第六讲
球函数(一)

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. Legendre多项式的引入
   - Legendre方程的解
   - Legendre多项式
2. Legendre多项式的性质
   - Legendre多项式的微分表示
   - Legendre多项式的正交性
   - Legendre多项式的完备性

讲授要点

1. Legendre多项式的引入
   - Legendre方程的解
   - Legendre多项式
2. Legendre多项式的性质
   - Legendre多项式的微分表示
   - Legendre多项式的正交性
   - Legendre多项式的完备性

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§16.1, 16.2, 16.3, 16.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§10.1
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§12.3

Legendre多项式的引入

连带Legendre方程

将Helmholtz方程在球坐标系下分离变量，可得到连带Legendre方程

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0}$$

作变换$x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$，则可改写成

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda-\frac{\mu}{1-x^2}\right]y=0}$$

连带Legendre方程

将Helmholtz方程在球坐标系下分离变量，可得到连带Legendre方程

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0}$$

作变换$x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$，则可改写成

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda-\frac{\mu}{1-x^2}\right]y=0}$$

Legendre方程

作为特殊情形，$\mu=0$，Legendre方程

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta=0}$$

作变换$x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$，则也可改写成

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0}$$

本讲及下一讲将讨论这两个方程的解，它们的主要性质及其在分离变量法中的应用

Legendre方程

作为特殊情形，$\mu = 0$，Legendre方程

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \lambda\Theta = 0}$$

作变换$x = \cos\theta$, $y(x) = \Theta(\theta)$，则也可改写成

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y = 0}$$

本讲及下一讲将讨论这两个方程的解，它们的主要性质及其在分离变量法中的应用

Legendre方程

作为特殊情形，$\mu=0$，Legendre方程

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta=0}$$

作变换$x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$，则也可改写成

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0}$$

本讲及下一讲将讨论这两个方程的解，它们的主要性质及其在分离变量法中的应用

讲授要点

1. Legendre多项式的引入
   - Legendre方程的解
   - Legendre多项式
2. Legendre多项式的性质
   - Legendre多项式的微分表示
   - Legendre多项式的正交性
   - Legendre多项式的完备性

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

在求出Legendre方程的解的具体形式之前，根据常微分方程的解析理论，事先就可以对Legendre方程的解的解析性作出判断

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

★ Legendre方程有三个奇点，$z=\pm 1$和∞，并且都是正则奇点． 因此，除了这三个点可能是解的奇点外，Legendre方程的解在全平面解析

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

★ Legendre方程有三个奇点，$z=\pm1$和∞，并且都是正则奇点．因此，除了这三个点可能是解的奇点外，Legendre方程的解在全平面解析

★ $z=0$点是Legendre方程的常点，因此，方程的解在以$z=0$点为圆心的单位圆$|z|<1$内解析，可以展开为Taylor级数

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(1-z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

Legendre方程在$z=0$邻域内的的两个线性无关解

$$w_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}z^{2n}$$

$$w_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(n+1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}z^{2n+1}$$

$w_1(z)$在$z=\pm1$的收敛性

对于$w_1(z)$，当n足够大时，其系数

$$c_{2n} = \frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

$$\sim \frac{2^{2n}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}\frac{\left(n-\frac{\nu}{2}\right)^{n-(\nu+1)/2}\mathrm{e}^{-n+\nu/2}}{(2n+1)^{2n+1/2}\mathrm{e}^{-(2n+1)}}$$

$$\times\left(n+\frac{\nu+1}{2}\right)^{n+\nu/2}\mathrm{e}^{-n-(\nu+1)/2}\sqrt{2\pi}$$

$w_1(z)$在$z=\pm 1$的收敛性

- 因此，当n足够大时

$$c_{2n} \sim \text{常数} \times \frac{1}{n}$$

- 这说明，除了一个常数倍外，$w_1(z)$在$z=\pm 1$附近的行为，和

$$\ln \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{2n}$$

完全相同

- 因此，$w_1(z)$在$z=\pm 1$对数发散．$z=\pm 1$是$w_1(z)$ 的枝点
- 如果把 Legendre方程在$z=0$的第一解$w_1(z)$解析延拓到全平面上，它一定是一个多值函数

$w_1(z)$在$z=\pm 1$的收敛性

- 因此，当n足够大时

$$c_{2n} \sim \text{常数} \times \frac{1}{n}$$

- 这说明，除了一个常数倍外，$w_1(z)$在$z=\pm 1$附近的行为，和

$$\ln \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{2n}$$

完全相同

- 因此，$w_1(z)$在$z=\pm 1$对数发散．$z=\pm 1$是$w_1(z)$ 的枝点
- 如果把Legendre方程在$z=0$的第一解$w_1(z)$解析延拓到全平面上，它一定是一个多值函数

$w_1(z)$在$z=\pm 1$的收敛性

- 因此，当n足够大时

$$c_{2n} \sim 常数 \times \frac{1}{n}$$

- 这说明，除了一个常数倍外，$w_1(z)$在$z=\pm 1$附近的行为，和

$$\ln \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{2n}$$

完全相同

- 因此，$w_1(z)$在$z=\pm 1$对数发散．$z=\pm 1$是$w_1(z)$ 的枝点
- 如果把Legendre方程在$z=0$的第一解$w_1(z)$解析延拓到全平面上，它一定是一个多值函数

$w_1(z)$在$z=\pm 1$的收敛性

- 因此，当n足够大时

$$c_{2n} \sim \text{常数} \times \frac{1}{n}$$

- 这说明，除了一个常数倍外，$w_1(z)$在$z=\pm 1$附近的行为，和

$$\ln \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{2n}$$

完全相同
- 因此，$w_1(z)$在$z=\pm 1$对数发散． $z=\pm 1$是$w_1(z)$ 的枝点
- 如果把 Legendre方程在$z=0$的第一解$w_1(z)$解析延拓到全平面上， 它一定是一个多值函数

$w_2(z)$在$z=\pm 1$的收敛性

同样，对于$w_2(z)$，当n足够大时，其系数

$$c_{2n+1}=\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\dfrac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(n+1+\dfrac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{\nu}{2}\right)}$$

$$\sim\frac{2^{2n}\quad\left(n-\dfrac{\nu-1}{2}\right)^{n-\nu/2}\mathrm{e}^{-n+(\nu-1)/2}}{\Gamma\left(n-\dfrac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(n+1+\dfrac{\nu}{2}\right)\quad(2n+2)^{2n+3/2}\mathrm{e}^{-(2n+2)}}$$

$$\times\left(n+1+\frac{\nu}{2}\right)^{n+(\nu+1)/2}\mathrm{e}^{-n-1-\nu/2}\sqrt{2\pi}$$

$w_2(z)$在$z=\pm1$的收敛性

- 因此，当n足够大时

$$c_{2n+1} \sim 常数 \times \frac{1}{2n+1}$$

- 这说明，除了一个常数倍外，$w_2(z)$在$z=\pm1$附近的行为，和

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}z^{2n+1}$$

完全相同

- 因此，$w_2(z)$在$z=\pm1$对数发散．$z=\pm1$是$w_1(z)$ 的枝点
- 如果把 Legendre方程在$z=0$的第二解$w_2(z)$解析延拓到全平面上，它一定是一个多值函数

$w_2(z)$在$z=\pm1$的收敛性

- 因此，当n足够大时

$$c_{2n+1}\sim 常数\times\frac{1}{2n+1}$$

- 这说明，除了一个常数倍外，$w_2(z)$在$z=\pm1$附近的行为，和

$$\ln\frac{1+z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}z^{2n+1}$$

完全相同

- 因此，$w_2(z)$在$z=\pm1$对数发散．$z=\pm1$是$w_1(z)$ 的枝点
- 如果把 Legendre方程在$z=0$的第二解$w_2(z)$解析延拓到全平面上，它一定是一个多值函数

$w_2(z)$在$z=\pm1$的收敛性

- 因此，当n足够大时

$$c_{2n+1} \sim \text{常数} \times \frac{1}{2n+1}$$

- 这说明，除了一个常数倍外，$w_2(z)$在$z=\pm1$附近的行为，和

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}z^{2n+1}$$

完全相同

- 因此，$w_2(z)$在$z=\pm1$对数发散．$z=\pm1$是$w_1(z)$ 的枝点
- 如果把 Legendre方程在$z=0$的第二解$w_2(z)$解析延拓到全平面上，它一定是一个多值函数

$w_2(z)$在$z=\pm 1$的收敛性

- 因此，当n足够大时

$$c_{2n+1} \sim \text{常数} \times \frac{1}{2n+1}$$

- 这说明，除了一个常数倍外，$w_2(z)$在$z=\pm 1$附近的行为，和

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{2n+1}$$

完全相同

- 因此，$w_2(z)$在$z=\pm 1$对数发散．$z=\pm 1$是$w_1(z)$ 的枝点
- 如果把 Legendre方程在$z=0$的第二解$w_2(z)$解析延拓到全平面上，它一定是一个多值函数

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

★ 还可以在$z=1$(或$z=-1$)点的邻域内求解Legendre方程

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

★ $z=\pm1$是方程的正则奇点，方程在环域$0<|z-1|<2$内有两个正则解

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

★ $z=\pm 1$是方程的正则奇点，方程在环域$0<|z-1|<2$内有两个正则解

★ 故可设

$$w(z)=(z-1)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$$

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

★ 代入Legendre方程，就可以得到在$z=1$点的指标方程

$$\rho(\rho-1)+\rho=0 \Longrightarrow \rho_1=\rho_2=0$$

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

★ 代入Legendre方程，就可以得到在$z=1$点的指标方程

$$\rho(\rho-1)+\rho=0 \Longrightarrow \rho_1=\rho_2=0$$

★ 说明Legendre方程在$z=1$点邻域内的第一解在圆域$|z-1|<2$解析，而第二解则一定含有对数项，以$z=1$(和$z=-1$)为枝点

关于Legendre方程的讨论

Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(1-z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda w=0$$

Legendre方程在$z=1$邻域内的两个线性无关解

$$\mathrm{P}_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_\nu(z)=&\frac{1}{2}\mathrm{P}_\nu(z)\left[\ln\frac{z+1}{z-1}-2\gamma-2\psi(\nu+1)\right]\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{z-1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

讲授要点

1. Legendre多项式的引入
   - Legendre方程的解
   - Legendre多项式
2. Legendre多项式的性质
   - Legendre多项式的微分表示
   - Legendre多项式的正交性
   - Legendre多项式的完备性

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

其中Σ代表球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$上的变点

- 考虑到现在所讨论的空间区域的具体形状，自然会采用球坐标系来求解这个定解问题，而且会把坐标原点放置在球心
- 如果边界条件具有绕某一个(通过球心的)固定轴旋转不变的对称性，那么，当然也就应当把这个对称轴的方向取为极轴的方向

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

其中Σ代表球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上的变点

- 考虑到现在所讨论的空间区域的具体形状，自然会采用球坐标系来求解这个定解问题，而且会把坐标原点放置在球心
- 如果边界条件具有绕某一个(通过球心的)固定轴旋转不变的对称性，那么，当然也就应当把这个对称轴的方向取为极轴的方向

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u\big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

其中Σ代表球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$上的变点

- 考虑到现在所讨论的空间区域的具体形状，自然会采用球坐标系来求解这个定解问题，而且会把坐标原点放置在球心
- 如果边界条件具有绕某一个(通过球心的)固定轴旋转不变的对称性，那么，当然也就应当把这个对称轴的方向取为极轴的方向

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

- 这样选择了坐标系后，所要求的未知函数u当然就与ϕ无关

$$u = u(r, \theta)$$

- 写出定解问题在球坐标系下的具体形式

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

- 这样选择了坐标系后，所要求的未知函数u当然就与ϕ无关

$$u = u(r, \theta)$$

- 写出定解问题在球坐标系下的具体形式

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上不成立，在这两点上充其量只存在$u(r, \theta)$对θ的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，必须补充上$u(r, \theta)$在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上不成立，在这两点上充其量只存在$u(r, \theta)$对θ的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，必须补充上$u(r, \theta)$在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上不成立，在这两点上充其量只存在$u(r, \theta)$对θ的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，必须补充上$u(r, \theta)$在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在坐标原点$r=0$也不成立，在该点充其量只存在$u(r,\theta)$对r的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，还必须补充上$u(r,\theta)$在坐标原点$r=0$处的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的轴对称边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在坐标原点$r=0$也不成立，在该点充其量只存在$u(r,\theta)$对r的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，还必须补充上$u(r,\theta)$在坐标原点$r=0$处的有界条件

背景

球坐标系下的定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$$

$u\big|_{\theta=0}$有界 $\qquad u\big|_{\theta=\pi}$有界

$u\big|_{r=0}$有界 $\qquad u\big|_{r=a}=f(\theta)$

令$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，将方程和有界条件分离变量

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta(\theta)=0$$

$\Theta(0)$有界 $\quad \Theta(\pi)$有界

背景

球坐标系下的定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$$

$u\big|_{\theta=0}$有界 $\quad u\big|_{\theta=\pi}$有界

$u\big|_{r=0}$有界 $\quad u\big|_{r=a}=f(\theta)$

令$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，将方程和有界条件分离变量

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta(\theta)=0$$

$\Theta(0)$有界 $\quad \Theta(\pi)$有界

背景

球坐标系下的定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$$

$u\big|_{\theta=0}$有界　　$u\big|_{\theta=\pi}$有界

$u\big|_{r=0}$有界　　$u\big|_{r=a}=f(\theta)$

令$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，将方程和有界条件分离变量

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta(\theta)=0$$

$\Theta(0)$有界　$\Theta(\pi)$有界

Legendre方程在有界条件下的本征值问题

Legendre方程，配上有界条件，构成本征值问题

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta(\theta)=0$$

$\Theta(0)$有界 $\Theta(\pi)$有界

通常作变换$x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$，并且把待定参数λ写成$\nu(\nu+1)$， 本征值问题就变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm1)$有界

Legendre方程在有界条件下的本征值问题

Legendre方程，配上有界条件，构成本征值问题

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta(\theta)=0$$

$\Theta(0)$有界 $\Theta(\pi)$有界

通常作变换$x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$，并且把待定参数λ写成$\nu(\nu+1)$，本征值问题就变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

方法一　从$x=0$点邻域内两个线性无关解出发来求解

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm1)$有界

方法一　从$x=0$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}x^{2n}$$

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(n+1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}x^{2n+1}$$

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm1)$有界

方法一　从$x=0$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

方法一　从$x=0$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

★　$y_1(x)$和$y_2(x)$在$x=\pm 1$均对数发散

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

方法一　从$x=0$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

★　$y_1(x)$和$y_2(x)$在$x=\pm 1$均对数发散

★　为了使得方程的解在$x=\pm 1$均有界，就要求λ(或ν)取某些特殊值

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

方法二　从$x=1$点邻域内两个线性无关解出发来求解

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$
$y(\pm 1)$有界

方法二　从$x=1$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_\nu(x)=&\frac{1}{2}\mathrm{P}_\nu(x)\left[\ln\frac{x+1}{x-1}-2\gamma-2\psi(\nu+1)\right]\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm1)$有界

方法二　从$x=1$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$y(x)=c_1\mathsf{P}_\nu(x)+c_2\mathsf{Q}_\nu(x)$$

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm1)$有界

方法二　从$x=1$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$y(x)=c_1\mathrm{P}_\nu(x)+c_2\mathrm{Q}_\nu(x)$$

- $\mathrm{Q}_\nu(x)$在$x=\pm1$均对数发散　$\Longrightarrow$　$c_2=0$

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

方法二　从$x=1$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$y(x)=c_1\mathrm{P}_\nu(x)+c_2\mathrm{Q}_\nu(x)$$

- $\mathrm{Q}_\nu(x)$在$x=\pm 1$均对数发散　$\Longrightarrow$　$c_2=0$
- 只要$c_1\neq 0$，就不妨取$c_1=1$

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm1)$有界

方法二　从$x=1$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$y(x)=c_1\mathrm{P}_\nu(x)+c_2\mathrm{Q}_\nu(x)$$

- $\mathrm{Q}_\nu(x)$在$x=\pm1$均对数发散 $\Longrightarrow$ $c_2=0$
- 只要$c_1\neq0$，就不妨取$c_1=1$
- $\mathrm{P}_\nu(x)$在$x=1$收敛，$x=-1$如何?

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

方法二　从$x=1$点邻域内两个线性无关解出发来求解

$$y(x)=c_1\mathrm{P}_\nu(x)+c_2\mathrm{Q}_\nu(x)$$

- $\mathrm{Q}_\nu(x)$在$x=\pm 1$均对数发散 $\Longrightarrow$ $c_2=0$
- 只要$c_1\neq 0$，就不妨取$c_1=1$
- $\mathrm{P}_\nu(x)$在$x=1$收敛，$x=-1$是否收敛?
- 作为无穷级数，$\mathrm{P}_\nu(x)$一定在$x=-1$对数发散!

$\mathrm{P}_\nu(x)$在$x=-1$处的行为

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$\mathsf{P}_\nu(x)$在$x=-1$处的行为

$$\mathsf{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

判断方法之一 $\qquad \mathsf{P}_\nu(x)=d_1y_1(x)+d_2y_2(x)$

既然$\mathsf{P}_\nu(x)$在$x=1$点收敛(说明$y_1(x)$和$y_2(x)$的奇异性抵消)，那么，作为无穷级数，$\mathsf{P}_\nu(x)$在$x=-1$点就一定对数发散！

$\mathrm{P}_\nu(x)$在$x=-1$处的行为

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

判断方法之二　在$x=-1$点，$\mathrm{P}_\nu(x)$的数值为

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\nu(-1)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\\&=-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}_\nu(x)$在$x=-1$处的行为

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

由Stirling公式可以估计得

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\\&\qquad\sim\frac{(n+\nu+1)^{n+\nu+1/2}\mathrm{e}^{-n-\nu-1}(n-\nu)^{n-\nu-1/2}\mathrm{e}^{-n+\nu}}{(n+1)^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n-1}(n+1)^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n-1}}\\&\qquad\sim\frac{1}{n}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}_\nu(x)$在$x=-1$处的行为

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

判断方法之二　在$x=-1$点，$\mathrm{P}_\nu(x)$的数值为

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\nu(-1)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\\&=-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\nu+1)\,\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\end{aligned}$$

结论：只要$\mathrm{P}_\nu(x)$是无穷级数，就不可能在$x=-1$点有界！

是否存在某些ν值(即λ值)，使得$\mathrm{P}_\nu(x)$不是无穷级数?

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

考察$\mathrm{P}_\nu(x)$的表达式

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

- Γ函数在全平面无零点 $\Longrightarrow$ 上述级数中系数的分子不可能为0
- Γ函数以0及负整数为一阶极点 $\Longrightarrow$ 当ν为自然数时，级数系数的分母从某一项开始恒为∞

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

考察$\mathrm{P}_\nu(x)$的表达式

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

- 「函数在全平面无零点 $\Longrightarrow$ 上述级数中系数的分子不可能为0
- 「函数以0及负整数为一阶极点 $\Longrightarrow$ 当ν为自然数时，级数系数的分母从某一项开始恒为∞

求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

考察$\mathrm{P}_\nu(x)$的表达式

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

- 「函数在全平面无零点 $\Longrightarrow$ 上述级数中系数的分子不可能为0
- 「函数以0及负整数为一阶极点 $\Longrightarrow$ 当ν为自然数时， 级数系数的分母从某一项开始恒为∞

求解本征值问题

本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

的解为

本征值 $\lambda_l = l(l+1) \quad l=0,1,2,3,\cdots$

本征函数 $y_l(x) = \mathrm{P}_l(x)$

$\mathrm{P}_l(x)$是一个l次多项式，称为l次Legendre多项式

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{(n!)^2}\frac{(l+n)!}{(l-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

求解本征值问题

本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$
$$y(\pm 1)\text{有界}$$

的解为

本 征 值 $\qquad \lambda_l=l(l+1) \quad l=0,1,2,3,\cdots$

本征函数 $\qquad y_l(x)=\mathsf{P}_l(x)$

$\mathsf{P}_l(x)$是一个l次多项式，称为l次Legendre多项式

$$\mathsf{P}_l(x)=\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{(n!)^2}\frac{(l+n)!}{(l-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

Legendre多项式

$$\mathsf{P}_l(x) = \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n$$

1. $\mathsf{P}_l(1) = 1$
2. 前几个Legendre多项式的表达式

$$\mathsf{P}_0(x) = 1 \qquad \mathsf{P}_1(x) = x$$

$$\mathsf{P}_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \qquad \mathsf{P}_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$\mathsf{P}_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

Legendre多项式

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

1. $P_l(1) = 1$
2. 前几个Legendre多项式的表达式

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

Legendre多项式

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

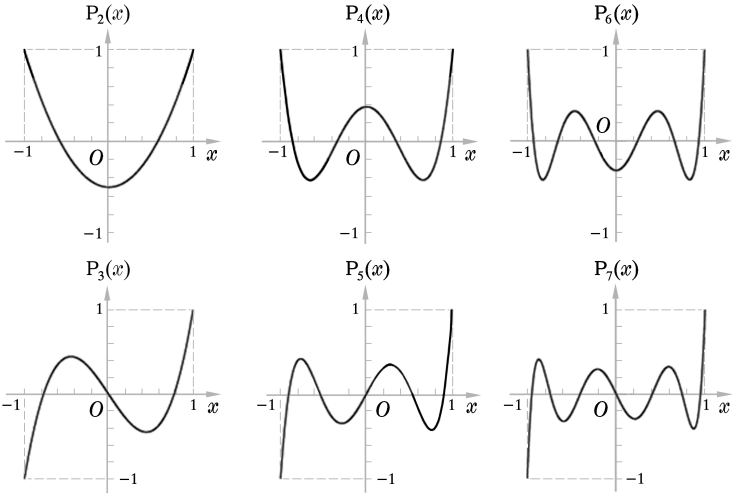
1. $\mathrm{P}_l(1) = 1$
2. 前几个Legendre多项式的表达式

$$\mathrm{P}_0(x) = 1 \qquad \mathrm{P}_1(x) = x$$

$$\mathrm{P}_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \qquad \mathrm{P}_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$\mathrm{P}_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

前几个Legendre多项式的图形



有关Legendre多项式性质的猜想

$$\mathsf{P}_l(x)=\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{(n!)^2}\frac{(l+n)!}{(l-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

1. $\mathsf{P}_l(x)$具有奇偶性：$\mathsf{P}_l(-x)=(-)^l\mathsf{P}_l(x)$?
2. Legendre多项式的零点均在区间$(-1,1)$内？

有关Legendre多项式性质的猜想

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n$$

1. $\mathrm{P}_l(x)$具有奇偶性：$\mathrm{P}_l(-x) = (-)^l \mathrm{P}_l(x)$?
2. Legendre多项式的零点均在区间$(-1, 1)$内？

有关Legendre多项式性质的猜想

$$\mathsf{P}_l(x) = \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

1. $\mathsf{P}_l(x)$具有奇偶性：$\mathsf{P}_l(-x) = (-)^l \mathsf{P}_l(x)$?
2. Legendre多项式的零点均在区间$(-1, 1)$内？

Legendre多项式的性质

讲授要点

1. Legendre多项式的引入
   - Legendre方程的解
   - Legendre多项式
2. Legendre多项式的性质
   - Legendre多项式的微分表示
   - Legendre多项式的正交性
   - Legendre多项式的完备性

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathsf{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Proof

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathsf{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

Proof

$$\begin{aligned}\left(x^2-1\right)^l &= (x-1)^l[2+(x-1)]^l \\ &= \sum_{n=0}^{l}\frac{l!}{n!(l-n)!}2^{l-n}(x-1)^{l+n}\end{aligned}$$

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathsf{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

Proof

$$\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l = \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{n!(l-n)!}2^{-n}(x-1)^{l+n}$$

$$= \sum_{n=0}^{l}\frac{1}{n!(l-n)!}\frac{(l+n)!}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathsf{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

推论

- Legendre多项式的奇偶性：l为偶数时$\mathsf{P}_l(x)$是偶函数；l为奇数时$\mathsf{P}_l(x)$是奇函数，即

$$\mathsf{P}_l(-x) = (-)^l\mathsf{P}_l(x)$$

- 结合$\mathsf{P}_l(1)=1$，又可以得到$\mathsf{P}_l(-1)=(-1)^l$

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathsf{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

推论

- Legendre多项式的奇偶性：l为偶数时$\mathsf{P}_l(x)$是偶函数；l为奇数时$\mathsf{P}_l(x)$是奇函数，即

$$\mathsf{P}_l(-x) = (-)^l \mathsf{P}_l(x)$$

- 结合$\mathsf{P}_l(1) = 1$，又可以得到$\mathsf{P}_l(-1) = (-1)^l$

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathsf{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

推论

- Legendre多项式的奇偶性：l为偶数时$\mathsf{P}_l(x)$是偶函数；l为奇数时$\mathsf{P}_l(x)$是奇函数，即

$$\mathsf{P}_l(-x) = (-)^l \mathsf{P}_l(x)$$

- 结合$\mathsf{P}_l(1)=1$，又可以得到$\mathsf{P}_l(-1)=(-1)^l$

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathsf{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

推论

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l$$

推论

将$\left(x^2 - 1\right)^l$展开

$$\left(x^2 - 1\right)^l = \sum_{r=0}^{l} (-)^r \frac{l!}{r!(l-r)!} x^{2l-2r}$$

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathsf{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

推论

然后逐项微商l次

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l &= \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\sum_{r=0}^{l}(-)^r\frac{l!}{r!(l-r)!}x^{2l-2r} \\ &= \sum_{r=0}^{[l/2]}(-)^r\frac{l!}{r!(l-r)!}\frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!}x^{l-2r}\end{aligned}$$

Legendre多项式

Rodrigues公式

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

推论

因而导出Legendre多项式的另一个显明表达式

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]}(-)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}$$

Legendre多项式

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]} (-)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r}$$

推论

Legendre多项式$\mathrm{P}_l(x)$在$x=0$点的数值

$$\mathrm{P}_{2l}(0) = (-)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} l! l!} \qquad \mathrm{P}_{2l+1}(0) = 0$$

Legendre多项式

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]} (-)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r}$$

推论

Legendre多项式$\mathrm{P}_l(x)$在$x=0$点的数值

$$\mathrm{P}_{2l}(0) = (-)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} l! l!} \qquad \mathrm{P}_{2l+1}(0) = 0$$

讲授要点

1. Legendre多项式的引入
   - Legendre方程的解
   - Legendre多项式
2. Legendre多项式的性质
   - Legendre多项式的微分表示
   - Legendre多项式的正交性
   - Legendre多项式的完备性

Legendre多项式的正交性

本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm 1)$有界

Legendre多项式是上述本征值问题的解，因此，作为本征函数，Legendre多项式应具有正交性，即不同次数的Legendre多项式在区间$[-1, 1]$上正交

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x=0 \qquad k\neq l$$

Legendre多项式的正交性

本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

$y(\pm1)$有界

Legendre多项式是上述本征值问题的解，因此，作为本征函数，Legendre多项式应具有正交性，即**不同次数的Legendre多项式在区间$[-1,1]$上正交**

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x=0 \qquad k\neq l$$

Legendre多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l(x)\mathsf{P}_k(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

方法之一：直接从本征值问题出发

（请补足证明，留作作业）

方法之二：根据积分

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{当} k < l$$

推出

Legendre多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

方法之一：直接从本征值问题出发

（请补足证明，留作作业）

方法之二：根据积分

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{当} k < l$$

推出

Legendre多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

方法之一：直接从本征值问题出发

（请补足证明，留作作业）

方法之二：根据积分

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{当} k < l$$

推出

Legendre多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

既然$k \neq l$，就不妨假设$k < l$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\left[c_k x^k + c_{k-2}x^{k-2} + c_{k-4}x^{k-4} + \cdots\right]\mathrm{d}x$$

$$= 0$$

Legendre多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l(x)\mathsf{P}_k(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

既然$k \neq l$，就不妨假设$k < l$

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l(x)\mathsf{P}_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l(x)\left[c_k x^k + c_{k-2}x^{k-2} + c_{k-4}x^{k-4} + \cdots\right]\mathrm{d}x$$

$$= 0$$

Legendre多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

既然$k \neq l$，就不妨假设$k < l$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\left[c_k x^k + c_{k-2}x^{k-2} + c_{k-4}x^{k-4} + \cdots\right]\mathrm{d}x$$

$$= 0$$

Legendre多项式的一个特殊积分

计算积分 $\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$

Legendre多项式的一个特殊积分

计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$

当$k \pm l =$奇数时，从被积函数的奇偶性可以判断

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0$$

Legendre多项式的一个特殊积分

计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$

当$k \pm l$为偶数时，可将$\mathrm{P}_l(x)$用它的微分表示代入

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} x^k \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x$$

Legendre多项式的一个特殊积分

计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$

当$k \pm l$为偶数时

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} x^k \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^l l!}\left[x^k \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l \Big|_{-1}^{1}\right. \\ &\qquad \left. - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

Legendre多项式的一个特殊积分

计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$

当$k \pm l$为偶数时，分部积分得

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} x^k \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x$$

Legendre多项式的一个特殊积分

计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathsf{d}x$

分部积分l次后，微商运算就全部转移到函数x^k上

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathsf{d}x = \frac{(-)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathsf{d}^l x^k}{\mathsf{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathsf{d}x$$

Legendre多项式的一个特殊积分

计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$

分部积分l次后，微商运算就全部转移到函数x^k上

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{(-)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^l x^k}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x$$

所以，当$k<l$时

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0$$

由此即可推出Legendre多项式的正交性

Legendre多项式的一个特殊积分

继续计算$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{(-)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^l x^k}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l\mathrm{d}x$

当$k = l + 2n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$时

Legendre多项式的一个特殊积分

继续计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{(-)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^l x^k}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x$

当 $k = l + 2n,\ n = 0, 1, 2, \cdots$ 时

$$\int_{-1}^{1} x^{l+2n} \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{(-)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^l x^{l+2n}}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_{-1}^{1} x^{2n}\left(1-x^2\right)^l \mathrm{d}x$$

Legendre多项式的一个特殊积分

继续计算$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{(-)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^l x^k}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x$

当$k = l + 2n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$时

$$\int_{-1}^{1} x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_{-1}^{1} x^{2n}\left(1-x^2\right)^l \mathrm{d}x$$

作变换$x^2 = t$，并利用B函数就可以算出积分

$$\int_{-1}^{1} x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\frac{\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(l+1)}{\Gamma(n+l+3/2)}$$

$$= 2^{l+1}\frac{(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!}$$

Legendre多项式的一个特殊积分

继续计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{(-)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^l x^k}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x$

当 $k = l + 2n,\ n = 0, 1, 2, \cdots$ 时

特别是$k = l$，即$n = 0$时

$$\int_{-1}^{1} x^l \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{l!}{2^l}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(l+3/2)}$$
$$= 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}$$

结论

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2^{l+1}\dfrac{(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!} & \begin{array}{l} k = l+2n \\ n = 0, 1, 2, \cdots \end{array} \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$$

推论：Legendre多项式的模方 $\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l(x)\mathsf{P}_l(x)\mathsf{d}x$

依据：$$\int_{-1}^{1} x^l \mathsf{P}_l(x)\mathsf{d}x = 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}$$

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l(x)\mathsf{P}_l(x)\mathsf{d}x$$
$$= \int_{-1}^{1} \left[c_l x^l + c_{l-2}x^{l-2} + c_{l-4}x^{l-4} + \cdots\right] \mathsf{P}_l(x)\mathsf{d}x$$
$$= c_l \int_{-1}^{1} x^l \mathsf{P}_l(x)\mathsf{d}x = c_l \times 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!} = \frac{2}{2l+1}$$

推论：Legendre多项式的模方 $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$

依据：$$\int_{-1}^{1}x^l\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_{-1}^{1}\left[c_lx^l+c_{l-2}x^{l-2}+c_{l-4}x^{l-4}+\cdots\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\\
=&\,c_l\int_{-1}^{1}x^l\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=c_l\times2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}=\frac{2}{2l+1}
\end{aligned}$$

推论：Legendre多项式的模方 $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$

依据： $\int_{-1}^{1} x^l \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left[c_l x^l + c_{l-2}x^{l-2} + c_{l-4}x^{l-4} + \cdots\right] \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\
&= c_l \int_{-1}^{1} x^l \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = c_l \times 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!} = \frac{2}{2l+1}
\end{aligned}$$

推论：Legendre多项式的模方 $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$

依据： $\int_{-1}^{1} x^l \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left[c_l x^l + c_{l-2}x^{l-2} + c_{l-4}x^{l-4} + \cdots\right] \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\
&= c_l \int_{-1}^{1} x^l \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = c_l \times 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!} = \frac{2}{2l+1}
\end{aligned}$$

特别注意事项

- 积分 $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$ 不能写成 $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^2(x)\mathrm{d}x$
- $\mathrm{P}_l^2(x)$ 另有含义

特别注意事项

- 积分$\int_{-1}^{1}\mathsf{P}_l(x)\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$不能写成$\int_{-1}^{1}\mathsf{P}_l^2(x)\mathrm{d}x$
- $\mathsf{P}_l^2(x)$另有含义

Legendre多项式的正交归一性

- 将Legendre多项式的正交性和模方合并写成
$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_k(x)\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$
- 即 $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathsf{P}_k(\cos\theta)\mathsf{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$
- $\mathsf{P}_k(\cos\theta)$和$\mathsf{P}_l(\cos\theta)$在区间$[0,\pi]$上以权函数$\sin\theta$正交
- 这里的权函数$\sin\theta$正好就是微分方程
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right] + \lambda\sin\theta\Theta = 0$$
中本征值λ后的函数$\sin\theta$

Legendre多项式的正交归一性

- 将Legendre多项式的正交性和模方合并写成

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_k(x)\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

- 即 $\int_0^{\pi} \mathsf{P}_k(\cos\theta)\mathsf{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$
- $\mathsf{P}_k(\cos\theta)$和$\mathsf{P}_l(\cos\theta)$在区间$[0,\pi]$上以权函数$\sin\theta$正交
- 这里的权函数$\sin\theta$正好就是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right] + \lambda\sin\theta\Theta = 0$$

中本征值λ后的函数$\sin\theta$

Legendre多项式的正交归一性

- 将Legendre多项式的正交性和模方合并写成
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$
- 即 $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{P}_k(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$
- $\mathrm{P}_k(\cos\theta)$和$\mathrm{P}_l(\cos\theta)$在区间$[0,\pi]$上以权函数$\sin\theta$正交
- 这里的权函数$\sin\theta$正好就是微分方程
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right]+\lambda\sin\theta\Theta=0$$
中本征值λ后的函数$\sin\theta$

Legendre多项式的正交归一性

- 将Legendre多项式的正交性和模方合并写成

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

- 即 $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{P}_k(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$
- $\mathrm{P}_k(\cos\theta)$和$\mathrm{P}_l(\cos\theta)$在区间$[0,\pi]$上以权函数$\sin\theta$正交
- 这里的权函数$\sin\theta$正好就是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right] + \lambda\sin\theta\Theta = 0$$

中本征值λ后的函数$\sin\theta$

讲授要点

1. Legendre多项式的引入
   - Legendre方程的解
   - Legendre多项式
2. Legendre多项式的性质
   - Legendre多项式的微分表示
   - Legendre多项式的正交性
   - Legendre多项式的完备性

Legendre多项式的完备性

- 任意一个在区间$[-1,1]$中分段连续的函数$f(x)$，(在平均收敛意义下)可以展开为级数

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l \mathrm{P}_l(x)$$

- 其中的展开系数c_l可以根据Legendre多项式的正交性求得

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

Legendre多项式的完备性

- 任意一个在区间$[-1,1]$中分段连续的函数$f(x)$，(在平均收敛意义下)可以展开为级数

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathsf{P}_l(x)$$

- 其中的展开系数c_l可以根据Legendre多项式的正交性求得

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

何谓级数平均收敛?

如果

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{1}\left|f(x)-\sum_{l=0}^{N}c_l\mathrm{P}_l(x)\right|^2\mathrm{d}x=0$$

则称级数$\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(x)$平均收敛到$f(x)$

Legendre多项式的完备性

也可以改用以θ为自变量表述

- 将函数$f(\theta)$按Legendre多项式$\mathrm{P}_l(\cos\theta)$展开

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

- 则展开系数为

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

Legendre多项式的完备性

也可以改用以θ为自变量表述

- 将函数$f(\theta)$按Legendre多项式$\mathrm{P}_l(\cos\theta)$展开

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

- 则展开系数为

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

Legendre多项式的完备性

也可以改用以θ为自变量表述

- 将函数$f(\theta)$按Legendre多项式$\mathrm{P}_l(\cos\theta)$展开

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

- 则展开系数为

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

例6.1

将函数$f(x) = x^3$按Legendre多项式展开

解法1

例6.1

将函数$f(x)=x^3$按Legendre多项式展开

解法1

设$x^3=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(x)$，则

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

例6.1

将函数$f(x)=x^3$按Legendre多项式展开

解法1

设$x^3=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(x)$，则

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

可以判断，除了c_1和c_3外，其余c_l均为0

$$x^3=c_1\mathrm{P}_1(x)+c_3\mathrm{P}_3(x)$$

例6.1

将函数$f(x)=x^3$按Legendre多项式展开

解法1

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^3\mathsf{P}_1(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$$

$$c_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}x^3\mathsf{P}_3(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$$

例6.1

将函数$f(x) = x^3$按Legendre多项式展开

解法1

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{P}_1(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{P}_3(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

最后的结果就是

$$x^3 = \frac{3}{5}\mathrm{P}_1(x) + \frac{2}{5}\mathrm{P}_3(x)$$

讨论

例6.1

$$x^3 = c_1 \mathrm{P}_1(x) + c_3 \mathrm{P}_3(x)$$

- $c_1 + c_3 = ?$
- 若将函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

按Legendre多项式展开，应有何结果?

讨论

例6.1

$$x^3 = c_1 \mathrm{P}_1(x) + c_3 \mathrm{P}_3(x)$$

- $c_1 + c_3 = ?$
- 若将函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

按Legendre多项式展开，应有何结果?

讨论

例6.1

$$x^3 = c_1 \mathsf{P}_1(x) + c_3 \mathsf{P}_3(x)$$

- $c_1 + c_3 = ?$
- 若将函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

按Legendre多项式展开，应有何结果?

例6.1

将函数$f(x) = x^3$按Legendre多项式展开

解法2

- 因为

$$x^3 = c_1 \mathrm{P}_1(x) + c_3 \mathrm{P}_3(x) = c_1 x + c_3\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$$

- 所以

$$\frac{5}{2}c_3 = 1 \qquad c_1 - \frac{3}{2}c_3 = 0$$

- 由此也可以解出c_1和c_3 ……

例6.1

将函数$f(x)=x^3$按Legendre多项式展开

解法2

- 因为

$$x^3=c_1\mathrm{P}_1(x)+c_3\mathrm{P}_3(x)=c_1x+c_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)$$

- 所以

$$\frac{5}{2}c_3=1 \qquad c_1-\frac{3}{2}c_3=0$$

- 由此也可以解出c_1和c_3 $\cdots$

例6.1

将函数$f(x) = x^3$按Legendre多项式展开

解法2

- 因为

$$x^3 = c_1\mathrm{P}_1(x) + c_3\mathrm{P}_3(x) = c_1 x + c_3\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$$

- 所以

$$\frac{5}{2}c_3 = 1 \qquad c_1 - \frac{3}{2}c_3 = 0$$

- 由此也可以解出c_1和c_3 $\cdots$

例6.1

将函数$f(x) = x^3$按Legendre多项式展开

解法2

- 因为

$$x^3 = c_1 \mathrm{P}_1(x) + c_3 \mathrm{P}_3(x) = c_1 x + c_3 \left(\frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right)$$

- 所以

$$\frac{5}{2} c_3 = 1 \qquad c_1 - \frac{3}{2} c_3 = 0$$

- 由此也可以解出c_1和c_3 $\cdots$

例6.1

将函数$f(x)=x^3$按Legendre多项式展开

解法3

- 因为

$$x^3 = c_1\mathrm{P}_1(x)+c_3\mathrm{P}_3(x) = c_1 x + c_3\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$$

- 两端代入$x=\sqrt{3/5}$，可得到何结果？

例6.1

将函数$f(x) = x^3$按Legendre多项式展开

解法3

- 因为

$$x^3 = c_1 \mathrm{P}_1(x) + c_3 \mathrm{P}_3(x) = c_1 x + c_3 \left(\frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right)$$

- 两端代入$x = \sqrt{3/5}$，可得到何结果?

例6.1

将函数$f(x)=x^3$按Legendre多项式展开

解法3

- 因为

$$x^3=c_1\mathrm{P}_1(x)+c_3\mathrm{P}_3(x)=c_1x+c_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)$$

- 两端代入$x=\sqrt{3/5}$，可得到何结果?