的特点

- 总体变化趋势
- $x = 0$附近的行为
- 零点的分布

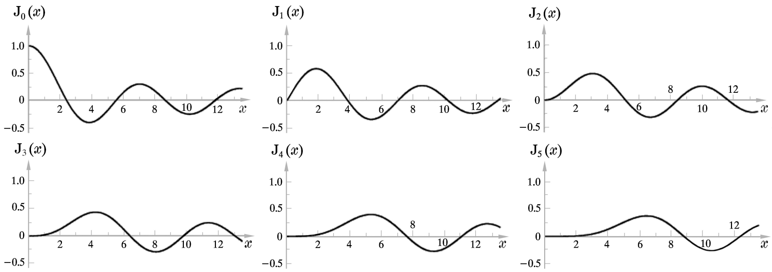
Bessel函数的图形



注意Bessel函数图形的特点

- 总体变化趋势
- $x = 0$附近的行为
- 零点的分布

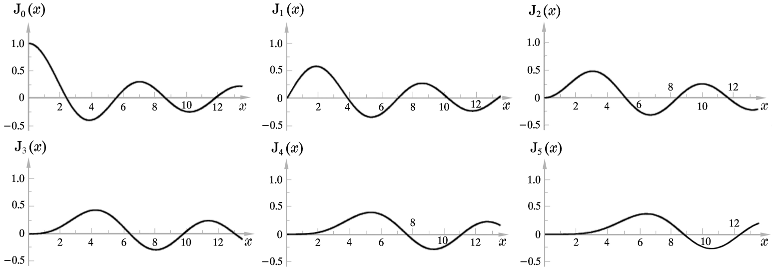
Bessel函数的图形



注意Bessel函数图形的特点

- 总体变化趋势
- $x = 0$附近的行为
- 零点的分布

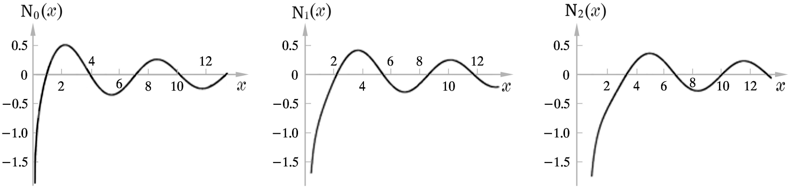
Bessel函数的图形



注意Bessel函数图形的特点

- 总体变化趋势
- $x = 0$附近的行为
- 零点的分布

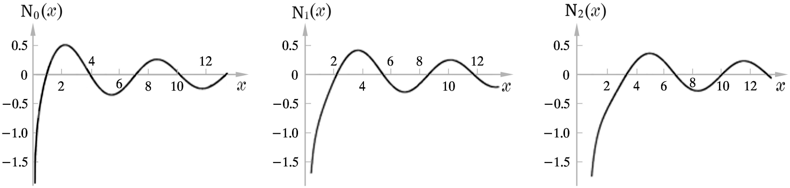
Neumann函数的图形



注意Neumann函数图形的特点

- 总体变化趋势
- $x = 0$附近的行为
- 零点的分布

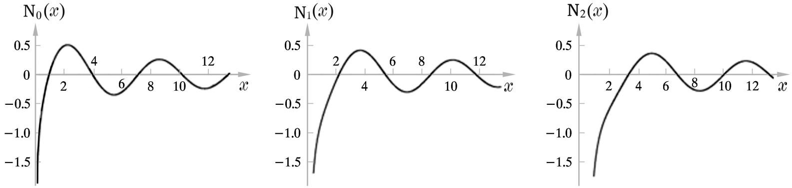
Neumann函数的图形



注意Neumann函数图形的特点

- 总体变化趋势
- $x = 0$附近的行为
- 零点的分布

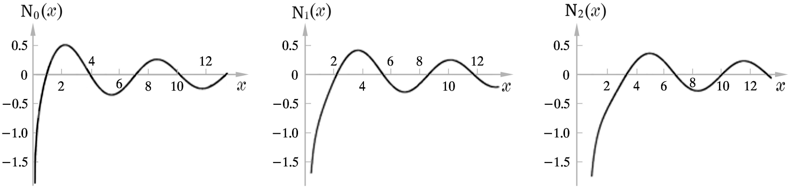
Neumann函数的图形



注意Neumann函数图形的特点

- 总体变化趋势
- $x = 0$附近的行为
- 零点的分布

Neumann函数的图形



注意Neumann函数图形的特点

- 总体变化趋势
- $x = 0$附近的行为
- 零点的分布

特别注意

Bessel函数和Neumann函数

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi \mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

作为多值函数，其定义仅适用于辐角范围

$$|\arg z| < \pi$$

- 级数表达式是Bessel函数的基本表达式，由此可以推出Bessel函数的一些其他性质，例如递推关系
- 应用Bessel函数的级数表达式，还可以计算某些类型的积分，例如被积函数为指数函数与Bessel函数的乘积的积分

- 级数表达式是Bessel函数的基本表达式，由此可以推出Bessel函数的一些其他性质，例如递推关系

- 应用Bessel函数的级数表达式，还可以计算某些类型的积分，例如被积函数为指数函数与Bessel函数的乘积的积分

例9.1

计算积分

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx) \mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}a > 0$$

Answer

例9.1

计算积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}a > 0$$

Answer

代入Bessel函数的级数表示，并逐项积分

例9.1

计算积分

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx) \mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\, a > 0$$

Answer

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx) \mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(k!)^2} \left(\frac{bx}{2}\right)^{2k} \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(k!)^2} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} x^{2k} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

例9.1

计算积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\,a > 0$$

Answer

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{2k}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\frac{(2k)!}{a^{2k+1}}\end{aligned}$$

例9.1

计算积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\,a > 0$$

Answer

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{2k}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}$$

例9.1

计算积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\,a>0$$

Answer

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{2k}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例9.1

计算积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\,a>0$$

Answer

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{2k}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

这种做法的难点是级数求和，求和时要有限制条件

$$|b/a|<1$$

例9.1

计算积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\,a > 0$$

Answer

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{2k}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

就本题而言，容易证明，原来的积分在$\mathrm{Re}\,a > 0$的任意闭区域中一致收敛，因而在$\mathrm{Re}\,a > 0$的任意区域内解析；而积分出的结果也在同一区域内解析

例9.1

计算积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}a > 0$$

Answer

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{2k}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

根据解析延拓的原理，可以去掉限制条件$|b/a| < 1$

讲授要点

1. Bessel函数与Neumann函数
   - Bessel方程的基本解
   - 递推关系
   - 渐近展开
2. 整数阶Bessel函数的性质
   - Bessel函数的生成函数
   - Bessel函数的积分表示

Bessel函数的基本递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathsf{J}_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}\mathsf{J}_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathsf{J}_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}\mathsf{J}_{\nu+1}(z)$$

Proof

Bessel函数的基本递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

Proof

$$\mathrm{J}_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^{k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

Bessel函数的基本递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]=z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]=-z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

Proof

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

由于级数在全平面收敛，所以可以逐项微商

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{z^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu)}\frac{z^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu-1}}=z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

Bessel函数的基本递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]=z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]=-z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

Proof

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^{k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

同理

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^{k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{z^{2k}}{2^{2k+\nu}}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^{k+1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+2)}\frac{z^{2k+1}}{2^{2k+\nu+1}}=-z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\end{aligned}$$

Bessel函数的其他递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

将此二递推关系写成

$$\nu z^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu}(z) + z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}'(z) = z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$
$$-\nu z^{-\nu-1}\mathrm{J}_{\nu}(z) + z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}'(z) = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

Bessel函数的其他递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]=z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right]=-z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

将此二递推关系写成

$$\nu z^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu}(z)+z^{\nu}\mathrm{J}'_{\nu}(z)=z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$
$$-\nu z^{-\nu-1}\mathrm{J}_{\nu}(z)+z^{-\nu}\mathrm{J}'_{\nu}(z)=-z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

消去$\mathrm{J}_{\nu}(z)$或$\mathrm{J}'_{\nu}(z)$，又可以得到两个新的递推关系

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)=2\mathrm{J}'_{\nu}(z)$$
$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}\mathrm{J}_{\nu}(z)$$

Bessel函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z) = 2\mathrm{J}_{\nu}'(z)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z) + \mathrm{J}_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\mathrm{J}_{\nu}(z)$$

- 任意整数阶的Bessel函数，总可以用$\mathrm{J}_0(z)$和$\mathrm{J}_1(z)$表示
- 特别是，在$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$中令$\nu = 0$

$$\mathrm{J}_0'(z) = -\mathrm{J}_1(z)$$

Bessel函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z) = 2\mathrm{J}'_{\nu}(z)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z) + \mathrm{J}_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\mathrm{J}_{\nu}(z)$$

- 任意整数阶的Bessel函数，总可以用$\mathrm{J}_0(z)$和$\mathrm{J}_1(z)$表示
- 特别是，在$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$中令$\nu = 0$

$$\mathrm{J}'_0(z) = -\mathrm{J}_1(z)$$

Bessel函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z) = 2\mathrm{J}_{\nu}'(z)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z) + \mathrm{J}_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\mathrm{J}_{\nu}(z)$$

- 任意整数阶的Bessel函数，总可以用$\mathrm{J}_0(z)$和$\mathrm{J}_1(z)$表示
- 特别是，在$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$中令$\nu = 0$

$$\mathrm{J}_0'(z) = -\mathrm{J}_1(z)$$

Neumann函数的基本递推关系

$$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathrm{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathrm{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathrm{J}_{-\nu}(z)\right]\\ &= \cdots\\ &= z^\nu \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathrm{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathrm{J}_{-\nu}(z)\right]\\ &= \cdots\\ &= -z^{-\nu} \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\end{aligned}$$

请补足计算

Neumann函数的基本递推关系

$$\mathrm{N}_\nu(z)=\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{N}_\nu(z)\right]=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{J}_\nu(z)\right]-\frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{J}_{-\nu}(z)\right]$$

$$=\cdots$$

$$=z^\nu\mathrm{N}_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)\right]=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\right]-\frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(z)\right]$$

$$=\cdots$$

$$=-z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)$$

请补足计算

Neumann函数的基本递推关系

$$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{J}_{-\nu}(z)\right] \\ &= \cdots \\ &= z^\nu\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(z)\right] \\ &= \cdots \\ &= -z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\end{aligned}$$

请补足计算

Neumann函数的基本递推关系

$$\mathrm{N}_\nu(z)=\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{N}_\nu(z)\right]&=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{J}_\nu(z)\right]-\frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{J}_{-\nu}(z)\right]\\&=\cdots\\&=z^\nu\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)\right]&=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\right]-\frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(z)\right]\\&=\cdots\\&=-z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\end{aligned}$$

Neumann函数的基本递推关系

$$\mathsf{N}_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi\,\mathsf{J}_\nu(z) - \mathsf{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathsf{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathsf{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathsf{J}_{-\nu}(z)\right] \\ &= \cdots \\ &= z^\nu \mathsf{N}_{\nu-1}(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathsf{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathsf{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathsf{J}_{-\nu}(z)\right] \\ &= \cdots \\ &= -z^{-\nu} \mathsf{N}_{\nu+1}(z)\end{aligned}$$

请补足计算

Neumann函数的基本递推关系

$$\mathrm{N}_\nu(z)=\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{N}_\nu(z)\right]&=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{J}_\nu(z)\right]-\frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu\mathrm{J}_{-\nu}(z)\right]\\&=\cdots\\&=z^\nu\mathrm{N}_{\nu-1}(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{N}_\nu(z)\right]&=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\right]-\frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(z)\right]\\&=\cdots\\&=-z^{-\nu}\mathrm{N}_{\nu+1}(z)\end{aligned}$$

请补足计算

Neumann函数的基本递推关系

$$\mathsf{N}_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi\,\mathsf{J}_\nu(z) - \mathsf{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathsf{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathsf{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathsf{J}_{-\nu}(z)\right] \\ &= \cdots \\ &= z^\nu \mathsf{N}_{\nu-1}(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathsf{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathsf{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathsf{J}_{-\nu}(z)\right] \\ &= \cdots \\ &= -z^{-\nu} \mathsf{N}_{\nu+1}(z)\end{aligned}$$

请补足计算

Neumann函数的基本递推关系

$$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathrm{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathrm{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu \mathrm{J}_{-\nu}(z)\right] \\ &= \cdots \\ &= z^\nu \mathrm{N}_{\nu-1}(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathrm{N}_\nu(z)\right] &= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(z)\right] - \frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathrm{J}_{-\nu}(z)\right] \\ &= \cdots \\ &= -z^{-\nu} \mathrm{N}_{\nu+1}(z)\end{aligned}$$

请补足计算

例9.2　计算定积分

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x) x \mathrm{d}x \text{，其中} \mathrm{J}_0(\mu)=0$$

Answer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\right] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x) \Longrightarrow \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(\mu x)\right] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(\mu x)$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x) x \mathrm{d}x &= \frac{1}{\mu}\int_0^1 \left(1-x^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x \mathrm{J}_1(\mu x)\right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mu}\left(1-x^2\right) x \mathrm{J}_1(\mu x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\mu}\int_0^1 x^2 \mathrm{J}_1(\mu x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\mu^2} x^2 \mathrm{J}_2(\mu x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\mu^2}\mathrm{J}_2(\mu)\end{aligned}$$

例9.2 计算定积分

$$\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{J}_0(\mu x)x\mathrm{d}x\text{，其中}\mathrm{J}_0(\mu)=0$$

Answer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\right] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x) \Longrightarrow \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(\mu x)\right] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(\mu x)$$

所以

$$\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{J}_0(\mu x)x\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu}\int_0^1 (1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\mathrm{J}_1(\mu x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\mu}(1-x^2)\,x\mathrm{J}_1(\mu x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\mu}\int_0^1 x^2\mathrm{J}_1(\mu x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\mu^2}x^2\mathrm{J}_2(\mu x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\mu^2}\mathrm{J}_2(\mu)$$

例9.2 计算定积分

$$\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{J}_0(\mu x)x\mathrm{d}x\text{，其中}\mathrm{J}_0(\mu)=0$$

Answer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\right]=x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x)\Longrightarrow \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(\mu x)\right]=x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(\mu x)$$

所以

$$\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{J}_0(\mu x)x\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu}\int_0^1 (1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\mathrm{J}_1(\mu x)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\mu}(1-x^2)\,x\mathrm{J}_1(\mu x)\Big|_0^1+\frac{2}{\mu}\int_0^1 x^2\mathrm{J}_1(\mu x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\mu^2}x^2\mathrm{J}_2(\mu x)\Big|_0^1=\frac{2}{\mu^2}\mathrm{J}_2(\mu)$$

例9.2　计算定积分

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x) x \mathrm{d}x\text{，其中}\mathrm{J}_0(\mu)=0$$

Answer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\right] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x) \Longrightarrow \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(\mu x)\right] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(\mu x)$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x) x \mathrm{d}x &= \frac{1}{\mu}\int_0^1 \left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\mathrm{J}_1(\mu x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mu}\left(1-x^2\right) x\mathrm{J}_1(\mu x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\mu}\int_0^1 x^2 \mathrm{J}_1(\mu x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\mu^2} x^2 \mathrm{J}_2(\mu x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\mu^2}\mathrm{J}_2(\mu)\end{aligned}$$

例9.2 计算定积分

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x) x \mathrm{d}x = \frac{2}{\mu^2} \mathrm{J}_2(\mu) \qquad 其中\mathrm{J}_0(\mu)=0$$

进一步化简

令递推关系$\mathrm{J}_{\nu-1}(x) + \mathrm{J}_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(x)$中$\nu = 1$

$$\mathrm{J}_0(x) + \mathrm{J}_2(x) = \frac{2}{x}\mathrm{J}_1(x)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{J}_0(\mu)=0} \qquad \mathrm{J}_2(\mu) = \frac{2}{\mu}\mathrm{J}_1(\mu)$$

代入即得 $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x) x \mathrm{d}x = \frac{4}{\mu^3}\mathrm{J}_1(\mu)$

例9.2 计算定积分

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x) x \mathrm{d}x = \frac{2}{\mu^2}\mathrm{J}_2(\mu) \qquad \text{其中} \mathrm{J}_0(\mu)=0$$

进一步化简

令递推关系$\mathrm{J}_{\nu-1}(x)+\mathrm{J}_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(x)$中$\nu=1$

$$\mathrm{J}_0(x)+\mathrm{J}_2(x)=\frac{2}{x}\mathrm{J}_1(x)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{J}_0(\mu)=0} \qquad \mathrm{J}_2(\mu)=\frac{2}{\mu}\mathrm{J}_1(\mu)$$

代入即得 $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x) x \mathrm{d}x = \frac{4}{\mu^3}\mathrm{J}_1(\mu)$

例9.2 计算定积分

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x)x\mathrm{d}x = \frac{2}{\mu^2}\mathrm{J}_2(\mu) \qquad 其中\mathrm{J}_0(\mu)=0$$

进一步化简

令递推关系$\mathrm{J}_{\nu-1}(x) + \mathrm{J}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(x)$中$\nu = 1$

$$\mathrm{J}_0(x) + \mathrm{J}_2(x) = \frac{2}{x}\mathrm{J}_1(x)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{J}_0(\mu)=0} \qquad \mathrm{J}_2(\mu) = \frac{2}{\mu}\mathrm{J}_1(\mu)$$

代入即得 $$\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu x)x\mathrm{d}x = \frac{4}{\mu^3}\mathrm{J}_1(\mu)$$

讲授要点

1. Bessel函数与Neumann函数
   - Bessel方程的基本解
   - 递推关系
   - 渐近展开
2. 整数阶Bessel函数的性质
   - Bessel函数的生成函数
   - Bessel函数的积分表示

介绍两种类型的渐近展开

- $z \to 0$时
- $z \to \infty$时

介绍两种类型的渐近展开

- $z \to 0$时
- $z \to \infty$时

介绍两种类型的渐近展开

- $z \to 0$时
- $z \to \infty$时

Bessel函数的渐近展开 (不证)

$z \longrightarrow 0$时Bessel函数的渐近展开

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu + O\left(z^{\nu+2}\right)$$

$z \longrightarrow \infty$时Bessel函数的渐近展开

$$\mathrm{J}_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg z| < \pi$$

Bessel函数的渐近展开 （不证）

$z \longrightarrow 0$时Bessel函数的渐近展开

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu + O\left(z^{\nu+2}\right)$$

$z \longrightarrow \infty$时Bessel函数的渐近展开

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg z| < \pi$$

Neumann函数的渐近展开 (不证)

$z \longrightarrow 0$时Neumann函数的渐近展开

$$\mathrm{N}_\nu(z) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$$

特别是$\nu = 0$

$$\mathrm{N}_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}$$

所以，不论ν是否为整数，$\mathrm{N}_\nu(x)$在$x = 0$点都发散

$z \longrightarrow \infty$时Neumann函数的渐近展开

$$\mathrm{N}_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg z| < \pi$$

Neumann函数的渐近展开 （不证）

$z \to 0$时Neumann函数的渐近展开

$$\mathrm{N}_\nu(z) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$$

特别是$\nu = 0$

$$\mathrm{N}_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}$$

所以，不论ν是否为整数，$\mathrm{N}_\nu(x)$在$x = 0$点都发散

$z \to \infty$时Neumann函数的渐近展开

$$\mathrm{N}_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg z| < \pi$$

Bessel方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{x^2}\right]y(x)=0$$

中的$\nu^2\equiv\mu$，通常是由本征值问题

$$\Phi''+\mu\Phi=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)\quad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

决定的，$\mu=m^2, m=0,1,2,\cdots$. 因此，值得特别介绍

整数阶Bessel函数特有的性质

讲授要点

1. Bessel函数与Neumann函数
   - Bessel方程的基本解
   - 递推关系
   - 渐近展开
2. 整数阶Bessel函数的性质
   - Bessel函数的生成函数
   - Bessel函数的积分表示

Bessel函数的生成函数

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n,\qquad 0<|t|<\infty$$

证明见“Laurent展开”

Bessel函数的生成函数

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n,\qquad 0<|t|<\infty$$

证明见“Laurent展开”

Bessel函数生成函数展开式的特殊形式

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n, \qquad 0<|t|<\infty$$

令$t=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\theta}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\\&=\mathrm{J}_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(z)\cos n\theta\end{aligned}$$

这是$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\theta}$的余弦展开

Bessel函数生成函数展开式的特殊形式

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n,\qquad 0<|t|<\infty$$

令$t=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\theta}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\\&=\mathrm{J}_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(z)\cos n\theta\end{aligned}$$

这是$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\theta}$的余弦展开

平面波按柱面波展开

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\theta} = \mathrm{J}_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^n \mathrm{J}_n(z)\cos n\theta$$

如果再令$z = kr$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} = \mathrm{J}_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^n \mathrm{J}_n(kr)\cos n\theta$$

把r和θ理解为柱坐标系中的坐标变量，并且把k理解为波数，则上式可解释为“平面波按柱面波展开”：左端代表平面波，右端代表无穷多个柱面波

平面波按柱面波展开

$$e^{iz\cos\theta} = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z)\cos n\theta$$

如果再令$z = kr$

$$e^{ikr\cos\theta} = J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr)\cos n\theta$$

把r和θ理解为柱坐标系中的坐标变量，并且把k理解为波数，则上式可解释为“平面波按柱面波展开”：左端代表平面波，右端代表无穷多个柱面波

平面波按柱面波展开

$$e^{iz\cos\theta} = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z)\cos n\theta$$

如果再令$z = kr$

$$e^{ikr\cos\theta} = J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr)\cos n\theta$$

把r和θ理解为柱坐标系中的坐标变量，并且把k理解为波数，则上式可解释为“平面波按柱面波展开”：左端代表平面波，右端代表无穷多个柱面波

平面波按柱面波展开

取相位的时间因子为$e^{-i\omega t}$

- $e^{ikr\cos\theta}$是沿正x轴方向传播的平面波，因为它的等相位面是

$$kr\cos\theta - \omega t = 常数$$

- $J_n(kr)$描述的是柱面波，因为

$$J_n(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

等相位面　$kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \mp \omega t = 常数$　是柱面

平面波按柱面波展开

取相位的时间因子为$e^{-i\omega t}$

- $e^{ikr\cos\theta}$是沿正x轴方向传播的平面波，因为它的等相位面是

$$kr\cos\theta - \omega t = 常数$$

- $J_n(kr)$描述的是柱面波，因为

$$J_n(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

等相位面 $kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \mp \omega t = 常数$ 是柱面

平面波按柱面波展开

取相位的时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$是沿正$x$轴方向传播的平面波，因为它的等相位面是

$$kr\cos\theta - \omega t = 常数$$

- $\mathrm{J}_n(kr)$描述的是柱面波，因为

$$\mathrm{J}_n(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

等相位面 $\quad kr - \dfrac{\nu\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} \mp \omega t = 常数 \quad$ 是柱面

讲授要点

1. Bessel函数与Neumann函数
   - Bessel方程的基本解
   - 递推关系
   - 渐近展开
2. 整数阶Bessel函数的性质
   - Bessel函数的生成函数
   - Bessel函数的积分表示

Bessel函数的积分表示

在

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n,\qquad 0<|t|<\infty$$

中令$t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

这就是函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\theta}$的Fourier展开式(复数形式)

Bessel函数的积分表示

在

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathsf{J}_n(z)t^n,\qquad 0<|t|<\infty$$

中令$t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathsf{J}_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

这就是函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\theta}$的Fourier展开式(复数形式)

Bessel函数的积分表示

由Fourier展开的系数公式，就能得到

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)^* \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(z\sin\theta-n\theta)+\mathrm{i}\sin(z\sin\theta-n\theta)]\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

在右端积分的被积函数中，虚部是奇函数，积分为0，所以就得到$\mathrm{J}_n(z)$的积分表示

$\mathrm{J}_n(z)$的积分表示

$$\mathrm{J}_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta$$

Bessel函数的积分表示

由Fourier展开的系数公式，就能得到

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_n(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sin\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)^* \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(z\sin\theta - n\theta) + \mathrm{i}\sin(z\sin\theta - n\theta)]\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

在右端积分的被积函数中，虚部是奇函数，积分为0，所以就得到$\mathrm{J}_n(z)$的积分表示

$\mathrm{J}_n(z)$的积分表示

$$\mathrm{J}_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta$$

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx \quad \mathrm{Re}\, a > 0$$

Answer

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \int_0^\infty e^{-ax} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ibx\sin\theta} d\theta \right] dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-(a-ib\sin\theta)x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a - ib\sin\theta}$$

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}a > 0$$

Answer

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx\sin\theta}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b\sin\theta)x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\mathrm{i}b\sin\theta}\end{aligned}$$

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}a > 0$$

Answer

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ibx\sin\theta}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(a-ib\sin\theta)x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-ib\sin\theta}\end{aligned}$$

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}a > 0$$

Answer

用留数定理计算

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a - \mathrm{i}b\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{-bz^2+2az+b}$$

$$= \frac{1}{-bz+a}\bigg|_{z=(a-\sqrt{a^2+b^2})/b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\,a > 0$$

Answer

用留数定理计算

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\mathrm{i}b\sin\theta}\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{-bz^2+2az+b}\\ &= \frac{1}{-bz+a}\bigg|_{z=(a-\sqrt{a^2+b^2})/b}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\,a > 0$$

Answer

用留数定理计算

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\mathrm{i}b\sin\theta}\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{-bz^2+2az+b}\\ &= \frac{1}{-bz+a}\bigg|_{z=(a-\sqrt{a^2+b^2})/b}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\,a > 0$$

Answer

用留数定理计算

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\mathrm{i}b\sin\theta}\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{-bz^2+2az+b}\\ &= \left.\frac{1}{-bz+a}\right|_{z=(a-\sqrt{a^2+b^2})/b}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}\,a > 0$$

评述

- 就本题而言，这种做法要比代入Bessel函数的级数表达式更容易些
- 现在的计算步骤明确，不像级数求和更具有技巧性
- 另一个好处是不需作解析延拓

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{Re}a > 0$$

评述

- 就本题而言，这种做法要比代入Bessel函数的级数表达式更容易些
- 现在的计算步骤明确，不像级数求和更具有技巧性
- 另一个好处是不需作解析延拓

Bessel函数积分表示的应用

重新计算定积分

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x \qquad \mathrm{Re}\,a > 0$$

评述

- 就本题而言，这种做法要比代入Bessel函数的级数表达式更容易些
- 现在的计算步骤明确，不像级数求和更具有技巧性
- 另一个好处是不需作解析延拓