

无味变换与无味卡尔曼滤波

程水英

CHENG Shui-ying

电子工程学院,合肥 230037

Electronic and Engineering Institute, Hefei 230037, China

CHENG Shui-ying. Unscented Transformation and Unscented Kalman Filtering. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(24): 25-35.

Abstract: This paper presents an in-depth survey on the Unscented Transformation (UT) and the Unscented Kalman Filtering (UKF) algorithm, including the origination of the nonlinear estimation, the framework and the basic algorithm of UT, various evolutions of UT, the design guideline of sigma-point set, the basic algorithm of UKF and its variants, the further insight into UT, the comparison between UT and several other nonlinear derivative-free filtering methods, the application areas pertinent to UT and UKF, and a simulation example based on several typical forms of UKF. In the last part of the paper, some still unresolved problems about UT and UKF are exposed and an outlook of its future developments is explicitly listed too. Above all, some newest achievements and opinions are included in this paper, which are based on the author's own research findings.

Key words: nonlinear estimation; Unscented Transformation (UT); Unscented Kalman Filtering (UKF); extended Kalman filtering; particle filtering; statistical linear regression

摘要: 综述了非线性估计问题的由来、无味变换(UT, Unscented Transformation)的基本思路与基本算法、各种衍变形式、 σ 点集的设计原则、无味卡尔曼滤波(UKF, Unscented Kalman Filtering)的基本算法及其各种改进算法、UT的本质、UKF与几种免微分非线性滤波方法的比较、UT与UKF的相关应用、针对几种UKF算法的仿真实例,以及目前在UT与UKF的研究中尚存在的一些问题和对今后研究的展望等;提出了笔者的一些最新研究成果和见解。

关键词: 非线性估计; 无味变换; 无味卡尔曼滤波; 扩展卡尔曼滤波; 粒子滤波; 统计线性回归

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.24.008 文章编号: 1002-8331(2008)24-0025-11 文献标识码: A 中图分类号: TN911.7

1 问题的由来

统计信号处理中的估计理论经常需要解决这样的问题: 已知随机量 $\mathbf{x} \in R^N$ (N_x 维的实空间) 的统计特性, 来估计随机量 $\mathbf{y} \in R^N$ 的统计特性, 其中 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 满足如下映射关系:

$$g: R^{N_x} \rightarrow R^N \text{ 或 } \mathbf{y} = g(\mathbf{x}) \quad (1)$$

实际中, 更为常见的情况则是由 \mathbf{x} 的一、二阶矩(如均值和协方差阵)知识来估计 \mathbf{y} 的一、二阶矩, 而并不需要确切知道其统计特性; 如广为应用的卡尔曼滤波。上述问题普遍存在于自动控制、导航、跟踪、制导、数字通信、经济统计、概率推理、人工智能、信息融合和故障检测等领域的各种状态估计中。设 \mathbf{x} 的均值为 $\bar{\mathbf{x}}$, 协方差阵为 \mathbf{P}_x 。若 g 为线性映射: $\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{x}$, 则易知 \mathbf{y} 的均值和协方差阵分别为 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{P}_y = \mathbf{L}\mathbf{P}_x\mathbf{L}^T$ 。但若 g 为非线性映射, 要获取在最小均方误差(MMSE, Minimum Mean Square Error)意义上的总体最优解, 就必须用可能是无穷多个的参数去完全

描述 \mathbf{y} 的无穷维分布^[1-5]; 因为“维数灾难”以及运算量和存储量的急剧膨胀而使得该最优解不切实际, 在工程上也无此必要, 而只需做某种近似即可。通常的做法是先对 g 线性化, 得到关于 g 的线性映射近似 $\tilde{T}: R^{N_x} \rightarrow R^N$ 。比如借助于 Taylor 级数展开, 并忽略级数中二阶以上各项的影响。假定 $\delta\mathbf{x}$ 为 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的某一微小扰动, 均值为 $\mathbf{0}$ (零向量), 协方差阵为 \mathbf{P}_x , 并设 $g(\mathbf{x})$ 在包含 $\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}$ 的邻域内下述各阶导数存在或者更进一步假定 $g(\mathbf{x})$ 在该邻域内解析, 则 $g(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ 处的 Taylor 级数展开式为:

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = g(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}) = g(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla_{\delta\mathbf{x}} g(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2!} \nabla_{\delta\mathbf{x}}^2 g(\bar{\mathbf{x}}) + \dots + \frac{1}{n!} \nabla_{\delta\mathbf{x}}^n g(\bar{\mathbf{x}}) + \dots \quad (2)$$

其中定义算子 $\nabla_{\delta\mathbf{x}}^n g(\bar{\mathbf{x}}) \triangleq \langle \delta\mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{x}}^n g(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \triangleq (\delta\mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{x}})^n g(\bar{\mathbf{x}})$, 而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, $\nabla_{\mathbf{x}}$ 为微分算子。取其一阶近似得:

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60702015); 中国博士后科学基金资助项目(No. 20070420740)。

作者简介: 程水英(1974-), 男, 现在电子工程学院博士后流动站工作, 主要研究方向有机动目标跟踪、自动控制、软件无线电、DSP及应用、信号与信息处理等。

收稿日期: 2008-02-26 **修回日期:** 2008-04-28

$$y=g(x)=g(\bar{x}+\delta x)\approx g(\bar{x})+\nabla_{\delta x}g(\bar{x}) \quad (3)$$

由此易得 y 的均值 \bar{y} 和协方差阵 P_y 分别为:

$$\bar{y}\approx E[g(\bar{x})+\nabla_{\delta x}g(\bar{x})]=g(\bar{x}) \quad (4)$$

$$P_y=E[(y-\bar{y})(y-\bar{y})^T]\approx E[(\nabla_{\delta x}g(\bar{x}))(\nabla_{\delta x}g(\bar{x}))^T]=E[(\delta x^T \nabla_x)g(\bar{x})][(\delta x^T \nabla_x)g(\bar{x})^T]=\nabla_x^T g(\bar{x})E(\delta x \delta x^T)\nabla_x g(\bar{x})=[\nabla_x^T g(\bar{x})]P_x[\nabla_x g(\bar{x})]=J_g P_x J_g^T \quad (5)$$

其中 $\nabla_x^T g(\bar{x})$ 表示函数矩阵对矩阵的微分运算,其结果正好是 Jacobian 矩阵 J_g ^[6]。

为方便起见,将上述方法称为线性化法,该方法的不足之处在于:(1)当映射 g 在包含 $\bar{x}+\delta x$ 的邻域内存在严重的非线性时,舍去的高阶分量影响增强,由此带来的误差变大而难以忽略。虽然存在进一步截取二阶项的近似方法(二阶线性化法)^[5,7-8],但因其计算复杂和运算量大而难以实际应用。(2)因为涉及到 Jacobian 矩阵的计算,所以上述方法适用的前提是 Jacobian 矩阵存在;而对一些不可微的情况该方法自然失效。(3)对一些复杂的非线性映射函数矩阵,其 Jacobian 矩阵本身的计算就较为复杂。

2 无味变换的基本思路与基本算法

可见,为解决上述的非线性估计问题,传统的线性化方法的基本思路是对非线性映射本身做某种线性近似,然后再应用线性估计的各种方法。事实上,用有限的参数来近似随机量的概率统计特性要比近似任意的非线性映射函数更为容易^[9-11],基于此,S.J.Julier 等人提出了无味变换(UT, Unscented Transformation)^[5,9,12]。无味变换的基本步骤可概括为:关于 x 的 σ 点(sigma-point)集的产生→不确定性的非线性变换与传递→关于 y 的统计特性的推算;若用函数表示,即有 $[\hat{y}, P_y, P_{xy}] = UT[\bar{x}, P_x; y=g(x)]$; 而若用可操作的算法来表示,则可简述如下:

(1)精确选择一组确定的 σ 点 $\Gamma_x = [x^{(i)}, w^{(i)}]_{i=0}^p$, 其中权值满足归一化条件 $\sum_{i=0}^p w^{(i)} = 1$, 并有

$$\sum_{i=0}^p w^{(i)} (x^{(i)} - \bar{x})(x^{(i)} - \bar{x})^T = P_x \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^p w^{(i)} (x^{(i)} - \bar{x})(x^{(i)} - \bar{x})^T - P_x = 0 \quad (7)$$

(2)通过非线性映射 $g: R^N \rightarrow R^N$ 来变换传递随机量的不确定性,相应得到新的 σ 点集 $\Gamma_y = [y^{(i)}, w^{(i)}]_{i=0}^p$, 其中 $y^{(i)} = g(x^{(i)})$, 而权值 $w^{(i)}$ 不变。

(3)根据 σ 点集 Γ_y 推算非线性映射后 y 的均值与协方差,或由 Γ_x 与 Γ_y 估计 x 与 y 的互协方差:

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^p w^{(i)} y^{(i)} \quad (8)$$

$$P_y = \sum_{i=0}^p w^{(i)} (y^{(i)} - \hat{y})(y^{(i)} - \hat{y})^T \quad (9)$$

$$P_{xy} = \sum_{i=1}^N w^{(i)} (x^{(i)} - \bar{x})(y^{(i)} - \hat{y})^T \quad (10)$$

这里对在 E.Wan 和 R.Merwe 等人的文献中经常见到的一个例子^[13-17]稍作修改后重绘如图 1 所示。该图以二维为例,形象地示意了无味变换法与线性化法在估算经非线性传递后随机量统计特性方面的性能差异。其中无味变换法只用到了 5 个 σ 点甚至可以更少便达到了更高的估计精度,其优势显而易见。关于无味变换精度的定量分析详见文献[5, 18-19]。囿于篇幅,本文不再给出。

3 无味变换的形式衍变及 σ 点集的设计原则

自 Julier 等人提出无味变换^[20]至今已十年有余,但也只是到最近几年才逐步得到业界的认可和重视。根据 Zhe Chen^[11]向 Julier 本人的求证,无味变换的称谓本身并没有什么特殊的意思,只是现在已经成为公认度较高的一种称谓而已。

3.1 无味变换的各种衍变形式

这里首先介绍无味变换的几种衍变形式,其不同点主要在于 σ 点集的选取方式上。衍变改进的目的主要有:进一步提高变换的精度,以达到更高阶矩的近似;增强算法的数值稳定性;减小算法的运算量、存储量;使算法更容易实现;提出针对特定分布的无味变换形式,等等。当然,通常只能根据特定的场合达到其中的部分目标。

3.1.1 对称 σ 点集无味变换

对称 σ 点集无味变换(Symmetric Sigma Set UT)或对称集无味变换(Symmetric Set UT),其所选取的 σ 点集关于 x 的均值对称分布。对称集无味变换是无味变换提出之初的形式^[20],而且也是其它文献引用的主要形式,这实际上是由于它提出得较早,而且在处理以高斯分布为主的各种单峰对称形式分布的

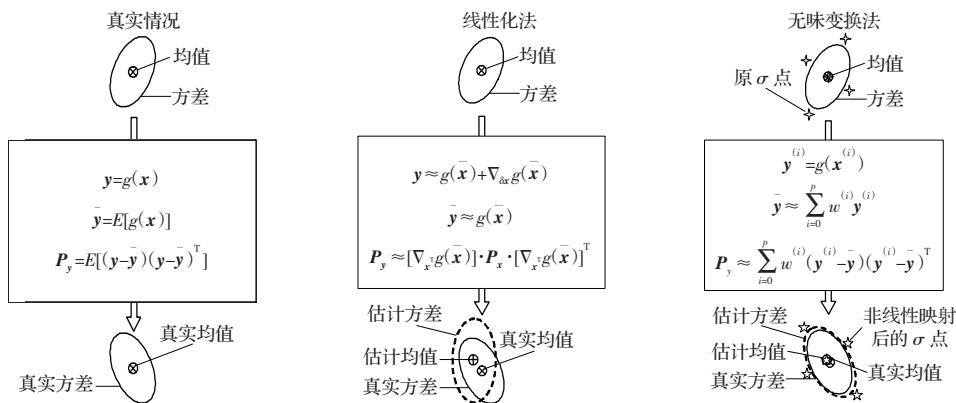


图 1 无味变换法与线性化法在估算经非线性传递后随机量统计特性的机理及性能差异示意图

随机量具有更高的精度。对称集无味变换本身也有多种形式,式(11)就是其中之一。因为在算法上与第2章中无味变换的基本算法是一致的,而只是 σ 点集的选取方法不同,所以这里只给出其 σ 点集的表达式。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(i)} &= \mathbf{x} + (\sqrt{N_x \mathbf{P}_x})_i, \mathbf{x}^{(i+N_x)} = \mathbf{x} - (\sqrt{N_x \mathbf{P}_x})_i \\ w^{(i)} &= w^{(i+N_x)} = \frac{1}{2N_x}, i=1, 2, \dots, N_x \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $(\sqrt{N_x \mathbf{P}_x})_i$ 表示矩阵 $N_x \mathbf{P}_x$ 平方根的第 i 个行向量或列向量,而矩阵平方根的常见求法就是用Cholesky分解^[6]来获得。可见,这种形式的对称集无味变换所要求的 σ 点集共有 $2N_x$ 个 σ 点,并关于 \mathbf{x} 的均值对称分布。

因为 σ 点集采用式(11)的对称集无味变换只能达到二阶的精度,所以,虽然其均值的估计精度要优于线性化方法,但其协方差阵的估计精度与采用线性化方法的效果是一样的^[5]。事实上,无味变换相比线性化方法的另一个优点就是它在实现中更具灵活性,特别是可以根据实际的分布信息来选取相应的 σ 点集,从而达到更高阶的估计精度。这一点在本节所介绍的几种无味变换形式中得到了较好的体现。为了作更高阶的近似,就需要在 σ 点集中引入新的参数。方法之一是在式(11)的 σ 点集中增加一个等于 \mathbf{x} 均值的点,其权值为 $w^{(0)}$ 。由于这新增的点,与原先 $2N_x$ 个 σ 点相应的权值也需作适当调整。改进后全部的 $2N_x+1$ 个 σ 点如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &= \mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x} + \eta_0 (\sqrt{\mathbf{P}_x})_i, \mathbf{x}^{(i+N_x)} = \mathbf{x} - \eta_0 (\sqrt{\mathbf{P}_x})_i \\ w^{(0)} &= w^{(0)}, w^{(i)} = w^{(i+N_x)} = \frac{1}{2}, i=1, 2, \dots, N_x \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\eta_0 \triangleq \sqrt{N_x / (1-w^{(0)})}$ 。 $w^{(0)}$ 的引入使得减小高阶误差成为可能^[5,9,18],虽然这并不能消除高阶的误差^[19]。引入 $w^{(0)}$ 还有一个作用,就是可以用 $w^{(0)}$ 来控制 σ 点的分布范围。比较式(11)与(12)易见,当权值 $w^{(0)}=0$ 时,式(12)就蜕化为(11)。此时 σ 点集中 σ 点的分布半径随着维数 N_x 的增加而增大,增加的比例为 $\sqrt{N_x}$ 。而当 $w^{(0)} \neq 0$ 时, σ 点的分布半径与 η_0 成比例;当 $w^{(0)} > 0$ 时,分布半径增大;当 $w^{(0)} < 0$ 时,分布半径减小。若取

$$w^{(0)} = \frac{\gamma}{N_x + \gamma}, (\gamma \in R) \quad (13)$$

就得到无味变换的早期也是被引用最多的形式^[9,18,20],可见 γ 只是另一种形式的 $w^{(0)}$,二者所起的作用是一样的。虽然 γ 的取值可正可负,但当 γ 为负值时,依照式(9)计算的协方差阵有可能不满足半正定的条件,为此文献^[9,18]给出了一种改进形式,唯一的变动在于 \mathbf{P}_y 的计算上,此时式(9)的估算式需改写如下:

$$\mathbf{P}_y^{\text{Mod}} = \sum_{i=1}^{2N_x} w^{(i)} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{y}^{(0)}) (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{y}^{(0)})^T \quad (14)$$

而后面将要介绍的变尺度无味变换则是更为通用、性能更优的一种改进。

3.1.2 单形 σ 点集无味变换

减小运算量、提高实时性,一直是各种算法追求的目标之一,特别是在一些实时性要求较高的场合就更为重要。无味变换的运算量是与参与运算的 σ 点的数目成比例的,因此,尽量

减少 σ 点的数目就成为减小运算量的一种直接的选择。单形 σ 点集无味变换(Simplex Sigma Set UT)或单形集无味变换(Simplex Set UT)就是在这一背景下提出的^[5,10,21]。单形(Simplex)^[6]实际上是代数拓扑学(Algebraic Topology)中同调论(Homology Theory)的基本概念,在运筹学也得到了很好的应用。 L 维单形具有 $L+1$ 个顶点。类似的,当同时考虑匹配 \mathbf{x} 的均值和协方差阵时,所需 σ 点的最小数目为 N_x+1 。而且,由于任意 N_x+1 个仿射独立(Affinely Independent)^[6]的 σ 点都可以通过平移和线性变换而具有任意给定的均值和协方差,因此,这里仅考虑 \mathbf{x} 的均值为 $\mathbf{0}$ 、协方差阵为单位阵 \mathbf{I} 的情况。若实际随机量 $\check{\mathbf{x}}$ 的均值为 $\bar{\mathbf{x}}$,协方差阵为 $\mathbf{P}_{\check{\mathbf{x}}}$,则随机量 $\check{\mathbf{x}}$ 和 \mathbf{x} 之间 σ 点的转换关系为^[10,21]:

$$\check{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{P}_{\check{\mathbf{x}}}} \mathbf{x}^{(i)} \quad (15)$$

σ 点数取最小值 N_x+1 的单形无味变换,只能匹配 \mathbf{x} 的均值和协方差,即只能精确到二阶。但在考虑到其它的优化限制时,如使得斜度(skew)最小,则所需的 σ 点数将有所增加,如Julier等人提出的两种单形 σ 点集实际都有 N_x+2 个 σ 点。Julier和Uhlmann^[21]于2002年提出了最小斜度单形无味变换(Minimal Skew Simplex UT),其 σ 点集的选取算法如下:

(1)选取权值 $w^{(0)}$,取值范围为 $0 \leq w^{(0)} \leq 1$,其它权值的确定方法如下:

$$w^{(1)} = \frac{1-w^{(0)}}{2}, w^{(2)} = w^{(1)}, w^{(i)} = 2^{i-2} w^{(1)} (i=3, \dots, N_x+1)$$

(2)初始化随机量 \mathbf{x} 为1维时各 σ 点的向量,其中维数 j 的标志用“ j ”表示:

$$\mathbf{x}_{-1}^{(0)} = [0], \mathbf{x}_{-1}^{(1)} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2w^{(1)}}}\right], \mathbf{x}_{-1}^{(2)} = \left[\frac{1}{\sqrt{2w^{(1)}}}\right]$$

(3)迭代计算维数 $j=2, \dots, N_x$ 时各 σ 点的向量:

$$\mathbf{x}_{-j}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{-j-1}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{-j}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{-j-1}^{(i)} \\ -\frac{1}{\sqrt{2w^{(j)}}} \end{bmatrix} (i=1, \dots, j)$$

$$\mathbf{x}_{-j}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{j-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2w^{(j)}}} \end{bmatrix} (i=j+1)$$

最小斜度单形无味变换能够在精确匹配 \mathbf{x} 的二阶分布信息的同时,使得 σ 点集的三阶斜度最小;实际上是使得三阶斜度的交叉项最小,而非交叉项为0。之所以要使斜度最小,是由于在未知 \mathbf{x} 的斜度信息时,不妨假设 \mathbf{x} 为对称分布,即斜度为0,这样可以获得最小的平均误差;否则在概率上就有一半的可能是发生最糟的结果^[5,21]。最小斜度单形无味变换存在的问题是:其 σ 点集中权值的变化因子为 2^n ,向量模值的变化因子为 $2^{n/2}$,这在维数较高时会引起算法的数值不稳。为了克服这一缺陷,Julier于2003年又提出了球面单形无味变换(Spherical Simplex UT)^[10]。球面单形无味变换用到的 σ 点数目仍然为 N_x+2 ,但其具有如下两个良好性能,即除第0个 σ 点向量及其权值外,其它所有的 σ 点向量均位于半径为 $\sqrt{N_x} / (1-w^{(0)})$ 的超球面上,并具有相等的权值,该值为 $(1-w^{(0)}) / (N_x+1)$ 。其 σ 点集的具体选取算法如下:

(1)选取权值 $w^{(0)}$, 取值范围为 $0 \leq w^{(0)} \leq 1$, 其它权值的确定方法如下:

$$w^{(i)} = \frac{1-w^{(0)}}{N_x+1} \quad (i=1, \dots, N_x+1)$$

(2)初始化随机量 x 为 1 维时各 σ 点的向量:

$$x_{-1}^{(0)} = [0], x_{-1}^{(1)} = [-\frac{1}{\sqrt{2w^{(1)}}}], x_{-1}^{(2)} = [\frac{1}{\sqrt{2w^{(1)}}}]$$

(3)迭代计算维数 $j=2, \dots, N_x$ 时各 σ 点的向量:

$$x_{-j}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_{-j-1}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix}, x_{-j}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{-j-1}^{(i)} \\ -\frac{1}{\sqrt{j(j+1)w^{(1)}}} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, j)$$

$$x_{-j}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0_{j-1} \\ 1 \\ \sqrt{j(j+1)w^{(1)}} \end{bmatrix} \quad (i=j+1)$$

可见,在关于 x 的更高阶中心矩信息未知的情况下,单形集无味变换与对称集无味变换,都可以精确匹配 x 的均值和协方差;但前者的 σ 点数只有后者的约一半,从而可以节省将近一半的运算量,这一点特别是在高维的情况所显现的效益更为明显,当然前者的斜度不可能减小到 0。

3.1.3 变尺度无味变换

观察上述各种无味变换衍变形式中各自选取的 σ 点集,可以发现存在一个共同的缺陷,就是当随机量 x 的维数增大时, σ 点集的覆盖半径也随之增大,我们称其为 σ 点集的聚集性(aggregation)变差。在对称集无味变换中给出了一种解决方法,即在式(12)中所引入的 $w^{(0)}$,为了克服由此可能造成的估计协方差阵的非半正定问题,又给出了如式(14)的修正形式。而这里将要介绍的变尺度无味变换(Scaled UT),则是用来实现 σ 点集良好聚集性的一种更为通用的方式,原则上它可以适用于无味变换的各种衍变形式,同时还可以保证估计协方差阵的半正定性。Julier 提出了两种等价形式的变尺度无味变换^[2],其共同点就在于克服 σ 点集分布膨胀的方法上,都是借助于将原 σ 点集进行下述的简单变换:

$$\tilde{x}^{(i)} = x^{(0)} + \alpha(x^{(i)} - x^{(0)}) \quad (16)$$

其中 α 是一正值的尺度参数,为了使高阶误差的影响最小,可以让 α 取值足够小。在效果上,两种形式均能保证对于任意的 α 取值所估计的协方差阵均为半正定。变尺度无味变换的第一种形式叫做辅助随机变量式变尺度无味变换(Auxiliary Random Variable Formulation of the Scaled UT),方法是引入如下的辅助随机变量:

$$z \triangleq \tilde{g}(x) = \frac{g(\tilde{x})}{\alpha} + (1 - \frac{1}{\alpha})g(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha}g[\bar{x} + \alpha(x - \bar{x})] + (1 - \frac{1}{\alpha})g(\bar{x}) \quad (17)$$

可见,式(16)的尺度变换已经包含在式(17)之中。其基本算法如下:

(1)按照通常方法选取 σ 点集 $\Gamma_x = \{x^{(i)}, w^{(i)} \mid \sum_{i=0}^p w^{(i)} = 1\}_{i=0}^p$,

并至少满足式(6)和(7)。

(2)将 σ 点集 Γ_x 转换为 $\tilde{\Gamma}_x = \{z^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}\}_{i=0}^p$, 其中权值 $w^{(i)}$ 不

变,而向量 $z^{(i)}$ 与 $x^{(i)}$ 的关系满足式(16)。

(3)对均值和协方差的估计式分别为:

$$\hat{y} = \hat{z} = \sum_{i=0}^p w^{(i)} z^{(i)} \quad (18)$$

$$P_y = \alpha^2 \hat{P}_z = \alpha^2 \sum_{i=0}^p w^{(i)} (z^{(i)} - \hat{z})(z^{(i)} - \hat{z})^T \quad (19)$$

Julier^[22]证明了按照式(18)和(19)估计的均值和协方差可以精确到二阶,三阶以上项的影响还可以通过尺度参数 α 进行控制。另外,因为式(19)表示的是向量外积的加权和,所以在所有权值均非负的条件下,按照式(19)估计的协方差阵必为半正定的。

Julier 给出的另一种形式的变尺度无味变换不需要如式(17)那样对原有的非线性映射进行变更,而只需对原先的 σ 点集进行简单的变换,该种形式的变尺度无味变换也就是人们通常所用和所称谓的变尺度无味变换,其具体算法如下:

(1)按照通常方法选取 σ 点集 $\Gamma_x = \{x^{(i)}, w^{(i)} \mid \sum_{i=0}^p w^{(i)} = 1\}_{i=0}^p$,

并至少满足式(6)和(7)。

(2)将 σ 点集 Γ_x 转换为 $\tilde{\Gamma}_x = \{x^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}\}_{i=0}^p$, 其中 $x^{(i)}$ 满足式

(16),而权值 $\tilde{w}^{(i)}$ 为:

$$\tilde{w}^{(i)} = \begin{cases} \frac{w^{(0)}}{2} + (1 - \frac{1}{2})\alpha & (i=0) \\ \frac{w^{(i)}}{\alpha} & (i \neq 0) \end{cases} \quad (20)$$

(3)通过非线性映射得到新的 σ 点集 $\tilde{\Gamma}_y = \{y^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}\}_{i=0}^p$, 其中 $y^{(i)}$ 满足 $y^{(i)} = g(x^{(i)})$ 。

(4)对均值和协方差的估计式分别为:

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^p \tilde{w}^{(i)} y^{(i)} \quad (21)$$

$$P_y = \sum_{i=0}^p \tilde{w}^{(i)} (y^{(i)} - \hat{y})(y^{(i)} - \hat{y})^T + (\beta + 1 - \alpha^2)(y^{(0)} - \hat{y})(\Gamma^{(0)} - \hat{y})^T \quad (22)$$

Julier^[22]证明了当 $\beta=0$ 时,上述算法估计出的均值和协方差阵在精度上与用辅助随机变量式变尺度无味变换估计的结果是一致的,而且也能保证所估计的协方差阵的半正定性。当 $\beta=0$ 和 $\alpha=1$ 时,式(22)就成为式(9)。前面已经指出,变尺度无味变换在均值和协方差阵的估计上可以精确到二阶,三阶以上的误差则可以通过尺度参数 α 进行控制;特别地,为了进一步控制其中的四阶误差项,在式(22)中引入了参数 β 。当 x 为高斯分布时,取 $\beta=2$ 就可以使四阶误差项最小化^[22]。另外易见,与普通的非变尺度无味变换相比,变尺度无味变换在保证上述性能的同时在运算量上并没有任何增加。而且在仔细观察上述算法的步骤(1)和(2)后会发现,二者完全可以合而为一。比如对前面式(12)的对称集无味变换进行变尺度得到变尺度对称集无味变换(Scaled Symmetric Set UT),给出相应的 σ 点集选取算法如下:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \bar{x}, x^{(i)} = \bar{x} + \eta(\sqrt{P_x})_i, x^{(i+N_x)} = \bar{x} - \eta(\sqrt{P_x})_i \\ w^{M(0)} &= \frac{w^{(0)}}{2} + (1 - \frac{1}{2})\alpha, w^{C(0)} = w^{M(0)} + (\beta + 1 - \alpha^2) \\ w^{M(i)} &= w^{C(i)} = w^{M(i+N_x)} = w^{C(i+N_x)} = \frac{1}{2\eta} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\eta \triangleq \alpha \sqrt{\frac{N_x}{1-w^{(0)}}}, (i=1, 2, \dots, N_x)$$

其中权值的上标 M 表示是关于均值的, C 则是关于协方差阵的。这样,估算均值和协方差阵的算式就可以分别直接引用式(8)、(9)和(10),只要分别带入相应的权值即可。

3.1.4 高阶无味变换

以上介绍的几种无味变换其估计精度均是在二阶或三阶(对称集)以下,当然其更高阶的误差可以通过额外的参数进行控制。Julier^[23]还将无味变换扩展到可以精确估计任意分布的三阶项。作者把精确估计的精度在四阶以上的无味变换称为高阶无味变换(High Order UT)。Julier 和 Uhlmann 针对高斯分布提出了四阶无味变换^[5,24]。仍然采用了对称 σ 点集,但 σ 点数增加到 $2N_x^2+1$ 。由于是对称 σ 点集,所以其奇数阶矩自动为零,而其偶数阶矩则可以精确估计到四阶,并使得六阶矩的误差最小化。Tenne 和 Singh^[25]同样是针对高斯分布,也是采用了对称 σ 点集,以一维为例:仅用 5 个 σ 点就可以精确到 8 阶,而用 7 个 σ 点则可以精确到 12 阶。

3.2 无味变换中 σ 点集的设计原则

前面介绍了各种形式的无味变换,特别是其中 σ 点集的不同选取算法。这里将给出更一般意义上的 σ 点集的设计原则,这样人们就可以根据自己的需要设计一些独特的无味变换。设随机量 x 的概率密度函数为 $p_x(x)$,为了近似随机量的某些统计特性,首先所设计的 σ 点集 Γ_x 必须满足限制条件

$$Q[\Gamma_x, p_x(x)] = 0 \quad (24)$$

其中的 $Q[\Gamma_x, p_x(x)]$ 确定了 σ 点集必须完全匹配的关于随机量 x 的某些统计特性。比如式(6)和(7)就是用于使得所设计的 σ 点集能够匹配随机量 x 的均值和协方差特性的限制条件。实际中根据式(24)可能还不能完全确定 σ 点集,即还存在一些自由度;于是再引入设计 σ 点集的代价函数(Cost Function)或惩罚函数(Penalty Function) $C[\Gamma_x, p_x(x)]$ ^[5,10,21,24],设计的原则是所选取的 σ 点集能够使得该代价函数最小化,或者说是尽可能地满足某种条件而不要求一定能够达到。比如,设计如式(12)的对称 σ 点集时所用到的代价函数就是尽可能地匹配高斯分布的峭度(Kurtosis),设计最小斜度单形 σ 点集时所用到的代价函数就是尽可能地使斜度最小,而设计四阶对称 σ 点集时所用到的代价函数就是尽可能地匹配高斯分布的六阶矩。这样,再综合式(24)的限制条件就可以得到关于设计 σ 点集的一般性原则为:

$$\arg \min_{\Gamma_x} C[\Gamma_x, p_x(x)]; \Gamma_x \in \{\Gamma_x; Q[\Gamma_x, p_x(x)] = 0\} \quad (25)$$

4 无味卡尔曼滤波

以上讨论了在一次实现中如何用无味变换估计随机量经非线性映射后的统计特性,但实际上更多的是要求能够在线、实时、反复地进行估计,这就涉及到无味变换的递推实现——无味滤波(UF, Unscented Filtering)。无味滤波的实现很简单,就是将无味变换对随机量经非线性映射后统计信息的估计嵌入到其它的滤波算法中。虽然并不局限于卡尔曼滤波(KF, Kalman Filtering)^[4,26-30],但与无味变换最常见的结合还是卡尔曼滤波,并被称为无味卡尔曼滤波(UKF, Unscented Kalman Filtering)^[5,9,12-15,18,20,24,28]。在模型线性以及噪声和初始状态为高斯独立分布的条件下,卡尔曼滤波器递推地给出了 MMSE 意

义上的总体最优解,所以卡尔曼滤波器也被称为序贯 MMSE 估计子(Sequential MMSE Estimator)^[29]或递推 MMSE 估计子。但由于实际中广泛存在的非线性状态空间模型,使得卡尔曼滤波的直接应用变得困难,于是便出现了诸多针对非线性模型的次优方法^[3-4,7,39,41-42],这其中应用最广的便是扩展卡尔曼滤波(EKF, Extended KF)。在 KF 的基础上,EKF 解决非线性的思路正是上述基于级数展开的一阶近似线性化方法,其缺陷也如线性化方法,而且由于是递推实现,在模型非线性较强时,其误差的积累常常会造成滤波器的发散。

4.1 无味卡尔曼滤波的基本形式及与扩展卡尔曼滤波的比较

非线性递推滤波主要是解决如下离散的或离散化的^[31]非线性动态系统模型中的状态递推估计问题:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (26)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) \quad (27)$$

其中式(26)为状态方程,(27)为观测方程, \mathbf{x}_k 为 k 时刻的状态向量, \mathbf{v} 为状态噪声, \mathbf{y} 为观测向量, \mathbf{w} 为观测噪声,各自的维数分别为 N_x, N_v, N_y 和 N_w , $f(\cdot, \cdot)$ 为状态模型, $h(\cdot, \cdot)$ 为观测模型,模型均为已知,且至少有一个为非线性。为简单起见,假定噪声 \mathbf{v} 和 \mathbf{w} 为零均值的白噪声,并且有

$$\begin{aligned} \forall i, j: E[\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T] &= \delta_{ij} \mathbf{P}_v, E[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T] = \delta_{ij} \mathbf{P}_w, E[\mathbf{v}_i \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{0}, \\ E[\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_i^T] &= \mathbf{0}, E[\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_i^T] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (28)$$

我们的目的就是要递推地在每次获得观测测量 \mathbf{y}_k 后,估计状态量 \mathbf{x}_k 。定义状态量的一步预测为 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \triangleq E(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$,其它类推,则上述问题在线性最小均方误差(LMMSE, Linear MMSE)意义上的线性最优估计子为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k \quad (29)$$

在模型线性以及噪声和初始状态均为高斯独立分布时,该估计子则是总体最优的 MMSE 估计子,也即线性高斯卡尔曼滤波中的估计子。估计的协方差为:

$$\mathbf{P}_{x_{k|k}} = \mathbf{P}_{x_{k|k-1}} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{y_{k|k-1}} \mathbf{K}_k^T \quad (30)$$

上述两式中的 \mathbf{K}_k 为滤波增益,而 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 为新息或测量残差,二者分别为:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{x_{k|k-1}, y_{k|k-1}}^{-1} \mathbf{P}_{y_{k|k-1}}^{-1} \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \quad (32)$$

整个滤波算法基本由时间更新方程(Time Update Equations)/先验更新(A Priori Update)与测量更新方程(Measurement Update Equations)/后验更新(A Posteriori Update)组成。式(29)和(30)就是测量更新方程,可见其中只用到了随机量的一、二阶信息。无论是 EKF 还是 UKF,上述方程是一致的,二者的区别仅在于这些方程右端所用的一、二阶信息的获取方法上,也就是说需要通过不同的时间更新方程进行估计,这也正是前述的对随机量经非线性映射后统计特性的估计问题。其中 EKF 采用的是上述的线性化方法,应用式(4)和(5)即可得到相应的时间更新方程如下:

状态量的一步预测:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}}_{k-1}) \quad (33)$$

状态量一步预测的协方差:

$$P_{x_{k|k-1}} = [\nabla_x f(\hat{x}_{k-1|k-1})] P_{x_{k-1}} [\nabla_x f(\hat{x}_{k-1|k-1})]^T + [\nabla_x f(\mathbf{v}_{k-1})] P_{v_{k-1}} [\nabla_x f(\mathbf{v}_{k-1})]^T \quad (34)$$

观测量的一步预测:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = h(\hat{x}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{w}}_k) \quad (35)$$

观测量一步预测的协方差:

$$P_{y_{k|k-1}} = [\nabla_x h(\hat{x}_{k|k-1})] P_{x_{k|k-1}} [\nabla_x h(\hat{x}_{k|k-1})]^T + [\nabla_w h(\mathbf{w}_k)] P_{w_k} [\nabla_w h(\mathbf{w}_k)]^T \quad (36)$$

一步预测的互协方差:

$$P_{x_{k|k-1} y_{k|k-1}} = P_{x_{k|k-1}} [\nabla_x h(\hat{x}_{k|k-1})]^T \quad (37)$$

而 UKF 采用的则是无味变换法。但有一点值得注意的是, 因为式(26)和(27)中的噪声为非加性噪声, 所以在应用 UKF 时需首先对状态量进行扩展, 也就是将模型噪声也作为状态量的一部分, 相应地, 无味变换中用到的 σ 点也需扩展, 而且式(26)和(27)所表示的模型本身也需作简单的变更。具体表示如下:

扩展状态方程:

$$\mathbf{x}_{k+1}^a = f^a(\mathbf{x}_k^a) \quad (38)$$

扩展观测方程:

$$\mathbf{y}_k^a = h^a(\mathbf{x}_k^a) \quad (39)$$

状态扩展向量为 $\mathbf{x}^a \triangleq [\mathbf{x}^T \ \mathbf{v}^T \ \mathbf{w}^T]^T$, 其均值为 $\bar{\mathbf{x}}^a = [\bar{\mathbf{x}}^T \ \bar{\mathbf{v}}^T \ \bar{\mathbf{w}}^T]^T$, 协方差阵为 $P_{\mathbf{x}^a} = \text{diag}(P_{\mathbf{x}}, P_{\mathbf{v}}, P_{\mathbf{w}})$ 。由此并根据前面介绍的各种 σ 点集的选取方法选择 σ 点集 $\Gamma_{\mathbf{x}^a} = \{\mathbf{x}^{a(i)}, \mathbf{w}^{a(i)}\}_{i=0}^p$, 其中 $\mathbf{x}^{a(i)} \triangleq$

$[(\mathbf{x}^{(i)})^T \ (\mathbf{v}^{(i)})^T \ (\mathbf{w}^{(i)})^T]^T$ 为扩展 σ 点向量。状态扩展后再应用式(8)、(9)和(10)即可得到 UKF 中基本的时间更新方程如下:

扩展状态 σ 点向量经过状态方程的非线性映射:

$$\mathbf{x}_{k|k-1}^{a(i)} = f^a(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^{a(i)}) \quad (40)$$

扩展状态量的一步预测:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^a = \sum_{i=0}^p w^{a(i)} \mathbf{x}_{k|k-1}^{a(i)} \quad (41)$$

扩展状态量一步预测的协方差:

$$P_{x_{k|k-1}}^a = \sum_{i=0}^p w^{a(i)} (\mathbf{x}_{k|k-1}^{a(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^a)(\mathbf{x}_{k|k-1}^{a(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^a)^T \quad (42)$$

一步预测的扩展状态 σ 点向量经过观测方程的非线性映射:

$$\mathbf{y}_{k|k-1}^{a(i)} = h^a(\mathbf{x}_{k|k-1}^{a(i)}) \quad (43)$$

观测量的一步预测:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^a = \sum_{i=0}^p w^{a(i)} \mathbf{y}_{k|k-1}^{a(i)} \quad (44)$$

观测量一步预测的协方差:

$$P_{y_{k|k-1}}^a = \sum_{i=0}^p w^{a(i)} (\mathbf{y}_{k|k-1}^{a(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^a)(\mathbf{y}_{k|k-1}^{a(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^a)^T \quad (45)$$

一步预测的互协方差:

$$P_{x_{k|k-1}^a y_{k|k-1}^a} = \sum_{i=0}^p w^{a(i)} (\mathbf{x}_{k|k-1}^{a(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^a)(\mathbf{y}_{k|k-1}^{a(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^a)^T \quad (46)$$

可见, UKF 没有涉及非线性映射函数的 Jacobian 矩阵计算问题, 从而使其算法的实现更为容易。

4.2 无味卡尔曼滤波的发展

如上所述, 因为式(26)和(27)所给的非线性动态系统模型

的一般性, 即模型均为非线性, 而且噪声也是非加性噪声, 所以上述的 UKF 算法也是 UKF 的最一般形式, 其中需要对状态量进行扩展。事实上, 若某一噪声项为加性噪声, 则状态向量就无需将其扩展进去; 若更进一步地, 对应的某一模型也为线性, 则相应模型中随机量的一、二阶信息的估计就可以应用普通的线性卡尔曼滤波, 从而减小算法的运算量。M.Briers^[32]等人正是基于这一考虑, 将式(26)和(27)中所有可能的组合, 即模型的线性与非线性, 噪声的加性与非加性, 进行了系统的总结, 给出了各种情况下 UKF 所应采用的具体形式, 也就是所谓的 Rao-Blackwellised UKF(RBUKF)。

出于提高算法的数值稳定性和减小算法运算量的考虑, Merwe 和 Wan 借用平方根滤波(Square-Root Filtering)^[4,27-28,30,33]的思想, 提出应用 QR 分解^[6]和 Cholesky 分解更新的方法直接非线性传递更新协方差阵的平方根, 而不是如上所述的先传递更新协方差阵再计算其平方根, 该方法被称为平方根 UKF(SR-UKF, Square-Root UKF)^[15-16,28]。这里借用 Matlab 软件中的一些函数名称, 用 $qr(\cdot)$ 表示对矩阵的 QR 分解, 但只返回分解后的上三角矩阵 S ; 用 $chol(\cdot)$ 表示对矩阵的 Cholesky 分解, 并返回上三角因子; 用 $cholupdate(S, \mathbf{u}, \pm v)$ 表示对矩阵 $S^T S \pm \sqrt{v} \mathbf{u} \mathbf{u}^T$ Cholesky 分解的秩 1 更新(Update)或复旧(Downdate); 用“/”表示矩阵的右除; 另外定义列向量与矩阵的加法规则是向量与矩阵的每一列相加。以变尺度对称集无味变换为例, 其 σ 点集的选取算法如式(23), 而对应的 SR-UKF 算法列示如下:

$$(1) \text{初始化: } \hat{\mathbf{x}}_{00}^a = E(\mathbf{x}_{00}^a), S_{00} = chol(E((\mathbf{x}_{00}^a - \hat{\mathbf{x}}_{00}^a)(\mathbf{x}_{00}^a - \hat{\mathbf{x}}_{00}^a)^T)) \quad (47)$$

如下是循环递推处理。

(2) σ 点的计算与时间更新方程:

$$\mathbf{X}_{k-1|k-1}^a = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^a \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^a + \eta \mathbf{S}_{x_{k-1}} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^a - \eta \mathbf{S}_{x_{k-1}}] \quad (47)$$

$$\mathbf{X}_{k|k-1}^a = f^a(\mathbf{X}_{k-1|k-1}^a) \quad (48)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^a = \sum_{i=0}^{2N_x} w^{aM(i)} \mathbf{x}_{k|k-1}^{a(i)} \quad (49)$$

$$\tilde{S}_{x_{k|k-1}} = qr([\sqrt{w^{C(1)}} (\mathbf{X}_{k|k-1}^{a(1:2N_x)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^a)]^T) \quad (50)$$

$$S_{x_{k|k-1}} = cholupdate(\tilde{S}_{x_{k|k-1}}, \mathbf{x}_{k|k-1}^{a(0)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^a, w^{C(0)}) \quad (51)$$

$$\mathbf{Y}_{k|k-1}^a = h^a(\mathbf{X}_{k|k-1}^a) \quad (52)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^a = \sum_{i=0}^{2N_y} w^{a(i)} \mathbf{y}_{k|k-1}^{a(i)} \quad (53)$$

$$\tilde{S}_{y_{k|k-1}} = qr([\sqrt{w^{C(1)}} (\mathbf{Y}_{k|k-1}^{a(1:2N_y)} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^a)]^T) \quad (54)$$

$$S_{y_{k|k-1}} = cholupdate(\tilde{S}_{y_{k|k-1}}, \mathbf{y}_{k|k-1}^{a(0)} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^a, w^{C(0)}) \quad (55)$$

$$P_{x_{k|k-1}^a y_{k|k-1}^a} = \sum_{i=0}^{2N_y} w^{aC(i)} (\mathbf{x}_{k|k-1}^{a(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^a)(\mathbf{y}_{k|k-1}^{a(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^a)^T \quad (56)$$

(3) 测量更新方程:

$$\mathbf{K}_k = (P_{x_{k|k-1}^a y_{k|k-1}^a} / S_{y_{k|k-1}}^T) / S_{y_{k|k-1}} \quad (57)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \quad (58)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^a = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^a + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k \quad (59)$$

$$S_{x_{k|k}^a} = cholupdate(S_{x_{k|k-1}^a}, \mathbf{K}_k S_{y_{k|k-1}}^{-1}, -1) \quad (60)$$

为了解决在其它形式的无味变换中可能出现的病态协方

差阵问题,提高算法的数值鲁棒性,Zhe Chen^[11]提出用奇异值分解(SVD, Singular-Value Decomposition)^[6]代替常用的Cholesky分解来求解协方差阵的平方根,称之为奇异值分解 UKF(SVD-UKF)。无论是时间更新方程还是测量更新方程,SVD-UKF 与一般的 UKF 算法都是一样的,区别就在于 σ 点向量的选取运算采用的是 SVD。具体如下:

$$P_{x_{ik}} = U_{k|k} S_{x_{ik}}^T V_{k|k} \quad (61)$$

$$\chi_{k|k}^a = [\hat{x}_{k|k}^a \quad \hat{x}_{k|k}^a + \rho U_{k|k} \sqrt{S_{x_{ik}}} \quad \hat{x}_{k|k}^a - \rho U_{k|k} \sqrt{S_{x_{ik}}}] \quad (62)$$

其中 ρ 为用于控制协方差范围的尺度参数,其较为恰当的取值范围是 $1 \leq \rho \leq 2^{0.5}$ 。

此外, Van Zandt^[34]提出了一种更稳健的无味变换,其基本思路是借用所谓的“隐变量”(Hidden Variables),将随机量扩展到高维并采样 σ 点,然后通过正交变换将其投影到低维,这是一种非矩阵平方根的形式。Van Zandt 特别指出,该方法尤其适用于不连续的非线性映射。

4.3 迭代无味卡尔曼滤波

无论是均值估计还是协方差阵估计,无味变换均假定 x 的均值 \bar{x} 无误差,所以 δx 的均值为 0 , 奇数阶矩也相应为 0 ; 但若该假定不成立,则 \bar{x} 的偏差将随着滤波器迭代次数的增大而增大。具体到上述的 UKF 算法中来说就是:状态的一步预测 $\hat{x}_{k|k-1}$ 难免存在偏差,而这种偏差通过 UT 传递到观测量的一步预测 $\hat{y}_{k|k-1}$ 和协方差估计 $P_{y_{k-1}}, P_{x_{k-1}, y_{k-1}}$ 之中,并最终导致均值估计 $\hat{x}_{k|k}$ 和协方差估计 $P_{x_{ik}}$ 的误差;最糟糕的情况就是 $\hat{x}_{k|k-1}$ 的偏差使得滤波器完全发散。因此,若能够在 UKF 中减小一步预测 $\hat{x}_{k|k-1}$ 的偏差,则可以进一步提高 UKF 最终估计的精度。因此,受已有的迭代最小二乘估计(ILSE, Iterated Least Squares Estimation)^[4]和迭代 EKF(IEKF)^[4, 35-36]的启发,提出了迭代 UKF(IUKF)算法^[19]。

IUKF 的时间预测方程仍如 UKF, 但其测量更新方程需改为如下的迭代形式:

$$\hat{x}_{k|k}^{i+1} = \hat{x}_{k|k-1}^i + K_k^i y_k^i \quad (63)$$

$$P_{x_{ik}}^{i+1} = P_{x_{ik-1}}^i - K_k^i P_{y_k}^i (K_k^i)^T \quad (64)$$

其中 $K_k^i = P_{xy_k}^i (P_{y_k}^i)^{-1}$, $y_k^i = y_k - \hat{y}_{k|k-1}^i$, $[y_k^i, P_{y_k}^i, P_{xy_k}^i] = UT(\hat{x}_{k|k-1}^i, P_{x_{ik-1}}^i)$, 上标“ i ”表示第 i 次迭代值。当 $i=0$ 时, $\hat{x}_{k|k}^0 = \hat{x}_{k|k-1}^0$, $P_{x_{ik}}^0 = P_{x_{ik-1}}^0$, 此时就是基本的 UKF。设 M 为迭代次数,则 IUKF 的滤波估计输出为 $\hat{x}_{k|k}^{IUKF}$ 和 $P_{x_{ik}}^{M+1}$ 。IUKF 算法的流程图如图 2 所示。

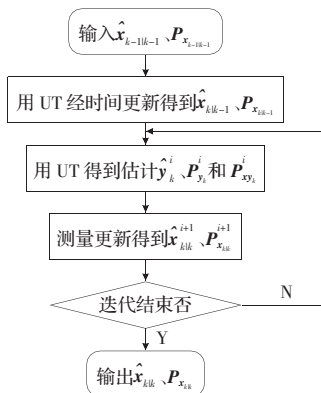


图 2 IUKF 算法流程图

5 对无味变换与无味卡尔曼滤波的进一步研究与认识

O.Ravn 和 M.Nørgaard 等人^[8, 37]采用与无味变换完全不同的思路,他们受有限差分(Finite Difference)思想^[38]的启发,用 Stirling 多项式内插公式^[6]对非线性映射函数在均值附近进行展开并截取一阶或二阶近似,导出了均差滤波器(DDF, Divided Difference Filter)。其中的一阶近似对应一阶 DDF(DD1F),二阶近似对应二阶 DDF(DD2F)。与二阶 EKF^[3-4, 7-8]相比,DD2F 具有更高的估计精度,但 DDF 也无需进行 Jacobian 矩阵的计算。在运算量上,DD2F 与采用式(12)的对称集无味变换的 UKF 基本一致^[16-17]。就估计精度来说,在均值估计上,DD2F 可以获得与采用式(12)的对称集无味变换的 UKF 完全一致的估计精度。在协方差阵估计上,DD2F 可以保证协方差阵估计的半正定性,而且 Ravn 等人宣称 DD2F 具有更高的估计精度,Merwe 等^[16-17]则例证了二者在估计精度上几乎不相上下。Ravn 等人还用 DDF 的思路导出了 UKF 关于协方差阵的估计,这说明二者在本质上是是一致的。几乎与 DDF 同时出现的还有 K.Ito 和 K.Xiong^[39]设计的中心差分滤波器(CDF, Central Difference Filter), CDF 与 DDF 在本质上是等效的^[16-17]。

T.Lefebvre 等人^[40]则从统计线性回归(SLR, Statistical Linear Regression)的观点指出,无味变换实际上是用一组回归点(Regression Point)即我们所谓的 σ 点集来将非线性映射线性化,而 EKF 则是仅在一个展开点对非线性映射用解析的方法线性化。更进一步, Lefebvre 将 UKF、CDF 和 DDF 一起归类为线性回归卡尔曼滤波(LRKF, Linear Regression KF),其统计线性回归线性化法的不确定性则由非线性映射函数与线性化函数在回归点处取值偏差的协方差阵来度量。因为无味变换用的是一组 σ 点,所以体现了随机量的不确定性;而 EKF 则忽视了这一点,因为它仅仅是在一个点对非线性映射进行展开^[17]。Merwe 和 Wan^[17]将 UKF、CDF 和 DDF 统一称为 Sigma 点卡尔曼滤波(SPKF, Sigma-Point KF)。SPKF 都应用了加权统计线性回归(WSLR, Weighted SLR)的方法来估计随机量的统计信息(一、二阶矩),并且都无需进行 Jacobian 矩阵的计算从而更容易实现,即使是在因存在奇点而使得非线性映射函数不可微的情况也可以应用,所以又总称为免微分卡尔曼滤波(DFKF, Derivative-Free KF)。

针对高斯近似, K.Ito 和 K.Xiong^[39]用 Gauss-Hermite 公式设计了 Gauss-Hermite 滤波器(GHF),在一维情况, GHF 可以与 UKF 取得一致。虽然 GHF 可以获得比 UKF 更高的估计精度,但其运算量是按照指数阶为随机量维数的速度急速增长,所以在高阶时就显得不够实用。

此外, UKF 与当前同为技术热点的以粒子滤波(PF, Particle Filter)^[41-43]为代表的序贯 Monte Carlo 方法相比,虽然它们均无需进行 Jacobian 矩阵的计算,但二者有着很大的不同。无味变换中用到的 σ 点集为精确选择的一组确定性的点,而粒子滤波中的“粒子”则是随机产生的; σ 点集中的 σ 点数很少,因而计算量和存储量较小,并能保证较为稳定的性能,而粒子滤波为了保证一定的性能要求的粒子数巨大,因而对计算量和存储量要求苛刻,并且还存在着因为“重要性比”的方差变大而造成“样本衰竭(Depletion of Samples/Sample Impoverishment)”或“样本蜕化(Degeneration of Samples)”等^[44]问题。但粒子滤波的优点是,在处理完全的非线性、非高斯模型时的精度要优于

UKF。更为可喜的是,人们已经成功地将二者相结合,取长补短,形成了所谓的“无味粒子滤波”(UTPF)^[28,44-46]或“ σ 点粒子滤波”(SPPF, Sigma-Point PF)^[17]及其衍变形式高斯混合 SPPF (GMSPPF, Gaussian Mixture SPPF)^[17,47], 其中的无味变换则是用于产生“重要性密度函数”(Importance Density Function)。

作者^[19]认为,无论是 UKF、DDF、CDF, 还是 GHF, 都是以式(29)和(30)描述的 LMMSE 估计子为特点, 其中的非线性均值和协方差估计则用免微分方法, 因此可统称为免微分高斯滤波 (DFGF, Derivative-Free Gaussian Filtering); 而以粒子滤波为代表的一类方法, 则是更一般地直接用免微分方法(数值法)来近似状态量的后验密度, 因此可统称为后验密度数值逼近免微分方法(NAPM, Numerical Approximation to a Posterior density Methods)。更进一步, 我们还将二者统一为以数值方法为特点的广义粒子滤波(GenPF, Generalized PF)^[19]。

6 相关应用

可以说凡是传统上应用 EKF 进行非线性滤波估计的地方都可以用 UKF 来替换, 因此, 无味变换与无味卡尔曼滤波在自动控制、导航、跟踪、制导和故障检测、序列分析、虚拟现实、人工智能等领域都有着广阔的应用前景。除了用于通常的非线性状态估计外, E.A.Wan 等人^[13-14,16,28]则将 UKF 的应用拓展到系统的参数估计(或叫机器学习、系统辨识), 并进而用于同时进行状态和参数估计的双估计(Dual Estimation)中。UKF 双估计的应用形式与 EKF 双估计类似, 也有双 UKF (Dual UKF) 估计和联合 UKF (Joint UKF) 估计两种途径。Julier 和 Uhlmann^[5]则研究将无味变换用于不同层次的传感器数据融合中。UKF 在通信中的应用有文献[48-50]。Jin Young Kim 等^[51]则探讨了 UKF 在自动语音识别中的应用。Chhetri 等^[52]则研究了多传感器

网络中的传感器调度问题。国内的相关研究起步较晚, 但跟进很快, 可查的公开资料主要集中于最近的两三年内^[59-65]。作者^[19]则对 UKF 在空对海单站无源跟踪中的应用进行了深入研究, 其中的部分成果已被相关刊物发表或录用^[53-57]。囿于篇幅, 具体内容不再展开。

7 一个递推非线性滤波估计例子

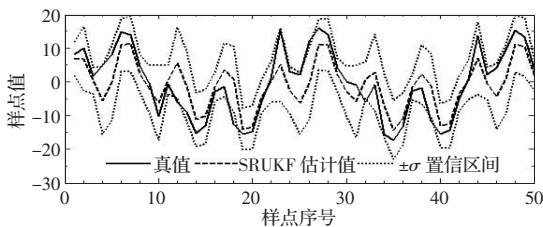
这里举一个非线性滤波估计例子, 以对上述几种典型的 UKF 算法进行仿真验证, 其中包括 UKF (变尺度对称集 UT)、SR-UKF、SVD-UKF 和本文提出的 IUKF 以及传统的 EKF 共 5 种算法。所用到的状态方程和观测方程分别为:

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + v_{k+1} = ax_k + b \frac{x_k}{1+x_k^2} + c \cos(dk) + v_{k+1} \quad (65)$$

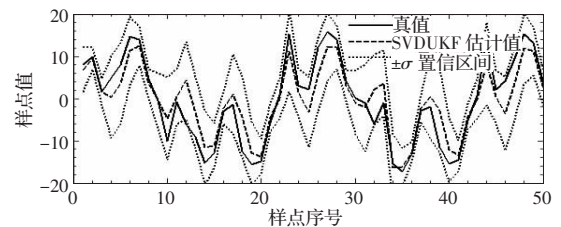
$$y_k = h(x_k) + w_k = ux_k^3 + w_k \quad (66)$$

其中状态噪声 $v_k \sim N(0, \sigma_v^2)$, $\sigma_v^2 = 10$, 观测噪声 $w_k \sim N(0, \sigma_w^2)$, $\sigma_w^2 = 1$, $x_0 \sim N(0, 10)$, 而参数 $a=0.5, b=25, c=8, d=1.2, u=0.005$ 。实际上, 该问题的状态方程取自于一个被广为引用的经典例子^[41,43,58], 但作者对其中的观测方程稍作修改以利于本文关于高斯滤波器的仿真验证。上述例子中的 DSS 模型具有很强的非线性, 而且状态方程式(65)中还有一个与状态无关的时间余弦项, 可将其归类为状态噪声中的时变部分, 或者将其归类为时变的非线性模型, 所以这是一个较为复杂的递推非线性滤波问题, 显然其精确的解析解是不存在的。针对该例, 分别应用上述 5 种算法进行 100 次的 Monte Carlo 仿真实验, 其中选取的数据样点数为 50, IUKF 算法中的迭代次数为 3。

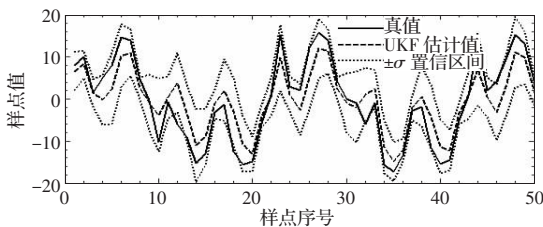
图 3 中(a)、(b)、(c)、(d)和(e)这 5 个子图分别为应用上述 5 种算法进行估计时状态的真值与各算法的估计值及其 $\pm\sigma$



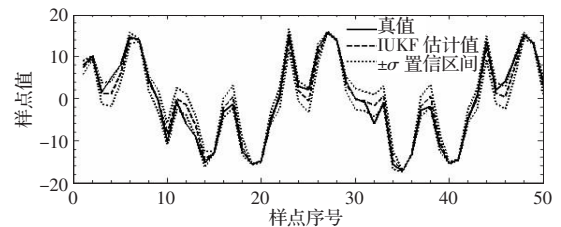
(a) 状态真值与 SRUKF 估计值及其 $\pm\sigma$ 置信区间



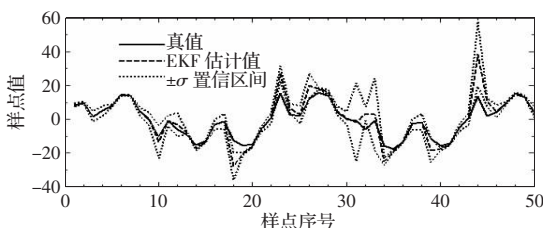
(b) 状态真值与 SVDUKF 估计值及其 $\pm\sigma$ 置信区间



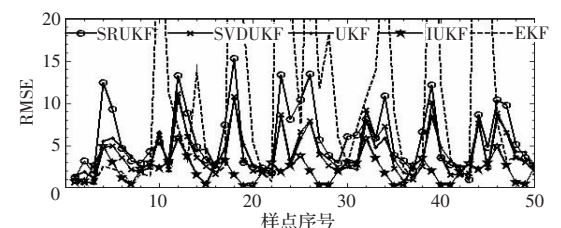
(c) 状态真值与 UKF 估计值及其 $\pm\sigma$ 置信区间



(d) 状态真值与 IUKF 估计值及其 $\pm\sigma$ 置信区间



(e) 状态真值、EKF 估计值及其 $\pm\sigma$ 置信区间



(f) 各种算法估计的 RMSE 指标比较图示

图 3 状态真值与 5 种算法的估计值、 $\pm\sigma$ 置信区间以及估计的 RMSE 比较图

置信区间的比较图示,而子图(f)则为5种算法估计的均方根误差(RMSE, Root Mean Square Error)比较,其中RMSE的估计式定义为

$$RMSE(\hat{x}) = \left[\frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} (\tilde{x}_k^i)^2 \right]^{1/2} \quad (67)$$

式中 N_{MC} 为运行的Monte Carlo仿真次数,估计残差 $\tilde{x}_k \triangleq x_k - \hat{x}_k$ 。因为EKF估计误差的RMSE值较大,所以在子图(f)中将纵坐标的显示区间由原先的[0, 90]截取了[0, 20]进行局部放大处理。由图3可见,由于EKF采用的是对非线性模型线性化的方法,虽然其估计的方差在整体上较几种UKF小(除几个突变点外)而较IUKF大,但对于该例中非线性严重的DSSM,这种较小的方差往往是一种算法“过度自信(overconfident)”的表现,因为其估计的偏差较大,在严重非线性区很容易造成EKF估计的 $\pm\sigma$ 置信区间不能涵盖状态真值。相反,无论是IUKF还是其它各种UKF,其估计值均能始终逼近状态真值,相应的 $\pm\sigma$ 置信区间也都能涵盖状态真值,说明滤波器保持了较好的一致性。特别值得注意的是,IUKF由于经过多次迭代,滤波器不但估计的偏差减小,而且估计的方差也大幅减小,也就是说滤波器在多次迭代后“更加自信”。图3中的子图(f)用RMSE指标很好地显示出5种算法在估计偏差方面的性能差异。易见,EKF的估计偏差最大且波动剧烈,UKF次之,而IUKF的偏差最小也最为平稳。更进一步,我们对子图(f)中所有样点的RMSE值进行了总体平均,其结果如表1所示。为了体现各种算法在运算量上的差异,表中还同时给出了各种算法执行单次循环的平均运行时间。其中程序运行的软硬件平台分别是:主频为3.06 GHz的Intel Pentium 4 CPU, 512 MB内存,版本为Ver.7.2.0.232的Matlab。可见,EKF的估计误差最大,而IUKF估计的RMSE值不到UKF的1/2,更是只接近EKF的1/6。而在运行时间上,各种算法基本都处于同一量级,这一点与R.Merwe等人^[15-16, 28]所给的结论是一致的。若更进一步分析,则易见,EKF的运算量最小,UKF约为EKF的3倍,SR-UKF和SVD-UKF的运算量略大于UKF,而IUKF由于采用了3次迭代,其运算量不足EKF的3倍。

表1 各种算法之间的平均RMSE及平均运行时间对照表

算法	SR-UKF	SVD-UKF	IUKF	UKF	EKF
平均RMSE	5.867 1	4.004 2	2.175 2	4.376 0	12.305 2
平均运行时间/s	0.039 1	0.036 0	0.089 7	0.032 5	0.010 5

为了研究IUKF中的迭代次数与获得的精度收益之间的关系,还对不同迭代次数条件下的IUKF算法进行了Monte Carlo仿真,仿真次数为50,将估计偏差的RMSE值关于观测时间进行平均,然后绘成如图4所示的平均RMSE与迭代次数关系的条形图。可见,IUKF滤波估计的偏差随着迭代次数的增

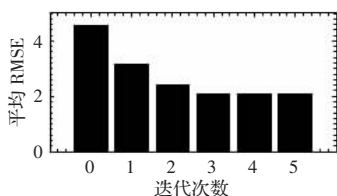


图4 IUKF滤波估计的时间平均RMSE值与迭代次数的关系

加而减小,但偏差减小的幅度则是随着迭代次数的增加而减小,而当迭代次数大于3时,平均RMSE值已经趋于平稳,也就是说已经无法再从迭代中获得收益。所以一般来说,IUKF算法只需2~3次迭代即可。此外,如前所述,IUKF的精度收益实际来源于对观测信息的挖掘,所以观测噪声越小,测量越准确,则IUKF通过迭代所获得的收益就越大;相反,若观测噪声太大,就无法保证测量更新后的估计 $\hat{x}_{k|k}^i$ 优于一步预测值 $\hat{x}_{k|k-1}$,从而也就无法保证IUKF相对于UKF的优势。

8 总结与展望

非线性估计是统计信号处理中的一个典型问题,传统的解决方法是借助于Taylor级数展开的扩展卡尔曼滤波(EKF)算法。然而EKF需要计算模型的Jacobian矩阵从而使得实现起来较为复杂,而对一些不可微的情况,EKF自然失效。在模型非线性较强以及系统噪声非高斯时估计的精度严重降低,甚至会造成滤波器的发散。无味变换(UT)和无味卡尔曼滤波(UKF)则是近年来用于解决该问题的一种新的热点方法,它通过一组精确选择的 σ 点来匹配随机量的统计特性,无需进行Jacobian矩阵的计算因而易于实现,在保持相当运算量的同时具有更高的估计精度和更为广泛的适用范围。本文全面综述了有关UT与UKF所涉及的主要方面,期望能为其进一步的推广与发展有所裨益。

但是,根据作者的研究体会,在目前UT与UKF尚存在如下一些亟待解决或突破的问题,这些问题或许可以作为今后进一步研究的方向:

(1)算法的鲁棒性或数值稳定性:如上所述,在通常的几种UKF算法中均用到了Cholesky分解来求协方差阵的平方根,所以应当保证协方差阵的半正定性;这就限制了 σ 点集设计中参数的选取,从而影响着UT与UKF性能的有效发挥。尽管SR-UKF算法的设计者宣称该算法具有更好的数值稳定性^[15-16, 28],但在人们的仿真应用中还是经常碰到因矩阵的负定而造成程序的崩溃。仔细分析SR-UKF算法不难发现,由于该算法用到了Cholesky分解的秩1复旧,如式(60),而该运算要求复旧矩阵必须为半正定,但这一点在SR-UKF算法中却得不到保证。单就算法的鲁棒性来说,SVD-UKF可谓是一种进步,因其在求解协方差阵平方根时应用的是SVD分解,而不是通常的Cholesky分解,如式(61)和(62)。但在我们的仿真应用中发现SVD-UKF估计的方差较大,尽管该算法提供了控制参数 ρ ,但其作用是非常有限的。

(2)算法的运算量:实际上,影响算法运算量的一个重要因素是 σ 点集中 σ 点的数目,因此,前述的单形 σ 点集UT要比对称 σ 点集UT在运算量上有所节省,尤其是对高维状态量的估计,但其付出的代价是在估计精度上的降低和算法适应性的减弱。由于器件运算性能的提升,在多数场合下,只要维数不是很高,算法的运算量都不是考虑的重点,况且,UKF较传统的EKF在算法运算量上并没有显著增加。在各种仿真应用中,UKF的运算时间大约是EKF的3~4倍。当然,对于少数高维和条件要求较为苛刻的场合,进行减小算法运算量的研究还是有必要的。

(3)算法的计算复杂度(Computational Complexity):各种

UKF 算法的计算复杂度主要取决于其所采用的矩阵分解方法,本文综述的各种现有 UKF 算法,包括 SR-UKF 和 SVD-UKF 等,与传统的 EKF 算法在计算复杂度上是一致的,均为 $O(N_x^3)$ 。算法的计算复杂度影响着算法的硬件实时实现,因此,降低算法的计算复杂度也是一件很有意义的事情。

(4)算法的估计精度:估计精度是 UT 与 UKF 的主要优势所在,精度的提高往往意味着 σ 点集中 σ 点数目增大,如一些高阶 UT。如何设计出 σ 点数目最小、或增加的运算量最少,而能获得尽可能高估计精度的高阶 UT 及其 UKF 仍是值得努力的方向之一。

(5)算法的定制问题:精心设计各种独特的 σ 点集,相应提出针对特定概率分布的 UT 与 UKF 的高效形式,这对于 UT 与 UKF 的实际定制应用也是非常必要的。

(6)算法中参数的智能选取问题:UT 算法中涉及到许多参数,这既带来了一些灵活性,但同时也给其实际应用带来很多麻烦。然而,关于 UT 算法中各种参数的选取问题在众多文献中常常被忽视。实际上,在我们的应用研究中证实,参数选取问题不仅影响着算法的实际性能,如估计的精度和 UKF 的收敛性能,而且影响着程序的数值稳定性,极端的情况就是直接导致程序的崩溃。因此,实现参数的智能选取,对于各种形式的 UT 与 UKF 算法都是我们努力的目标。

(7)算法的实时实现问题:研究算法的各种实现形式,减小算法的运算量、存储量和计算复杂度,最终实现各种算法高效、实时的硬件实现,这对于 UT 与 UKF 在各种场合的实际应用至关重要。显然,该问题的研究是以上述各种环节的解决为基础的。

(8)算法的实际应用:此外,加强 UT 与 UKF 应用领域的拓宽与深入,对于该理论的推广和发展也是必不可少的重要环节。

随着更多人的关注与研究,必将使得无味变换与无味卡尔曼滤波的形式与内容更为丰富,应用领域也更为宽广。

参考文献:

- [1] Kushner H J. On the differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes, with applications[J]. *SIAM on Control*, 1964, 2: 106-119.
- [2] Kushner H J. Dynamical equations for optimum nonlinear filtering[J]. *J Differential Equations*, 1967, 3: 179-190.
- [3] Kushner H J. Approximations to optimal nonlinear filters[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1967, 12(10): 546-556.
- [4] Bar-Shalom Y, Li X R, Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation: theory, algorithms, and software[M]. New York: John Wiley & Sons, 2001: 373-374, 381-395, 200-217, 381-395, 311-317, 138-140.
- [5] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. *Proc IEEE*, 2004, 92(3): 401-422.
- [6] Mathematical Society of Japan. Encyclopedic dictionary of mathematics[M]. 2nd ed. Cambridge, Massachusetts, and London: The MIT Press, 1986: 1449, 1131, 260-267, 25-26, 1118-1119, 1133-1134, 1813.
- [7] Athans M, Wishner R P, Bertolini A. Suboptimal state estimation for continuous time nonlinear systems from discrete noisy measurements[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1968, 13: 504-514.
- [8] Nørgaard M, Poulsen N, Ravn O. Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems[R]. Lyngby, Denmark: Technical University of Denmark, April 2000.
- [9] Julier S J, Uhlmann J, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 2000, 45(3): 477-482.
- [10] Julier S. The spherical simplex unscented transformation[C]//Proc Amer Control Conf, 2003, 3: 2430-2434.
- [11] Chen Zhe. Bayesian filtering: from Kalman filters to particle filters, and beyond[R]. Hamilton: McMaster University, 2003.
- [12] Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems[C]//Proc of the 11th Int Symp Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls, 1997: 182-193.
- [13] Wan E, van der Merwe R, Nelson A T. Dual estimation and the unscented transformation[C]//Neural Information Processing Systems, 2000, 12: 666-672.
- [14] Wan E A, van der Merwe R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation[C]//The IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000 (AS-SPCC), Lake Louise, Oct 2000: 153-158.
- [15] van der Merwe R, Wan E. The square-root unscented Kalman filter for state and parameter estimation[C]//Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Salt Lake City, May 2001: 3461-3464.
- [16] van der Merwe R, Wan E. Efficient derivative-free Kalman filters for online learning[C]//2001 Proc European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN), Bruges, April 2001: 205-210.
- [17] van der Merwe R, Wan E. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models [EB/OL]. Workshop on Advances in Machine Learning, Montreal, June 2003. <http://www.iro.umontreal.ca/~kegl/CRMWorkshop/program.html>.
- [18] Julier S J, Uhlmann J K. A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions [EB/OL]. [1994]. <http://www.robots.ox.ac.uk/~siju>.
- [19] 程水英. 空对海单站无源跟踪中的免微分算法研究[D]. 合肥: 电子工程学院, 2006.
- [20] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new approach for filtering nonlinear systems[C]//Proc Am Contr Conf, Seattle, WA, 1995: 1628-1632.
- [21] Julier S J, Uhlmann J K. Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations[C]//Proc Amer Control Conf, 2002: 887-892.
- [22] Julier S J, Uhlmann J K. The scaled unscented transformation[C]//Proc Amer Control Conf, 2002: 4555-4559.
- [23] Julier S J. A skewed approach to filtering[C]//Proc of the 12th Int Symp Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls, Apr 1998: 54-65.
- [24] Julier S J, Uhlmann J K. A consistent, unbiased method for converting between polar and Cartesian coordinate systems[C]//Proc AeroSense: Acquisition, Tracking and Pointing XI, 1997, 3086: 110-121.
- [25] Tenne D, Singh T. The higher order unscented filter[C]//Proc Amer Control Conf, 2003, 3: 2441-2446.
- [26] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problem[J]. *Trans ASME, Ser D, J Basic Eng*, 1960, 82(3): 34-45.
- [27] Grewal M S, Andrews A P. Kalman filtering: theory and practice using Matlab[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 2001: 116-126, 238-239.
- [28] Haykin S. Kalman filtering and neural networks[M]. New York: John

- Wiley & Sons, 2001: 5–10, 221–280, 48–50, 273–276.
- [29] Kay S M, Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory[M]. NJ: Prentice Hall, 1993: 419–477.
- [30] Brookner E, Tracking and Kalman filtering made easy[M]. New York: John Wiley & Sons, 1998: 64–110, 353.
- [31] Li X R, Jilkov V P, Survey of maneuvering target tracking, part I: dynamic models[J]. IEEE Trans AES, 2003, 39(4): 1333–1364.
- [32] Briers M, Maskell S R, Wright R A, rao-blackwellised unscented Kalman filter[C]//Proc of the Sixth Int Conf Information Fusion, Cairns, Australia, July, 2003: 55–61.
- [33] Kaminski P G, Bryson E, Schmidt J S F, Discrete square root filtering: a survey of current techniques[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1971, AC-16(6): 727–736.
- [34] van Zandt J R, A more robust unscented transform [C]//Proc SPIE Vol 4473 –Signal and Data Processing of Small Targets, San Diego, 2001: 371–380.
- [35] Bell B M, Cathey F W, The iterated Kalman filter update as a Gauss-Newton method[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1993, 38(2): 294–297.
- [36] Vincent T L, Khargonekar P P, A class of nonlinear filtering problems arising from drifting sensor gains[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1999, 44(3): 509–520.
- [37] Ravn O, Nørgaard M, Poulsen N K, New developments in state estimations for nonlinear systems[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627–1638.
- [38] Schei T S, A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms[J]. Automatica, 1997, 33(11): 2053–2058.
- [39] Ito K, Xiong K, Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans Automat Contr, 2000, 45(5): 910–927.
- [40] Lefebvre T, Bruyninckx H, de Schutter J, Comment on “a new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators”[J]. IEEE Trans Automat Contr, 2002, 47(8): 1406–1408.
- [41] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M, Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. IEE Proc Inst Elect Eng F, 1993, 140(2): 107–113.
- [42] Carpenter J, Clifford P, Fearnhead P, Improved particle filter for nonlinear problems[J]. IEE Proc-Radar, Sonar Navig, 1999, 146(1): 1–7.
- [43] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al, A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2002, 50(2): 174–188.
- [44] van der Merwe R, Doucet A, de Freitas N, et al, The unscented particle filter[R]. Cambridge: Cambridge University Engineering Department, Aug 2000.
- [45] van der Merwe R, de Freitas N, Doucet A, et al, The unscented particle filter[C]//Advances in Neural Information Processing Systems 13.[S.l.]: MIT Press, 2001: 584–590.
- [46] Haug A J, A tutorial on Bayesian estimation and tracking techniques applicable to nonlinear and non-Gaussian processes[R]. Mclean: MITRE Corporation, 2005.
- [47] van der Merwe R, Wan E A, Gaussian mixture sigma-point particle filters for sequential probabilistic inference in dynamic state-space models[C]//2003 IEEE Int Conf Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Hong Kong, April 2003: 701–704.
- [48] Malipatil A V, Huang Yih-Fang, Amplifier predistortion using unscented Kalman filtering[C]//Signal Processing Advances in Wireless Communications, 2005 IEEE 6th Workshop, New York, June 2005: 221–225.
- [49] Choi Jongsoo, de C Lima A C, Haykin S, Unscented Kalman filter-trained recurrent neural equalizer for time-varying channels[C]//IEEE Int Conf Communications, May 2003, 5: 3241–3245.
- [50] Kim Jang-Sub, Shin Dong-Ryeol, Joint estimation of time delay and channel amplitude by simplex unscented filter without assisted pilot in CDMA systems[C]//The 7th Int Conf Advanced Communication Technology, Feb 2005, 1: 233–238.
- [51] Jin Young Kim, Byoung Don Kim, Seung You Na, Estimation of word confidence using unscented transform for the rejection of misrecognized words[C]//IEEE Int Workshop Robot and Human Interactive Communication, Aug 2005: 474–477.
- [52] Chhetri A S, Morrell D, Papandreou-Suppappola A, The use of particle filtering with the unscented transform to schedule sensors multiple steps ahead[C]//IEEE Int Conf Acoustics, Speech, and Signal Processing, May 2004, 2: 301–304.
- [53] 程水英, 张剑云, 基于 UKF-IMM 的方位-到达时间空-海机动目标的跟踪[J]. 弹箭与制导学报, 2006, 26(2): 1211–1215.
- [54] 程水英, 张剑云, 基于无味卡尔曼滤波的空对海 BTO-TMA 问题的研究[J]. 探测与控制学报, 2006, 28(5): 56–61.
- [55] 程水英, 张剑云, 基于无味高斯粒子滤波的空-海 BO-TMA[J]. 现代雷达, 2007, 29(8): 68–71.
- [56] 程水英, 张剑云, 基于无味卡尔曼滤波的空-海单站无源 BO-TMA[J]. 电路与系统学报, 2008, 13(1): 49–55.
- [57] 程水英, 张剑云, 基于 UKF 的只测方位 TMA 中数据率因素影响的仿真研究[J]. 电路与系统学报, 2008, 13(5).
- [58] Doucet A, Godsill S, Andrieu C, On sequential Monte Carlo methods for Bayesian filtering[J]. Statistics and Computing, 2000, 10: 197–208.
- [59] 马野, 王孝通, 戴耀, 基于 UKF 的神经网络自适应全局信息融合方法[J]. 电子学报, 2005, 33(10): 1914–1916.
- [60] 管旭军, 芮国胜, 康锡章, 基于 UKF 的机载无源定位算法[J]. 航天控制, 2005, 23(5): 13–16, 41.
- [61] 宁晓菊, 梁军利, 基于 UKF 的高斯和滤波算法[J]. 计算机仿真, 2006, 23(12): 100–103.
- [62] 张涛, 安玮, 周一宇, 基于 UKF 的主动段弹道跟踪算法[J]. 弹道学报, 2006, 18(2): 15–18.
- [63] 于延波, 房建成, 基于 UKF 的航天器最小参数姿态矩阵估计方法[J]. 宇航学报, 2006, 27(1): 12–15, 40.
- [64] 王中华, 覃征, 韩毅, 基于 UKF 的双平台无源融合跟踪方法[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(19): 4477–4481, 4486.
- [65] 张卫明, 张继惟, 范子杰, 等, UKF 方法在惯性导航系统初始对准中的应用研究[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(4): 589–592.