第　五　讲

分离变量法(四)

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. 圆形区域内的Laplace方程第一类边值问题
   - 定解问题的正确提法
   - 定解问题的求解
2. 正交曲面坐标系下Helmholtz方程的分离变量
   - 柱坐标系下的Helmholtz方程的分离变量
   - 球坐标系下的Helmholtz方程的分离变量

讲授要点

1. 圆形区域内的Laplace方程第一类边值问题
   - 定解问题的正确提法
   - 定解问题的求解
2. 正交曲面坐标系下Helmholtz方程的分离变量
   - 柱坐标系下的Helmholtz方程的分离变量
   - 球坐标系下的Helmholtz方程的分离变量

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§15.4, 15.5, 15.6
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§8.4, 9.1
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§12.1, 12.1, 13.1

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§15.4, 15.5, 15.6
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§8.4, 9.1
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§12.1, 12.1, 13.1

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§15.4, 15.5, 15.6
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§8.4, 9.1
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§12.1, 12.1, 13.1

讲授要点

1. 圆形区域内的Laplace方程第一类边值问题
   - 定解问题的正确提法
   - 定解问题的求解
2. 正交曲面坐标系下Helmholtz方程的分离变量
   - 柱坐标系下的Helmholtz方程的分离变量
   - 球坐标系下的Helmholtz方程的分离变量

圆形区域中的稳定问题

定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad x^2 + y^2 < a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2} = f$$

分析

圆形区域中的稳定问题

定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad x^2+y^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=f$$

分析

在直角坐标系下，方程(二维Laplace方程)当然可以分离变量．但边界条件显然不能． 由于边界的形状是圆形，很自然地应该采用平面极坐标系

圆形区域中的稳定问题

定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad x^2+y^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=f$$

分析

在平面极坐标系中，原来的定解问题应该改写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

圆形区域中的稳定问题

定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad x^2+y^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=f$$

分析

以下可按照分离变量法的标准步骤求解 (?)

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

令$u(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)$

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

令$u(r,\phi)=R(r)\varPhi(\phi)$，代入方程，有

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\varPhi+\frac{R}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\varPhi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

令$u(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)$，代入方程，有

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=\lambda$$

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

因此，可以分离变量

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\lambda\Phi=0$$

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

但是边界条件

$$R(a)\varPhi(\phi)=f(\phi)$$

仍然不能分离变量，因为边界条件是非齐次的

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

我们尽管能够将齐次方程分离变量，得到两个含有待定参数的齐次常微分方程， 但是并没有相应的齐次边界条件与之配合而构成一个本征值问题

在平面极坐标系下应用分离变量法，又遇到了新的特殊的困难！

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad x^2+y^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=f$$

是适定的定解问题吗?

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad x^2+y^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=f$$

是适定的定解问题吗? 是!

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

是适定的定解问题吗?

圆形区域中的稳定问题

平面极坐标中的方程与边界条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

分析

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

是适定的定解问题吗？ 不是！

圆形区域中的稳定问题

分析

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

并不完全等价于原来的定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad x^2+y^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=f$$

圆形区域中的稳定问题

分析

第一，在数学上，原来定解问题的微分方程在圆内处处成立

圆形区域中的稳定问题

分析

第一，在数学上，原来定解问题的微分方程在圆内处处成立；然而变换到平面极坐标后，方程在区间的端点 $\phi = 0$和$\phi = 2\pi$并不成立

圆形区域中的稳定问题

分析

第一，在数学上，原来定解问题的微分方程在圆内处处成立；然而变换到平面极坐标后，方程在区间的端点 $\phi = 0$和$\phi = 2\pi$并不成立

严格说，在平面极坐标中，自变量ϕ的变化范围是$[0, 2\pi]$

圆形区域中的稳定问题

分析

第一，在数学上，原来定解问题的微分方程在圆内处处成立；然而变换到平面极坐标后，方程在区间的端点 $\phi=0$和$\phi=2\pi$并不成立

严格说，在平面极坐标中，自变量ϕ的变化范围是$[0,2\pi]$. 因为 $u(r,\phi)$在端点$\phi=0$和$\phi=2\pi$处的偏导数没有定义， 充其量最多也只能定义$u(r,\phi)$在两个端点处的单侧偏导数

圆形区域中的稳定问题

分析

$\phi = 0$和$\phi = 2\pi$这两个端点纯粹是由于采用平面极坐标系描写圆形而出现的，并非原始问题的几何边界

圆形区域中的稳定问题

分析

$\phi = 0$和$\phi = 2\pi$这两个端点纯粹是由于采用平面极坐标系描写圆形而出现的，并非原始问题的几何边界，在原始的定解问题中，就谈不上要指定相应的边界条件

圆形区域中的稳定问题

分析

$\phi = 0$和$\phi = 2\pi$这两个端点纯粹是由于采用平面极坐标系描写圆形而出现的，并非真正的几何边界，在原始的定解问题中，就谈不上要指定相应的边界条件．这样就导致转换到平面极坐标后，缺少$u(r, \phi)$在$\phi = 0$和$\phi = 2\pi$处所应当满足的边界条件

圆形区域中的稳定问题

分析

考虑到平面极坐标系的特点，$(r, \phi = 0)$和$(r, \phi = 2\pi)$是平面上的同一点，所以，作为完整的定解问题，应当补充上周期条件

$$u(r,\phi)\Big|_{\phi=0} = u(r,\phi)\Big|_{\phi=2\pi}$$
$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0} = \frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=2\pi}$$

圆形区域中的稳定问题

分析

考虑到平面极坐标系的特点，$(r, \phi = 0)$和$(r, \phi = 2\pi)$是平面上的同一点，所以，作为完整的定解问题，应当补充上周期条件

$$u(r,\phi)\Big|_{\phi=0} = u(r,\phi)\Big|_{\phi=2\pi}$$
$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0} = \frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

这样，上面提到的由于把Laplace方程从直角坐标系转换到极坐标系时而发生的一部分损失，可以通过周期条件而得到补偿

圆形区域中的稳定问题

分析

第二，原来的方程在坐标原点$(x, y) = (0, 0)$也是成立的

圆形区域中的稳定问题

分析

第二，原来的方程在坐标原点$(x, y) = (0, 0)$也是成立的．但是，变换到平面极坐标后，方程在$r = 0$点并不成立

圆形区域中的稳定问题

分析

第二，原来的方程在坐标原点$(x, y) = (0, 0)$也是成立的．但是，变换到平面极坐标后，方程在$r = 0$点并不成立． 严格说，在平面极坐标中，自变量r的变化范围是$[0, a]$

圆形区域中的稳定问题

分析

第二，原来的方程在坐标原点$(x, y) = (0, 0)$也是成立的．但是，变换到平面极坐标后，方程在$r = 0$点并不成立．严格说，在平面极坐标中，自变量r的变化范围是$[0, a]$．因为$u(r, \phi)$在$r = 0$点的偏导数也并没有定义，充其量也只能定义$u(r, \phi)$在$r = 0$点的单侧偏导数

圆形区域中的稳定问题

分析

$r=0$点作为自变量r的端点，也纯粹是由采用极坐标系而出现的，它并不是圆形区域的几何边界

圆形区域中的稳定问题

分析

$r=0$点作为自变量r的端点，也纯粹是由采用极坐标系而出现的，它并不是圆形区域的几何边界． 这样也还需要补充上$u(r,\phi)$在$r=0$点所应当满足的边界条件

圆形区域中的稳定问题

分析

考虑到原来的方程是齐次的，在圆内(包括坐标原点)是无源的，因此，$u(r,\phi)$在坐标原点应当有界，应当要补充上有界条件

$$u(r,\phi)\Big|_{r=0}\text{有界}$$

圆形区域中的稳定问题

分析

考虑到原来的方程是齐次的，在圆内(包括坐标原点)是无源的，因此，$u(r,\phi)$在坐标原点应当有界，应当要补充上有界条件

$$u(r,\phi)\Big|_{r=0}\text{有界}$$

这样，上面提到的由于把Laplace方程从直角坐标系转换到极坐标系时而发生的一部分损失，可以通过有界条件而得到补偿

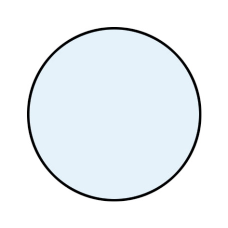
小结(一)

原始定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad x^2+y^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=f$$

的成立区域是

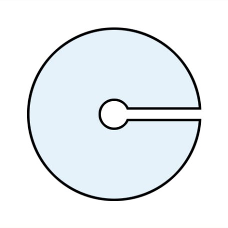


"转换"后的问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \quad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

的成立区域是



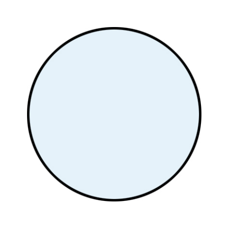
小结(一)

原始定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad x^2+y^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=f$$

的成立区域是

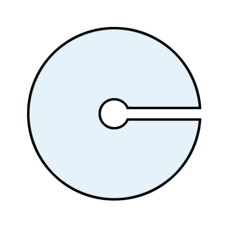


“转换”后的问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \quad 0<r<a$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi)$$

的成立区域是



小结(二)

原始定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad x^2+y^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=f$$

小结(二)

在转换到平面极坐标系后，应该变为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<\phi<2\pi,\ 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\Big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\Big|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad 0<\phi<2\pi$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi) \qquad 0<\phi<2\pi$$

讲授要点

1. 圆形区域内的Laplace方程第一类边值问题
   - 定解问题的正确提法
   - 定解问题的求解
2. 正交曲面坐标系下Helmholtz方程的分离变量
   - 柱坐标系下的Helmholtz方程的分离变量
   - 球坐标系下的Helmholtz方程的分离变量

定解问题的求解

定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0 \qquad 0<\phi<2\pi,\ 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\Big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\Big|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad 0<\phi<2\pi$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi) \qquad 0<\phi<2\pi$$

求解步骤

定解问题的求解

定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<\phi<2\pi,\ 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\big|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\big|_{r=0}\text{有界} \qquad 0<\phi<2\pi$$

$$u\big|_{r=a}=f(\phi) \qquad 0<\phi<2\pi$$

求解步骤

(1) 将方程及(部分齐次)边界条件分离变量

定解问题的求解

定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<\phi<2\pi,\ 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\big|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\big|_{r=0}\text{有界} \qquad 0<\phi<2\pi$$

$$u\big|_{r=a}=f(\phi) \qquad 0<\phi<2\pi$$

求解步骤

(2) 求解本征值问题

定解问题的求解

定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<\phi<2\pi,\ 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\Big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\Big|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad 0<\phi<2\pi$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi) \qquad 0<\phi<2\pi$$

求解步骤

(3) 求(满足方程及齐次边界条件的)特解，叠加出一般解

定解问题的求解

定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \qquad 0<\phi<2\pi,\ 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\Big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\Big|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi} \qquad 0<r<a$$

$$u(r,\phi)\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad 0<\phi<2\pi$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\phi) \qquad 0<\phi<2\pi$$

求解步骤

(4) 利用(非齐次)边界条件定叠加系数

定解问题的求解

(1) 将方程及(部分齐次)边界条件分离变量

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} & r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0 \\ & \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\lambda\Phi=0 \end{aligned}$$

定解问题的求解

(1) 将方程及(部分齐次)边界条件分离变量

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \implies \begin{array}{l} r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\lambda\Phi=0 \end{array}$$

$$u(r,\phi)\Big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\Big|_{\phi=2\pi} \implies \Phi(0)=\Phi(2\pi)$$

定解问题的求解

(1) 将方程及(部分齐次)边界条件分离变量

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0 \implies \begin{aligned} & r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0 \\ & \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\lambda\Phi=0 \end{aligned}$$

$$u(r,\phi)\big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\big|_{\phi=2\pi} \implies \Phi(0)=\Phi(2\pi)$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=2\pi} \implies \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$\lambda = 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi_0(\phi) = A_0\phi + B_0$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$\lambda = 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi_0(\phi) = A_0\phi + B_0$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)\qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

$\lambda=0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi_0(\phi)=A_0\phi+B_0$$

代入周期条件，有

$$B_0=A_0 2\pi+B_0\qquad A_0=A_0$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$\lambda = 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi_0(\phi) = A_0\phi + B_0$$

代入周期条件，有

$$B_0 = A_0 2\pi + B_0 \qquad A_0 = A_0$$

因此

$$A_0 = 0 \qquad B_0\text{任意}$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$\lambda = 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi_0(\phi) = A_0\phi + B_0$$

这说明$\lambda = 0$是本征值，相应的本征函数是

$$\Phi_0(\phi) = 1$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$\lambda \neq 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi(\phi) = A \sin\sqrt{\lambda}\phi + B \cos\sqrt{\lambda}\phi$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0$$

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

$\lambda\neq 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi(\phi)=A\sin\sqrt{\lambda}\phi+B\cos\sqrt{\lambda}\phi$$

代入周期条件，得到

$$B=A\sin\sqrt{\lambda}2\pi+B\cos\sqrt{\lambda}2\pi$$

$$A=A\cos\sqrt{\lambda}2\pi-B\sin\sqrt{\lambda}2\pi$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$\lambda \neq 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi(\phi) = A\sin\sqrt{\lambda}\phi + B\cos\sqrt{\lambda}\phi$$

这是关于系数A和B的线性齐次代数方程组，有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}2\pi & \cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1 \\ \cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1 & -\sin\sqrt{\lambda}2\pi \end{vmatrix} = 0$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)\qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

$\lambda\neq 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi(\phi)=A\sin\sqrt{\lambda}\phi+B\cos\sqrt{\lambda}\phi$$

这是关于系数A和B的线性齐次代数方程组，有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\sin\sqrt{\lambda}2\pi & \cos\sqrt{\lambda}2\pi-1\\ \cos\sqrt{\lambda}2\pi-1 & -\sin\sqrt{\lambda}2\pi\end{vmatrix}=0$$

即$2(\cos\sqrt{\lambda}2\pi-1)=0$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$\lambda \neq 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi(\phi) = A\sin\sqrt{\lambda}\phi + B\cos\sqrt{\lambda}\phi$$

这样又可以求得本征值

$$\lambda_m = m^2 \qquad m = 1, 2, 3, \cdots$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$\lambda \neq 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi(\phi) = A\sin\sqrt{\lambda}\phi + B\cos\sqrt{\lambda}\phi$$

这样又可以求得本征值

$$\lambda_m = m^2 \qquad m = 1, 2, 3, \cdots$$

相应的非零解是

$$A\text{任意} \qquad B\text{任意}$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$\lambda \neq 0$时，常微分方程的通解为

$$\Phi(\phi) = A \sin \sqrt{\lambda}\phi + B \cos \sqrt{\lambda}\phi$$

这样又可以求得本征值

$$\lambda_m = m^2 \qquad m = 1, 2, 3, \cdots$$

对应于一个本征值λ_m，有两个本征函数

$$\Phi_{m1}(\phi) = \sin m\phi$$
$$\Phi_{m2}(\phi) = \cos m\phi$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)\qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

- 对应本征值$\lambda_0=0$的本征函数是$\Phi_0(\phi)=1$
- 对应本征值$\lambda_m=m^2, m=1,2,3,\cdots$，有两个本征函数

$$\Phi_{m1}(\phi)=\sin m\phi,\qquad \Phi_{m2}(\phi)=\cos m\phi$$

- 还可以合并成　本征值$\lambda_m=m^2,\quad m=0,1,2,3,\cdots$

相应的本征函数仍为

$$\Phi_{m1}(\phi)=\sin m\phi,\qquad \Phi_{m2}(\phi)=\cos m\phi$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

- 对应本征值$\lambda_0 = 0$的本征函数是$\Phi_0(\phi) = 1$
- 对应本征值$\lambda_m = m^2, m = 1, 2, 3, \cdots$，有两个本征函数

$$\Phi_{m1}(\phi) = \sin m\phi, \qquad \Phi_{m2}(\phi) = \cos m\phi$$

- 还可以合并成　本征值 $\lambda_m = m^2, \quad m = 0, 1, 2, 3, \cdots$

相应的本征函数仍为

$$\Phi_{m1}(\phi) = \sin m\phi, \qquad \Phi_{m2}(\phi) = \cos m\phi$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)\qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

- 对应本征值$\lambda_0=0$的本征函数是$\Phi_0(\phi)=1$
- 对应本征值$\lambda_m=m^2, m=1,2,3,\cdots$，有两个本征函数

$$\Phi_{m1}(\phi)=\sin m\phi,\qquad \Phi_{m2}(\phi)=\cos m\phi$$

- 还可以合并成　本征值 $\lambda_m=m^2$,　$m=0,1,2,3,\cdots$

  相应的本征函数仍为

$$\Phi_{m1}(\phi)=\sin m\phi,\qquad \Phi_{m2}(\phi)=\cos m\phi$$

定解问题的求解

(2) 求解本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

- 对应本征值$\lambda_0 = 0$的本征函数是$\Phi_0(\phi) = 1$
- 对应本征值$\lambda_m = m^2, m = 1, 2, 3, \cdots$，有两个本征函数

$$\Phi_{m1}(\phi) = \sin m\phi, \qquad \Phi_{m2}(\phi) = \cos m\phi$$

- 还可以合并成　本征值 $\lambda_m = m^2, \quad m = 0, 1, 2, 3, \cdots$

  相应的本征函数仍为

$$\Phi_{m1}(\phi) = \sin m\phi, \qquad \Phi_{m2}(\phi) = \cos m\phi$$

定解问题的求解

(3) 求(满足方程及齐次边界条件的)特解，叠加出一般解

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$

是一个特殊的变系数方程

定解问题的求解

(3) 求(满足方程及齐次边界条件的)特解，叠加出一般解

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$

是一个特殊的变系数方程，经过自变量的变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\qquad \text{即}\qquad t=\ln r$$

定解问题的求解

(3) 求(满足方程及齐次边界条件的)特解，叠加出一般解

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$

是一个特殊的变系数方程，经过自变量的变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\qquad \text{即}\qquad t=\ln r$$

后，就可以变为常系数的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}-\lambda R=0$$

定解问题的求解

(3) 求(满足方程及齐次边界条件的)特解，叠加出一般解

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$

是一个特殊的变系数方程，经过自变量的变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\qquad \text{即} \qquad t=\ln r$$

后，就可以变为常系数的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}-\lambda R=0$$

所以，当$\lambda_0=0$时，通解为

$$R_0(r)=C_0+D_0t=C_0+D_0\ln r$$

定解问题的求解

(3) 求(满足方程及齐次边界条件的)特解，叠加出一般解

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$

是一个特殊的变系数方程，经过自变量的变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\qquad \text{即}\qquad t=\ln r$$

后，就可以变为常系数的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}-\lambda R=0$$

当$\lambda_m=m^2,\ m\neq 0$时，通解为

$$R_m(r)=C_m\mathrm{e}^{mt}+D_m\mathrm{e}^{-mt}=C_mr^m+D_mr^{-m}$$

定解问题的求解

(3) 求(满足方程及齐次边界条件的)特解，叠加出一般解

这样就求得了满足齐次方程和齐次边界条件(周期条件)的全部特解

$$
\begin{aligned}
u_0(r,\phi) &= C_0 + D_0 \ln r \\
u_{m1}(r,\phi) &= \left(C_{m1} r^m + D_{m1} r^{-m}\right) \sin m\phi \\
u_{m2}(r,\phi) &= \left(C_{m2} r^m + D_{m2} r^{-m}\right) \cos m\phi
\end{aligned}
$$

定解问题的求解

(3) 求(满足方程及齐次边界条件的)特解，叠加出一般解

叠加起来，就得到定解问题的一般解

$$u(r,\phi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{m1} r^m + D_{m1} r^{-m}\right) \sin m\phi$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{m2} r^m + D_{m2} r^{-m}\right) \cos m\phi$$

定解问题的求解

(3) 求(满足方程及齐次边界条件的)特解，叠加出一般解

$$
\begin{aligned}
u(r,\phi) =& C_0 + D_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{m1} r^m + D_{m1} r^{-m}\right) \sin m\phi \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{m2} r^m + D_{m2} r^{-m}\right) \cos m\phi
\end{aligned}
$$

思考题：能否将上述一般解写成

$$
\begin{aligned}
u(r,\phi) =& C_0 + D_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} \Big[\left(C_{m1} r^m + D_{m1} r^{-m}\right) \\
&\times \left(A_m \sin m\phi + B_m \cos m\phi\right) \Big]
\end{aligned}
$$

定解问题的求解

(4) 利用(非齐次)边界条件定叠加系数

将上述一般解代入有界条件

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}$$

定解问题的求解

(4) 利用(非齐次)边界条件定叠加系数

将上述一般解代入有界条件

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}$$

因为$\ln r$和r^{-m}在$r=0$点无界，所以它们的系数都必须为0

$$D_0=0\qquad D_{m1}=0\qquad D_{m2}=0$$

定解问题的求解

(4) 利用(非齐次)边界条件定叠加系数

将上述一般解代入有界条件

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}$$

因为$\ln r$和r^{-m}在$r=0$点无界，所以它们的系数都必须为0

$$D_0=0 \qquad D_{m1}=0 \qquad D_{m2}=0$$

所以，同时满足齐次方程、周期条件以及($r=0$处)有界条件的一般解是

$$\begin{aligned} u(r,\phi) =&C_0+\sum_{m=1}^{\infty} r^m\left(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi\right) \\ =&\sum_{m=0}^{\infty} r^m\left(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi\right) \end{aligned}$$

定解问题的求解

(4) 利用(非齐次)边界条件定叠加系数

再代入$r=a$端的边界条件，就得到

$$u(r,\phi)\Big|_{r=a}=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}a^m(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi)=f(\phi)$$

定解问题的求解

利用本征函数的正交性定叠加系数

$$u(r,\phi)\Big|_{r=a} = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (C_{m1}\sin m\phi + C_{m2}\cos m\phi) = f(\phi)$$

根据1：对应不同本征值的本征函数正交

定解问题的求解

利用本征函数的正交性定叠加系数

$$u(r,\phi)\Big|_{r=a}=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}a^m(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi)=f(\phi)$$

根据1：对应不同本征值的本征函数正交

本征函数 1 (对应于本征值$\lambda_0=0$)和本征函数$\sin m\phi$ 或 $\cos m\phi$ (对应于本征值$\lambda_m=m^2,\ m\neq 0$)正交

$$\int_0^{2\pi}\sin m\phi\mathrm{d}\phi=0\qquad\int_0^{2\pi}\cos m\phi\mathrm{d}\phi=0$$

(留作作业，请读者补足证明)

定解问题的求解

利用本征函数的正交性定叠加系数

$$u(r,\phi)\Big|_{r=a} = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (C_{m1}\sin m\phi + C_{m2}\cos m\phi) = f(\phi)$$

根据1：对应不同本征值的本征函数正交

对应于本征值$\lambda_m = m^2$的本征函数$\sin m\phi, \cos m\phi$和对应于本征值$\lambda_n = n^2,\ n \neq m$的本征函数$\sin n\phi,\ \cos n\phi$两两正交

$$\int_0^{2\pi} \sin n\phi \sin m\phi \mathrm{d}\phi = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \sin n\phi \cos m\phi \mathrm{d}\phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\phi \cos m\phi \mathrm{d}\phi = 0$$

（留作作业，请读者补足证明）

定解问题的求解

利用本征函数的正交性定叠加系数

$$u(r,\phi)\Big|_{r=a} = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (C_{m1}\sin m\phi + C_{m2}\cos m\phi) = f(\phi)$$

根据2：可以证明，对应于同一个本征值$\lambda_m = m^2$的两个本征函数$\sin m\phi$和$\cos m\phi$也正交

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos m\phi \mathrm{d}\phi = 0$$

（留作作业，请读者补足证明）

定解问题的求解

利用本征函数的正交性定叠加系数

$$u(r,\phi)\Big|_{r=a} = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (C_{m1}\sin m\phi + C_{m2}\cos m\phi) = f(\phi)$$

再利用本征函数的模方

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 m\phi \mathrm{d}\phi = \pi \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi \mathrm{d}\phi = \pi$$

定解问题的求解

利用本征函数的正交性定叠加系数

$$u(r,\phi)\Big|_{r=a} = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (C_{m1}\sin m\phi + C_{m2}\cos m\phi) = f(\phi)$$

就可求得

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\mathrm{d}\phi$$

$$C_{m1} = \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin m\phi\mathrm{d}\phi$$

$$C_{m2} = \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos m\phi\mathrm{d}\phi$$

讨论(一)

简并的本征值问题

第一，在求解此本征值问题时，对应于一个本征值有两个(线性无关的)本征函数

讨论(一)

简并的本征值问题

第一，在求解此本征值问题时，对应于一个本征值有两个(线性无关的)本征函数

- 对应一个本征值有不止一个(线性无关的)本征函数的现象，称为简并(或退化)

讨论(一)

简并的本征值问题

第一，在求解此本征值问题时，对应于一个本征值有两个(线性无关的)本征函数

- 对应一个本征值有不止一个(线性无关的)本征函数的现象，称为简并(或退化)
- 如果对应一个本征值有n个本征函数，则称本征值问题是n重简并的，或者说简并度为n

讨论(一)

简并的本征值问题

第一，在求解此本征值问题时，对应于一个本征值有两个(线性无关的)本征函数

- 对应一个本征值有不止一个(线性无关的)本征函数的现象，称为简并(或退化)
- 如果对应一个本征值有n个本征函数，则称本征值问题是n重简并的，或者说简并度为n
- 对于二阶常微分方程的本征值问题，最多只能是二重简并的

讨论(一)

简并的本征值问题

- 在二阶常微分方程的本征值问题中，如果边界条件是一、二、三类，则对应一个本征值只能有一个本征函数，或者说，本征值问题一定是非简并的．当边界条件是周期条件时，本征值问题才是简并的

讨论(一)

简并的本征值问题

第二，简并本征值问题中本征函数的正交性问题

讨论(一)

简并的本征值问题

第二，简并本征值问题中本征函数的正交性问题

- 对应不同本征值的本征函数仍然一定正交

讨论(一)

简并的本征值问题

第二，简并本征值问题中本征函数的正交性问题

- 对应不同本征值的本征函数仍然一定正交
- 对应同一个本征值的本征函数也不一定正交

讨论(一)

简并的本征值问题

第二，简并本征值问题中本征函数的正交性问题

- 对应不同本征值的本征函数仍然一定正交
- 对应同一个本征值的本征函数也不一定正交
- 但是一定可以通过适当的重新组合而使它们正交化

讨论(一)

简并的本征值问题

第二，简并本征值问题中本征函数的正交性问题

- 对应不同本征值的本征函数仍然一定正交
- 对应同一个本征值的本征函数也不一定正交
- 但是一定可以通过适当的重新组合而使它们正交化
- 对应同一个本征值的本征函数重新组合后，对应的本征值不变

讨论(一)

简并的本征值问题

第三，对于简并本征值问题，本征函数的选取并不唯一

讨论(一)

简并的本征值问题

第三，对于简并本征值问题，本征函数的选取并不唯一

以本征值问题

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

为例

讨论(一)

简并的本征值问题

第三，对于简并本征值问题，本征函数的选取并不唯一

- 对应本征值$\lambda_m = m^2$的本征函数可取为$\cos m\phi$和$\sin m\phi$

讨论(一)

简并的本征值问题

第三，对于简并本征值问题，本征函数的选取并不唯一

- 对应本征值$\lambda_m = m^2$的本征函数可取为$\cos m\phi$和$\sin m\phi$
- 本征函数也可取为$e^{im\phi}$和$e^{-im\phi}$

讨论(一)

简并的本征值问题

第三，对于简并本征值问题，本征函数的选取并不唯一

- 对应本征值$\lambda_m = m^2$的本征函数可取为$\cos m\phi$和$\sin m\phi$
- 本征函数也可取为$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$和$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}$
- 或者简单地统一写成

$$\lambda_m = m^2 \qquad\qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

$$\Phi_m(\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

讨论(一)

简并的本征值问题

第三，对于简并本征值问题，本征函数的选取并不唯一

- 或者简单地统一写成

$$\lambda_m = m^2 \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Phi_m(\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

- 这时，对应不同本征值的本征函数当然正交

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi})^* \mathrm{d}\phi = 0 \qquad n \neq m$$

讨论(一)

简并的本征值问题

第三，对于简并本征值问题，本征函数的选取并不唯一

- 或者简单地统一写成

$$\lambda_m = m^2 \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Phi_m(\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

- 而且对应于同一个本征值$\lambda_m = m^2, m \neq 0$ 的两个本征函数$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}m\phi}$也正交

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi})^* \mathrm{d}\phi = 0$$

讨论(二)

定解问题的特解

$$1,\ \ln r,\ r^{\pm m}\sin m\phi,\ 和\ r^{\pm m}\cos m\phi$$

现在讨论的偏微分方程是(二维)Laplace方程．复变函数部分的理论告诉我们，解析函数的实部或虚部一定是Laplace方程的解

讨论(二)

定解问题的特解

$$1,\ \ln r,\ r^{\pm m}\sin m\phi,\ \text{和}\ r^{\pm m}\cos m\phi$$

把$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$看成是复变数$z = x + \mathrm{i}y$，这些特解正是解析函数

$$z^0, \quad \ln z, \quad z^m \quad \text{和} \quad z^{-m}$$

的实部或者虚部

讨论(二)

定解问题的特解

$$1,\ \ln r,\ r^{\pm m}\sin m\phi,\ 和\ r^{\pm m}\cos m\phi$$

把$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$看成是复变数$z = x + \mathrm{i}y$，这些特解正是解析函数

$$z^0,\quad \ln z,\quad z^m\quad 和\quad z^{-m}$$

的实部或者虚部

- 周期条件正是排除掉多值函数

讨论(二)

定解问题的特解

$$1,\ \ln r,\ r^{\pm m}\sin m\phi,\ \text{和}\ r^{\pm m}\cos m\phi$$

把$re^{i\phi}$看成是复变数$z=x+iy$，这些特解正是解析函数

$$z^0,\quad \ln z,\quad z^m\quad \text{和}\quad z^{-m}$$

的实部或者虚部

- 周期条件正是排除掉多值函数
- 有界条件正是摈弃掉在圆内$|z|<a$并不处处解析的函数$\ln z$和z^{-m}

讨论(三)

Poisson公式

把上面求得的系数

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\mathrm{d}\phi$$

$$C_{m1} = \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin m\phi\mathrm{d}\phi$$

$$C_{m2} = \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos m\phi\mathrm{d}\phi$$

代入到解式中

$$\begin{aligned} u(r,\phi) =& C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left(C_{m1}\sin m\phi + C_{m2}\cos m\phi\right) \\ =& \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left(C_{m1}\sin m\phi + C_{m2}\cos m\phi\right) \end{aligned}$$

讨论(三)

Poisson公式

可以得到

$$\begin{aligned} u(r,\phi) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi')\mathrm{d}\phi' \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m \sin m\phi \int_0^{2\pi} f(\phi')\sin m\phi'\mathrm{d}\phi' \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m\phi \int_0^{2\pi} f(\phi')\cos m\phi'\mathrm{d}\phi' \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi')\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m(\phi-\phi')\right]\mathrm{d}\phi' \end{aligned}$$

讨论(三)

Poisson公式

当$r < a$时级数收敛．将余弦函数改写为复指数函数，利用等比级数的求和公式就可以求出级数的和，最后就得到

$$u(r,\phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\phi')}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\phi - \phi')}\mathrm{d}\phi'$$

讨论(三)

Poisson公式

当$r < a$时级数收敛．将余弦函数改写为复指数函数，利用等比级数的求和公式就可以求出级数的和，最后就得到

$$u(r,\phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\phi - \phi')} \mathrm{d}\phi'$$

这个结果称为Poisson积分公式，它把Laplace方程在圆内的第一类边值问题的解表示为边值$f(\phi)$的积分

讨论(三)

Poisson公式

当$r<a$时级数收敛．将余弦函数改写为复指数函数，利用等比级数的求和公式就可以求出级数的和，最后就得到

$$u(r,\phi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\phi')}{r^2+a^2-2ar\cos(\phi-\phi')}\mathrm{d}\phi'$$

这个结果称为Poisson积分公式，它把Laplace方程在圆内的第一类边值问题的解表示为边值$f(\phi)$的积分

事实上，由解析函数的Cauchy积分公式，也可以推出这个结果，而$u(r,\phi)$正好是解析函数的实部或虚部

讨论(三)

Poisson公式

当$r < a$时级数收敛．将余弦函数改写为复指数函数，利用等比级数的求和公式就可以求出级数的和，最后就得到

$$u(r,\phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\phi - \phi')} \mathrm{d}\phi'$$

这个结果称为Poisson积分公式，它把Laplace方程在圆内的第一类边值问题的解表示为边值$f(\phi)$的积分

事实上，由解析函数的Cauchy积分公式，也可以推出这个结果，而$u(r,\phi)$正好是解析函数的实部或虚部

这里再一次看到解析函数的实部或虚部和二维Laplace方程的解之间的关系

正交曲面坐标系下 Helmholtz方程的分离变量

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

讲授要点

1. 圆形区域内的Laplace方程第一类边值问题
   - 定解问题的正确提法
   - 定解问题的求解
2. 正交曲面坐标系下Helmholtz方程的分离变量
   - 柱坐标系下的Helmholtz方程的分离变量
   - 球坐标系下的Helmholtz方程的分离变量

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2 u=0$$

其中$u=u(r,\theta,z)$

逐次分离变量

- 先令$u(r,\theta,z)=v(r,\theta)Z(z)$，可得到关于$Z(z)$的常微分方程及$v(r,\theta)$的偏微分方程
- 再令$v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，就得到关于$R(r)$和$\Theta(\theta)$的常微分方程

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

其中$u=u(r,\theta,z)$

逐次分离变量

- 先令$u(r,\theta,z)=v(r,\theta)Z(z)$，可得到关于$Z(z)$的常微分方程及$v(r,\theta)$的偏微分方程 Details
- 再令$v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，就得到关于$R(r)$和$\Theta(\theta)$的常微分方程 Details

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

其中$u=u(r,\theta,z)$

逐次分离变量

- 先令$u(r,\theta,z)=v(r,\theta)Z(z)$，可得到关于$Z(z)$的常微分方程及$v(r,\theta)$的偏微分方程 Details
- 再令$v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，就得到关于$R(r)$和$\Theta(\theta)$的常微分方程 Details

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

(1) 令$u(r,\theta,z)=v(r,\theta)Z(z)$

$$Z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+k^2v\right]+v\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}=0$$

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

(1) 令$u(r,\theta,z)=v(r,\theta)Z(z)$

$$Z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+k^2v\right]+v\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}=0$$

$$\frac{1}{v}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+k^2v\right]=-\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}$$

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

(1) 令$u(r,\theta,z)=v(r,\theta)Z(z)$

$$Z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+k^2v\right]+v\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}=0$$

$$\frac{1}{v}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+k^2v\right]=-\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}=\lambda$$

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

(1) 令$u(r,\theta,z)=v(r,\theta)Z(z)$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\left(k^2-\lambda\right)v=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}+\lambda Z=0$$

Return

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

(2) 令$v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$

$$\Theta(\theta)\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda\right)R\right]+\frac{R(r)}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}=0$$

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

(2) 令$v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$

$$\Theta(\theta)\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda\right)R\right]+\frac{R(r)}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}=0$$

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda\right)R\right]=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}$$

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

(2) 令$v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$

$$\Theta(\theta)\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda\right)R\right]+\frac{R(r)}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}=0$$

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda\right)R\right]=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}=\mu$$

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

(2) 令$v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}+\mu\Theta=0$$

柱坐标系下的Helmholtz方程

柱坐标系中，Helmholtz方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

小结：分离变量，得到三个常微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}+\mu\Theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+\lambda Z=0$$

讲授要点

1. 圆形区域内的Laplace方程第一类边值问题
   - 定解问题的正确提法
   - 定解问题的求解
2. 正交曲面坐标系下Helmholtz方程的分离变量
   - 柱坐标系下的Helmholtz方程的分离变量
   - 球坐标系下的Helmholtz方程的分离变量

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

逐次分离变量

- 先令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$，可得到关于$R(r)$的常微分方程及$S(\theta,\phi)$的偏微分方程
- 再令$S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$，就得到关于$\Theta(\theta)$和$\Phi(\phi)$的常微分方程

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

逐次分离变量

- 先令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$，可得到关于$R(r)$的常微分方程及$S(\theta,\phi)$的偏微分方程 Details
- 再令$S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$，就得到关于$\Theta(\theta)$和$\Phi(\phi)$的常微分方程 Details

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

逐次分离变量

- 先令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$，可得到关于$R(r)$的常微分方程及$S(\theta,\phi)$的偏微分方程 ▸ Details
- 再令$S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$，就得到关于$\Theta(\theta)$和$\Phi(\phi)$的常微分方程 ▸ Details

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

(1) 令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$

$$S(\theta,\phi)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]$$
$$+\frac{R(r)}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]=0$$

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]$$
$$=-\frac{1}{S(\theta,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]=\lambda$$

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

(1) 令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$

$$S(\theta,\phi)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]$$

$$+\frac{R(r)}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]=0$$

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]$$

$$=-\frac{1}{S(\theta,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]=\lambda$$

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

(1) 令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$

$$S(\theta,\phi)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]$$
$$+\frac{R(r)}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]=0$$

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]$$
$$=-\frac{1}{S(\theta,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]=\lambda$$

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

(1) 令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2}+\lambda S=0$$

Return

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

(2) 令$S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\Phi\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=\mu$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi=0$$

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

(2) 令$S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\Phi\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=\mu$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi=0$$

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

(2) 令$S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\Phi\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=\mu$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi=0$$

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

(2) 令$S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\Phi\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=\mu$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi=0$$

球坐标系下的Helmholtz方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

小结：分离变量，得到三个常微分方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi=0$$