狭义 TSP 小窗口蚁群算法研究

秦 姝,王锦彪
QIN Shu,WANG Jin-biao

中国民航大学 计算机科学与技术学院,天津 300300
Computer Science and Technology College,Civil Aviation University of China,Tianjin 300300,China
E-mail:jinbiaoww@yahoo.com.cn

QIN Shu,WANG Jin-biao.Study of window ant colony algorithm of narrow TSP.Computer Engineering and Applications,2008,44(12):45-46.

Abstract: The algorithm of Ant-Window[1] is one of the important improvement of the study about ant colony algorithm.This paper defines big window and small window and points that the classical ant colony algorithm is the ant colony algorithm of big window essentially.The study demonstrates that the statistic average of Ant-Window's diameter is 5 and that makes calculation complexity of narrow TSP problem down form $\frac{1}{2}(n-1)!$ to 5^{n-1}.

Key words: Ant-Window;diameter of Ant-Window;big window;small window;narrow TSP

摘 要:蚁窗[1]算法是蚁群算法研究的重要进展之一。定义了大窗口和小窗口,指出经典蚁群算法实质上是大窗口蚁窗算法。研究表明,小窗口蚁窗直径的下限统计平均值约为 5,使狭义 TSP 问题的计算复杂性由$\frac{1}{2}(n-1)!$ 降为 5^{n-1}。

关键词:蚁窗;蚁窗直径;大窗口;小窗口;狭义 TSP
文章编号:1002-8331(2008)12-0045-02 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP301

1 引言

众所周知,Dorigo 于 1991 年关于蚁群算法的经典文献[2]发表以来取得的成功,引起了学术界的广泛关注。同时,对其逐步显露的运算周期长,参数敏感及局部最优陷阱等问题的深入研究,使经典蚁群算法不断得到改进。其中关于蚁窗概念的提出是一个标志性进展[1]。

定义 1 给定加权图 $G=(V,E,W)$,V 为顶点集,$|V|=n$,E 为边集,W:$E\rightarrow R^+$为边权函数。G 中一条不重复访问 V 所有顶点的环路 H_n^0称为 Hamilton 环路:

$$H_n^0=<v_1,v_2,\cdots,v_n>$$
$$\forall(1\leqslant i\neq j\leqslant n),v_i\neq v_j,1\leqslant i\leqslant n,<v_i,v_{(i \bmod n)+1}>\in E$$

定义 2 一条 H_n^0的边权之和可表示为 $W_{H_n^0}=\sum_{i=1}^{n}w<v_i,v_{(i \bmod n)+1}>$,求其中边权最小的 H_n^{TSP} 就是著名的旅行商问题(TSP):

$$W_{H_n^{TSP}}=\min[(W_{H_n^0})],k=1,2,\cdots,\frac{1}{2}(n-1)!$$

定义 3 若顶点集 V 分布在欧几里德平面的有限区域内:

$$V=\{v_i|v_i=(x_i,y_i)\in V,i=1,2,\cdots,n\}$$
$$d_{ij}=[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2]^{\frac{1}{2}},1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$$
$$w=\beta d+\alpha,\alpha\in R^+,\beta\in R^+$$

则此类 TSP 问题可称为狭义 TSP[3]。$w=d$ 是狭义 TSP 中以边长为边权的特例。

定义 4 蚁群算法求解 TSP 时,其节点集 V 分成两个子集:

$$V=V_{Tabu}\cup V_{Free}$$

其中 V_{Tabu} 为禁忌节点子集,V_{Free} 为自由节点子集。没有放置蚂蚁时,$V_{Tabu}=\phi$,$V_{Free}=V$,放置蚂蚁后,蚂蚁爬过的节点就由自由节点转变为禁忌节点。

定义 5 节点 $v_l\in V$,则 $\deg(v_l)=\lambda_{in}+\lambda_{out}$,其中 $\lambda_{in}=1$ 为入度,λ_{out} 为出度:

$$\lambda_{out}=\varphi_T+\varphi_F$$

其中 φ_T 为出度禁忌值,表明节点 v_l 有 φ_T 条边关联的节点子集 $\sum_{t=1}^{\phi_T}v_t\in V_{Tabu}$;而 φ_F 为出度自由值,表明节点 v_l 有 φ_F 条边关联的节点子集 $\sum_{f=1}^{\phi_F}v_f\in V_{Free}$,即节点 v_l 上的蚂蚁下一步有 φ_F 个可供选择的节点。

这就提出了一个问题,是否有必要把全部 V_{Free} 都作为 v_l 选择的后续节点?如果不是必要的,则全部 V_{Free} 只能作为 v_l 选择的后续节点子集的上限,那么 v_l 选择后续节点子集的下限又应该如何界定呢?为了便于讨论 v_l 选择后续节点子集的下限问

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60472121)。
作者简介:秦姝(1981-),女,在读硕士生,研究方向:算法与复杂性理论,网络技术;王锦彪(1948-),男,教授,1992 年政府特贴,研究方向:算法与复杂性理论,民航信息系统。
收稿日期:2007-08-07 **修回日期:**2007-11-19

题，有必要首先定义蚁窗的概念。

定义 6　处于 v_l 节点的蚂蚁选择后续节点的集合可形象地定义为蚁窗。全部 V_{Free} 是蚁窗的上限，蚁窗的下限就是小窗口。为便于讨论，把蚁窗中包含的节点数 φ_F 定义为蚁窗直径。

经典蚁群算法没有明确蚁窗定义。但是不难理解，经典蚁群算法的窗口直径其实就是蚁窗定义的上限，$\varphi_F=|V_{Free}|$，也可称之为大窗口。大窗口是经典蚁群算法运算周期长的根本原因之一。

小窗口算法的关键是蚁窗直径下限的界定。

一种观点认为[1]，蚁窗直径与 TSP 问题规模相关，“维数越高，窗口越大”，可描述为 $\varphi_F=Cn$，其中 C 为比例系数。这种观点可能是基于广义 TSP 的考虑。对于狭义 TSP，理论研究及算例都显示 $\varphi_F\approx5$，与 TSP 的维数无关，φ_F 平均取值大于 5 的部分，对算法收敛没有实质性的贡献。

2　证明

定义 7　设 G 是 $n\geqslant3$ 的简单平面图，若在任意两个不相邻的节点 v_i 和 v_j 之间加入边(v_i,v_j)就会破坏图的平面性，则称 G 是极大平面图。

极大平面图 G 的重要性质之一是每个域的边界数都是 3，是完全三角剖分的。当其外域三角形弱化为多边形凸包时，则极大平面图 G 蜕变为一般的平面节点集的三角剖分图 G'。由 TSP 几何解的演化逻辑[3]可推断出，H_n^{tsp} 蕴含在平面三角剖分图 G'之中，当且仅当 G'的边权之和最小，$V_{tsp}=V_{G'}$。

定理 1　设 G 是一个有 n 个节点、m 条边的连通简单平面图，若 $n\geqslant3$，则 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$。

定理 2　设 G 是一个有 n 个节点、m 条边的连通简单平面图，若 $n\geqslant3$，则 $m\leqslant3(n-2)$。

定理 1 和定理 2 的证明比较简单，参见文献[4]，此处略。

定理 3　设 G 是一个有 n 个节点、m 条边的连通简单平面图，若 $n\geqslant3$，则其节点度的平均值 $\lambda=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)}{n}<6$。

证明　反证法：

假设 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)}{n}\geqslant6$

则 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)\geqslant6n$

由定理 1 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$

则 $2m\geqslant6n$

因此 $n\geqslant3$ 时，$m\geqslant3n>3(n-2)$

该结论与定理 2 的 $m\leqslant3(n-2)$矛盾。

蚁窗直径 $\varphi_F=\lambda-\lambda_{in}-\varphi_T=\lambda-1-\varphi_T<5$，虽然 φ_F 是一个统计平均值，但是它与 TSP 维数 n 无关是显见的。

3　算例和讨论

（1）求解狭义 TSP 问题的蚁群算法中，蚁窗算法是值得研究的方向之一。本文证明了该窗口直径 $\varphi_F\approx5$ 且与 TSP 维数无关，进一步规范了该算法。

（2）极大平面图是完全三角剖分的，包括所谓的外域。但狭义 TSP 问题空间一般不是严格意义上的极大平面图，因为其外域一般是基于凸包的多边形，而内域是三角剖分的。由于基于平面域散点集的 Delaunay 三角剖分[5]具有最小边权问题目前尚有争议，本文尚未给出 H_n^{TSP} 存在于 Delaunay 三角网中的严格证明，目前还是一个猜想。

（3）本文所述的算法，蚂蚁有时会走入 Delaunay 死穴。严格意义上讲这只蚂蚁应该死亡，但是当我们的目标不是最佳值而只是可行解时，也可以给走入死穴的蚂蚁一个逃逸的机会，即让它在自由节点中寻找一个距离死穴节点最近的点来构造逃逸路径。显然，逃逸路径会产生交叉，必须引入 2-opt 等去交叉算法消除之。

（4）蚁窗概念的提出实际上降低了 TSP 问题的计算复杂性。但是本文改进的算法使 TSP 问题的解空间由 $\frac{1}{2}(n-1)!$降为 5^{n-1}，并没有实现 NP 向 P 的根本性转变。因此，尚有许多困难需要深入探讨。

表 1　不同城市数取不同蚁窗直径的 TSP 收敛值/收敛时间比较

TSP(已知最佳值)	蚁窗直径 φ_F					
	5		10		20	
	收敛值	收敛时间/s	收敛值	收敛时间/s	收敛值	收敛时间/s
wi29[6](27 603)	27 601	0.34	27 601	0.39	27 601	0.34
eil51[7](426)	429	1.83	429	1.33	431	1.05
st70[8](675)	685	7.36	685	4.77	677	4.16
chn144(30 385)	30 455	49.70	30 680	60.40	30 847	36.80
pbm436[9](1 443)	1 541	85.60	1 549	81.50	1 546	66.20

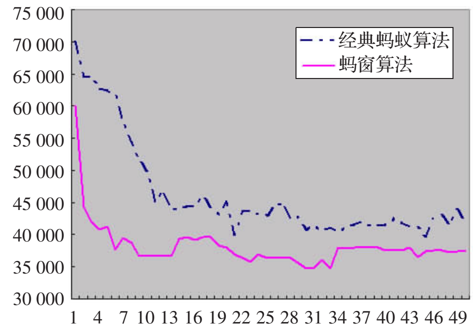

图 1　经典蚂蚁算法与蚁窗算法收敛曲线比较(chn144)

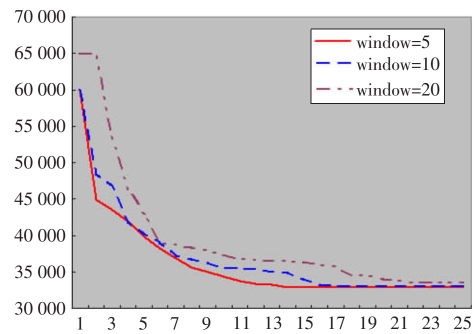

图 2　蚁窗直径分别取 5、10 和 20 的收敛曲线比较(chn144)

参考文献：

[1] 萧蕴诗，李炳宇.小窗口蚁群算法[J].计算机工程，2003，29(20)：143-145.

[2] Colorni A，Dorigo M，Maniezzo V.Distributed optimization by ant

（下转 84 页）