

# 一种基于相似个体的多目标进化算法

伍军, 郑金华, 文诗华

WU Jun, ZHENG Jin-hua, WEN Shi-hua

湘潭大学 信息工程学院, 湖南 湘潭 411105

Institute of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China

E-mail: jhzhen@xtu.edu.cn

**WU Jun, ZHENG Jin-hua, WEN Shi-hua.** Multi-objective evolutionary algorithm based on similar individuals. **Computer Engineering and Applications**, 2008, 44(14): 67-72.

**Abstract:** Diversity maintenance strategy is an important part of studies on multi-objective evolutionary algorithms (MOEAs). A good diversity can give a decision-maker more reasonable and efficient selections. The diversity of pareto optimal solutions include the span and the uniformity of solutions. This paper proposes a multi-objective evolutionary algorithm based on similar individuals (SMOEA). In the process of population maintenance, it deletes individuals with the most similarity. While in the process of evolution operations, the most similar individuals are selected to evolve. Compared with NSGA-II and  $\varepsilon$ -MOEA, the experimental results demonstrate that the new algorithm can converge to the true Pareto front fast and can obtain good convergence at the same time.

**Key words:** multi-objective evolutionary algorithm; multi-objective optimal problem; population maintenance; diversity; similar individuals

**摘要:** 分布性保持是多目标进化算法研究的一个重要方面,一个好的分布性能给决策者提供更多合理有效的选择。Pareto 最优解的分布性主要体现在分布广度与均匀性两个方面。提出一种基于相似个体的多目标进化算法(SMOEA)。在种群维护中删除相似程度最大的个体;在进化操作中,选取了相似程度最大的个体进行进化。与目前经典算法NSGA-II和 $\varepsilon$ -MOEA进行比较,结果表明新算法拥有良好的分布性,同时也较好的改善了收敛性。

**关键词:** 多目标进化算法; 多目标优化问题; 种群维护; 分布性; 相似个体

**DOI:** 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.14.019   **文章编号:** 1002-8331(2008)14-0067-06   **文献标识码:** A   **中图分类号:** TP18

## 1 引言

多目标优化问题(Multi-objective Optimization Problems, MOPs)在许多领域是很常见的,工程实践和科学研究中心优化问题大多是多目标优化问题,各目标之间通过决策变量相互制约,对其中一个目标优化必须以其它目标为代价,而且各目标的单位又往往不一致,因此很难客观地评价多目标问题解地优劣性。MOPs 的求解不同于单目标优化问题(Single objective Optimization Problems, SOPs)。SOPs 的最优值只有一个,MOPs 的解不是唯一的,而是存在一个最优解集合,集合中的元素称为 Pareto 最优或非劣最优(non-dominance)。求解它们需要用不同于单目标优化的数学工具,甚至最优的含义也发生了变化<sup>[1]</sup>。

MOEAs 是一种模拟生物进化、解决多目标优化问题的全局搜索算法。MOEAs 研究始于 1967 年, Rosenberg<sup>[2]</sup>在其博士论文提出了使用遗传算法解决 MOPs,然而他当时并没有建

立实际的多目标优化算法。第一个真正意义上的 MOEA 是 20 世纪 80 年代中期由 Schaffer<sup>[3,4]</sup>提出的向量评估遗传算法 (Vector Evaluated Genetic Algorithm, VEGA)。虽然这个算法在一些方面有很多不足,但是它对 MOEAs 的发展有重大的意义。到目前为止,已经出现了比较多的多目标进化算法。一般认为,MOEA 发展到今天经历了两个阶段<sup>[5]</sup>:第一阶段为 20 世纪 80 年代中期到 20 世纪 90 年代中期,MOEAs 以简单为特征,称为第一代 MOEAs。这期间代表性的 MOEAs 有 VEGA<sup>[3,4]</sup>、Fonseca 与 Fleming<sup>[5]</sup>提出的 MOGA、Srinivas 与 Deb 提出的 NSGA<sup>[6]</sup>以及 Horn 等人提出的 NPGA<sup>[7]</sup>,等等。第二阶段从 20 世纪 90 年代中期到现今,MOEAs 以效率为特征,以精英保留策略为实现机制,称为第二代 MOEAs,这期间代表性的 MOEAs 有 Zitzler 提出的 SPEA<sup>[8]</sup>及其改进版 SPEA2<sup>[9,10]</sup>、Knowles 与 Corne 提出的 PAES<sup>[11]</sup>、Deb 等人对 NSGA 的改进版 NSGA-II<sup>[12,13]</sup>、Corne 等人提出的 PESA<sup>[14]</sup>及

**基金项目:** 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No. 60773047); 国家高技术研究发展计划(863)(the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant No. 2001AA114060); 教育部留学回国人员科研启动基金(The Project-sponsored by SRF for ROCS, SEM No. 教外司留[2005]546); 湖南省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Hunan Province of China under Grant No. 05JJ30125); 湖南省教育厅重点科研项目(No. 06A074)。

**作者简介:** 伍军(1982-),男,硕士研究生,研究方向为进化计算; 郑金华(1963-),通讯作者,男,教授,博士生导师,主要研究方向为进化计算、智能科学等; 文诗华(1981-),男,硕士研究生,主要研究方向为进化计算。

**收稿日期:** 2007-11-23   **修回日期:** 2008-02-28

PESA II<sup>[15]</sup> 等等。由于 MOEAs 的通用性强且不依赖于函数模型,适用于处理复杂的多目标优化问题,因而被广泛的应用于函数优化、智能控制、机器人路径规划等众多方面。无论是在科研领域,还是在工程领域,关于 MOEAs 的研究引起了广泛的关注。国内最近出版的一些关于 MOEAs 的专著<sup>[16,17]</sup>,为 MOEAs 研究与应用提供了参考和帮助。

在对 MOEAs 的研究中,算法的收敛性<sup>[18]</sup> 与 Pareto 最优解的分布性<sup>[19,20]</sup>一直是研究的热点。分布性保持在实际中有着重要的意义,一个好的分布性能够给决策者提供更多合理的选择。解的分布性主要体现在两个方面,一是分布广度;二是解分布的均匀程度。在 MOEAs 的设计中,解的分布性保持策略一般放在种群维护(population maintenance)中实现,当非支配个数超过一定规模时,此时就需要利用修剪操作(truncation operator)来去除个体,去除个体不是随机的,而是根据一定的分布性保持策略来进行的。通过对 MOEAs 的研究,本文提出了一种基于相似个体的多目标进化算法(A MOEA Based on Similar Individuals),该算法在去除个体时删除了相似程度最大的个体,在执行交叉操作时,却选取了相似程度最大的两个个体。该算法与目前的经典算法 NSGA-II 和  $\varepsilon$ -MOEA 进行比较,实验结果表明,本算法拥有良好的分布性,同时,本算法在收敛性方面比 NSGA-II 和  $\varepsilon$ -MOEA 也要稍好。

## 2 多目标优化问题的有关概念

下面给出与本文相关的几个概念,由于最大值优化问题与最小值优化问题可以相互转化,因此,这里只考虑最小值优化问题。

**定义 1**(多目标优化问题)。多目标优化问题的一般描述

$$\text{Min } \mathbf{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X)) \quad (1)$$

$$g_i(X) \geq 0; (i=1, 2, \dots, k) \quad (2)$$

$$h_i(X) = 0; (i=1, 2, \dots, l) \quad (3)$$

$f(X)$  为目标函数,有  $r$  个优化目标,这些目标是相互冲突的;式(2)和式(3)分别为不等式约束和等式约束;多目标优化的目的就寻找最优解  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ,使  $f(X^*)$  在满足约束(1)和(2)的条件下的同时达到 Pareto 最优。

**定义 2**(个体间的支配关系)。对于一个如定义 1 的多目标优化问题,设  $p$  和  $q$  是进化群体 Pop 中的任意两个不同的个体。 $p$  支配(Dominate)  $q$ ,必须满足以下两个条件:

(1) 对所有的子目标,  $p$  不比  $q$  差, 即  $f_k(p) \leq f_k(q)$ , ( $k = 1, 2, \dots, r$ );

(2) 至少存在一个子目标,使  $p$  比  $q$  好。即  $\exists l \in \{1, 2, \dots, r\}$ , 使  $f_l(p) < f_l(q)$ 。

此时称  $p$  为非支配的,  $q$  为被支配的。表示为  $p > q$ , 其中“ $>$ ”是支配关系。

多目标优化中的最优解,通常称之为 Pareto 最优解,它最早由 Edgeworth<sup>[21]</sup> 提出,后来由 Vilfredo Pareto<sup>[22]</sup> 总结得到具体概念,故此而命名为 Pareto 最优解。它一般可以描述如下:

**定义 3**(Pareto 最优解)。对于一个如定义 1 的多目标优化问题,Pareto 最优解  $X^*$  即为进化种群中的非支配解,定义如下:

$$\mathbf{f}(X^*) = \underset{\mathbf{X} \in \Omega}{\text{opt}} \mathbf{f}(X) \quad (\text{其中: } f: \Pi \rightarrow R^r) \quad (4)$$

这里  $\Omega$  为满足式(2)和式(3)的可行解集,即:

$$\Omega = \{X \in R^n | g_i(X) \geq 0, h_j(X) = 0; (i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, l)\}$$

称  $\Omega$  为决策变量空间(简称决策空间),向量函数  $\mathbf{f}(X)$  将  $\Omega \subseteq R^n$  映射到集合  $\Pi \subseteq R^r$ ,  $\Pi$  是目标函数空间(简称目标空间)。

由于 Pareto 最优解往往不止一个,而是一个最优解的集合,这里用  $PS$  表示。定义如下:

**定义 4**(Pareto 最优解集)。对于一个如定义 1 的多目标优化问题,它的最优解集定义为:

$$PS = \{X^*\} = \{X \in \Omega \mid \exists X' \in \Omega, f_j(X') \leq f_j(X) \quad (j=1, 2, \dots, r)\} \quad (5)$$

Pareto 最优解集也称为非支配解集(Non-Dominated Solutions, NDS),非支配解集的构造是根据个体间的支配关系。在多目标进化算法的进化过程中,针对每一代进化群体,构造出当前种群的非支配解集。MOEAs 的任务就是使当前的非支配集逐渐逼近真实的 Pareto 最优解集。

**定义 5**(Pareto 最优边界(Pareto front))。对于一个如定义 1 的多目标优化问题,设它的最优解集  $\{X^*\}$ ,它的 Pareto 最优边界定义为:

$$PF_{\text{true}} = \{f(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X)) | X \in \{X^*\}\} \quad (6)$$

下文中出现的 PF 为使用算法得到的最优解在目标空间中的曲线,注意,Pareto 最优解集与 Pareto 最优边界是不同的,前者属于决策向量空间,而后者属于目标向量空间。

## 3 相关工作

在多目标进化算法中存在两种选择:环境选择(Environment selection)、匹配选择(Mating selection)。环境选择是对归档集的维护,使归档集内的个体拥有良好的分布性;匹配选择类似与单目标进化算法中的选择操作,选择一些较优秀的个体进行交叉。

然而在大多数 MOEAs 中,只考虑了环境选择,采用了很多有效的方法,如 NPGA<sup>[7]</sup> 采用了适应度共享(fitness sharing)机制来对种群进行修剪,它根据小生境数目这一参数连续地更新适应度共享函数;PESA<sup>[14]</sup> 采用了一种超网格技术对种群进行维护,它将目标空间分成若干个 hyper-box,每个个体就与某个网格相关联,网格里的个体数目称为挤压因子,在进入归档集的过程中,挤压因子大的个体将被清除掉;NSGA-II<sup>[12,13]</sup> 利用个体的聚集距离(crowding distance)来对种群进行维护,当目标维数增大时,聚集距离很难精确的反映个体的密度信息,另外算法没有考虑已经移出个体对种群分布情况的影响;SPEA2<sup>[9,10]</sup> 采用剪切方法(archive truncation procedure)对外部种群进行维护,个体依据密度值进行删除。然而对匹配选择的研究相对较少,基本上是采用锦标赛选择,实际上匹配选择在 MOEAs 中占据着重要的地位,很大程度上影响着算法的收敛性与分布性。一些学者认为两个差异很大的父个体在进化时很难产生好的子代,Hajela & Lin<sup>[23]</sup> 和 Fonseca & Fleming<sup>[24]</sup> 以及 Jaszkiewicz<sup>[25]</sup> & Kim<sup>[26]</sup> 等在他们的 EMO 算法中使用了限制交叉策略,并取得了好的实验结果。但是对于匹配选择以及限制交叉策略对算法影响的相关研究还是比较少。在此提出了一种基于相似个体的配对选择方法和种群维护方法。

## 4 基于相似个体的多目标进化算法

首先给出相似个体的定义:

**定义 6**(相似个体(Similar Individuals))。对于一个如定

义 1 的多目标优化问题, 设  $\text{Pop}_1$  是进化群体  $\text{Pop}$  中的任意一个子种群,  $A$  为  $\text{Pop}$  中的任意一个个体, 若种群  $\text{Pop}_1$  中与个体  $A$  在目标空间中欧几里得距离最小的个体为  $B$ , 则  $A$  和  $B$  为相似个体。

SMOEA 借鉴 NSGA-II 采用了分层构造非支配集的方法<sup>[17]</sup>:

SMOEA 算法流程如下:

$\text{popsize}$ : 种群规模       $T$ : 最大进化代数

算法 1 SMOEA

步骤 1 初始化: 设置种群大小为  $\text{popsize}$ , 产生一个初始种群  $P_0$ , 同时使归档集  $Q_0$  为空, 大小为  $\text{popsize}$ ,  $t = 0$ 。

步骤 2 适应度分配: 对  $P_t$  和  $Q_t$  中所有个体进行 Pareto 分层排序  $F_1, F_2, \dots, F_n$ 。

步骤 3 环境选择:  $t = t + 1$ ,  $Q_t = \emptyset$  and  $i = 1$ , 如果  $|Q_t| + |F_i| < \text{popsize}$ , 则  $Q_t = Q_t \cup F_i$ ,  $i = i + 1$ ; 若  $|Q_t| + |F_i| > \text{popsize}$ , 则利用算法 2 的修剪过程 (archive truncation procedure) 从  $F_i$  中选取  $\text{popsize} - |Q_t|$  个个体加入  $Q_t$  中。

步骤 4 结束条件: 若  $t > T$ , 或其它终止条件满足, 则将  $Q_t$  中的所有非支配个体作为返回结果。

步骤 5 进化操作: 对  $Q_t$  执行相似个体选择过程 (selection procedure) (算法 3), 选取出  $\text{popsize}$  个个体执行模拟二进制交叉<sup>[27,28]</sup> (Simulated Binary Crossover, SBX) 以及多项式变异<sup>[29]</sup> (Polynomial Mutation) 操作产生  $\text{popsize}$  个体保存到  $P_t$ , 返回步骤 2。

算法 2 修剪过程 archive truncation procedure ( $F_i$ )

步骤 1 对  $F_i$  计算其中任何两个个体的欧几里德距离。

步骤 2 选取所有个体之间欧几里德距离最小的一对个体  $(A, B)$ , 如果存在很多对距离一样小的个体, 则任意选取一对, 判断这对个体各自与其它个体的次短距离, 如果个体  $A$  的次短距离小于个体  $B$  的次短距离, 则从  $F_i$  中删除该个体  $A$ , 否则从  $F_i$  中删除该个体  $B$ 。

步骤 3 如果  $|F_i| > \text{popsize} - |Q_t|$  则返回步骤 1, 否则返回  $F_i$ 。

算法 3 相似个体选择 selection procedure ( $Q_t$ )

步骤 1 设子种群  $\text{Pop}_1 = \emptyset$ , 大小为  $\text{sizea}$ ; 子种群  $\text{Pop}_2 = \emptyset$ , 大小为  $\text{sizeb}$ ; 临时种群  $\text{TempPop} = \emptyset$ , 大小为  $\text{popsize}$ 。

步骤 2 对  $Q_t$  执行二元锦标赛选择, 选出一个个体并入  $\text{Pop}_1$ 。

步骤 3 如果  $|\text{Pop}_1| < \text{sizea}$  则返回步骤 2。

步骤 4 对  $Q_t$  执行二元锦标赛选择, 选出一个个体并入  $\text{Pop}_2$ 。

步骤 5 如果  $|\text{Pop}_2| < \text{sizeb}$  则返回步骤 4。

步骤 6 对子种群  $\text{Pop}_1$ , 计算其个体在目标空间中的平均向量  $\bar{d}$ , 选出与平均向量  $\bar{d}$  距离最大的个体  $A$  并入  $\text{TempPop}$ , 对子种群  $\text{Pop}_2$ , 选出其与个体  $A$  欧几里德距离最小的个体并入  $\text{TempPop}$ 。

步骤 7 如果  $|\text{TempPop}| < \text{popsize}$ , 则返回步骤 2, 否则  $Q_t = \text{TempPop}$ , 返回  $Q_t$ 。

在 SMOEA 中, 算法 2 采用了基于相似个体的策略去除个体。在目标空间中如果两个个体的欧几里德距离比较小, 则表明这两个个体在决策空间上很相似, 由于基于相似个体的个体去除策略考虑了目标空间中解的密集程度, 删去个体时总是选择密集程度最大的个体, 所以该策略保持了解的分布性。在算法 3 中, 采取了基于相似个体的选择机制, 一般认为两个相似父个体的结合, 会产生出其领域内的子个体, 从而提高了算法的收敛性。从的实验表明, 基于相似父个体的选择机制改善了解的分布性, 提高了解的质量。

## 5 实验与分析

### 5.1 测试函数与实验环境设置

本文所用到的测试函数见表 1。

参与比较的两个 MOEAs 是目标相当经典的算法: NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA<sup>[30]</sup>。实验环境设置如表 2。

表 1 测试函数集

测试问题	目标函数	特征	测试问题	目标函数	特征
ZDT1	$f_1(x_1) = x_1$ $f_2(\mathbf{x}) = g(1 - \sqrt{(f_1/g)})$ $g(\mathbf{x}) = 1 + 9 \sum_{i=2}^m x_i / (m-1)$	$n = 30; 0 \leq x_i \leq 1$ 凸	ZDT2	$f_1(x_1) = x_1$ $f_2(\mathbf{x}) = g(1 - (f_1/g)^2)$ $g(\mathbf{x}) = 1 + 9 \sum_{i=2}^m x_i / (m-1)$	$n = 30; 0 \leq x_i \leq 1$ 凹
ZDT3	$f_1(x_1) = x_1$ $f_2(\mathbf{x}) = g(1 - \sqrt{f_1/g} - (f_1/g)\sin(10\pi f_1))$ $g(\mathbf{x}) = 1 + 9 \sum_{i=2}^m x_i / (m-1)$	$n = 30; 0 \leq x_i \leq 1$ 非连续	ZDT6	$f_1(x_1) = 1 - \exp(-4x_1)\sin^6(6\pi x_1)$ $f_2(\mathbf{x}) = g(1 - (f_1/g)^2)$ $g(\mathbf{x}) = 1 + 9((\sum_{i=2}^m x_i / (m-1))^{0.25})$	$n = 10; 0 \leq x_i \leq 1$ 凹
SCH	$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x-2)^2$	$-10^5 \leq x \leq 10^5$ 凸	POL	$f_1(x, y) = -[1 + (A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2]$ $f_2(x, y) = -[(x+3)^2 + (y+1)^2]$ $A_1 = 0.5\sin 1 - 2\cos 1 + \sin 2 - 1.5\cos 2$ $A_2 = 1.5\sin 1 - \cos 1 + 2\sin 2 - 0.5\cos 2$ $B_1 = 0.5\sin x - 2\cos x + \sin y - 1.5\cos y$ $B_2 = 1.5\sin x - \cos x + 2\sin y - 0.5\cos y$	$-\pi \leq x, y \leq \pi$ 凸, 非连续
FONI	$f_1(x, y) = 1 - \exp(-(x-1)^2 - (y+1)^2)$ $f_2(x, y) = 1 - \exp(-(x+1)^2 - (y-1)^2)$	$-4 \leq x, y \leq 4$ 凹			

表 2 实验环境设置

种群规模	进化代数	交叉概率	变异概率	eta_c	eta_m	Sizea	Sizeb
100	200	0.9	0.1	15.0	20.0	5	5

说明:在  $\varepsilon$ -MOEA 中,不存在进化代数,只存在适应度评价次数,且:适应度评价次数 = 进化代数  $\times$  种群规模。因此,设置适应度评价次数为 20 000。在  $\varepsilon$ -MOEA 中,归档集的大小是变化的,因此,为了得到上述种群规模大小的归档集,需调节  $\varepsilon$  的值,在这里,  $\varepsilon$  的取值尽量与文献[28]相同。

## 5.2 实验与数据分析

SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 在表 2 的实验环境设置下对表 1 中的 7 个测试函数进行优化,得到的 Pareto Front 分别于图 1~图 7。

从图 1~图 7 可以看出,三算法得到的 Pareto Front,无论

在分布广度,还是在均匀性方面,SMOEA 都比 NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 要好一些。主要表现为两点:(1)NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 得到的 Pareto Front 在有些区域个体密集,一些区域个体稀疏,甚至有一些区域出现个体缺失。(2)NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 在优化非连续或者非凸的 MOPs 时,如:ZDT2、ZDT3、POL 与 FON1 等,容易造成部分区域个体严重缺失;还有  $\varepsilon$ -MOEA 很难找到边界点,造成边界的一段 Pareto Front 丢失,如:ZDT1 和 SCH。这说明 SMOEA 得到的 Pareto Front 的分布性明显优于 NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA。

## 5.3 性能评价

上面已经定性的比较了 SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 的分布性能。为了进行定量分析,这里引入两个性能评价指标。

(1) SP:SP 为 Schott<sup>[2]</sup> 提出来的一种评价分布性的指标,是目前使用最多的评价分布的参数。SP 的计算式如下:

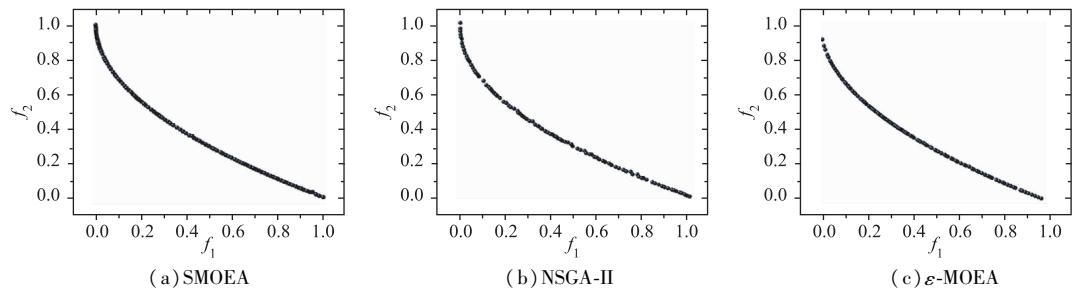


图 1 SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 在 ZDT1 上的 Pareto Front

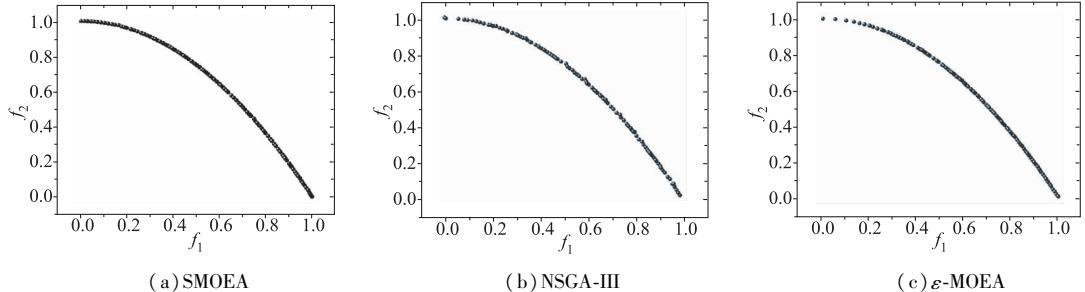


图 2 SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 在 ZDT2 上的 Pareto Front

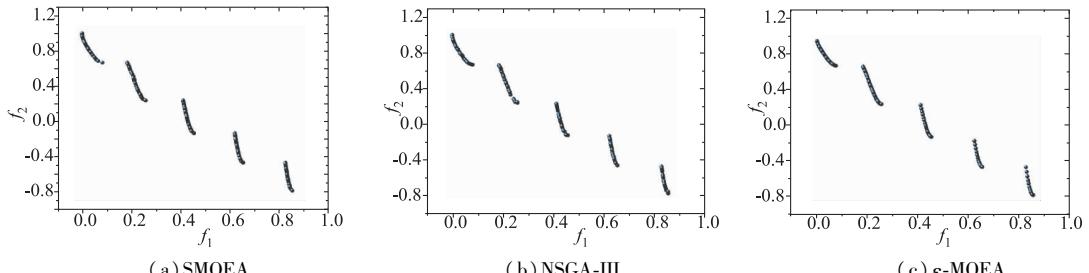


图 3 SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 在 ZDT3 上的 Pareto Front

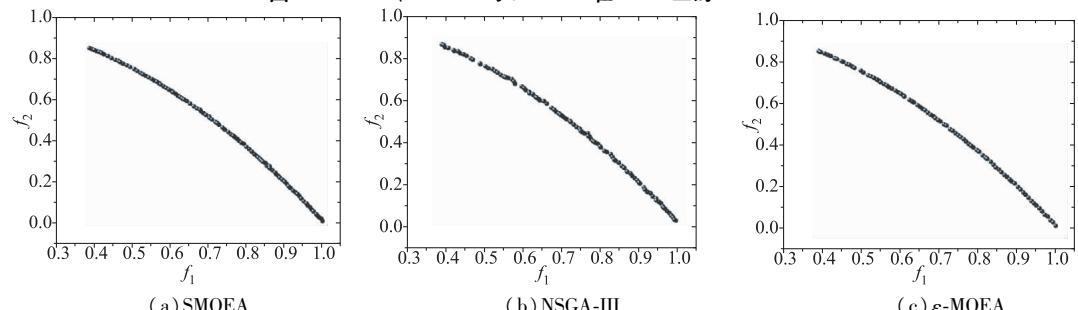


图 4 SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 在 ZDT6 上的 Pareto Front

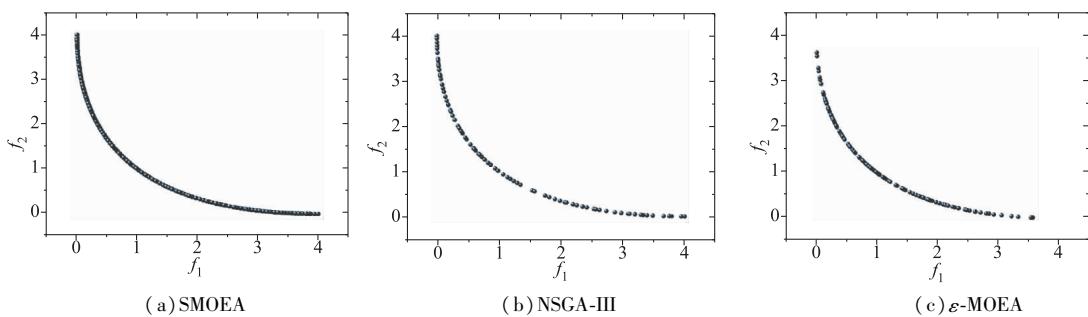


图5 SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 在 SCH 上的 Pareto Front

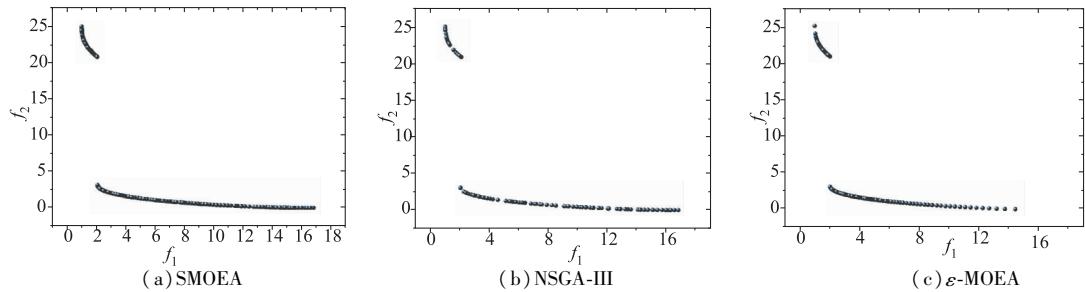


图6 SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 在 POL 上的 Pareto Front

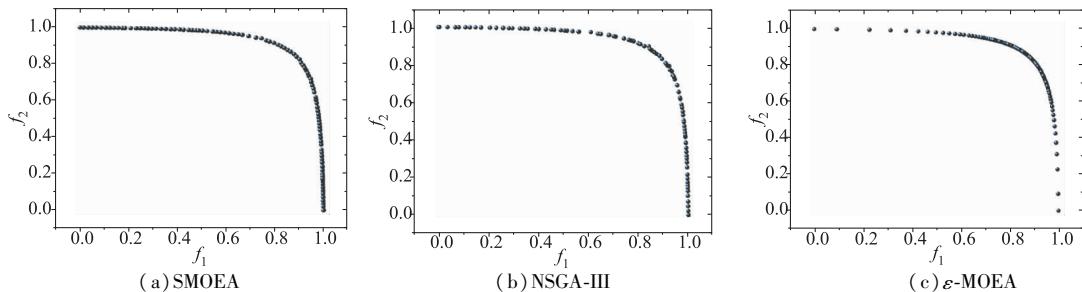


图 7 SMOEA、NSGA-II 与  $\epsilon$ -MOEA 在 FON1 上的 Pareto Front

表3 算法的分布性平均SP及其方差 $\sigma$ 的比较

MOEAs	SMOEA		NSGA - II		$\varepsilon$ -MOEA	
	SP( Avg)	SP( $\sigma$ )	SP( Avg)	SP( $\sigma$ )	SP( Avg)	SP( $\sigma$ )
ZDT1	<u>0.003 706</u>	0.000 424	0.006 029	0.000 531	0.005 904	<u>0.000 280</u>
ZDT2	<u>0.003 544</u>	<u>0.000 463</u>	0.006 159	0.000 809	0.008 615	0.000 881
ZDT3	<u>0.004 670</u>	0.000 652	0.007 135	0.000 776	0.011 164	<u>0.000 516</u>
ZDT6	<u>0.002 950</u>	<u>0.000 250</u>	0.007 925	0.003 241	0.003 638	0.000 420
SCH	<u>0.014 146</u>	<u>0.001 470</u>	0.036 418	0.002 240	0.038 069	0.003 464
POL	<u>0.038 297</u>	<u>0.004 356</u>	0.106 804	0.005 073	0.146 025	0.006 371
FON1	0.003 690	0.000 345	0.008 257	0.000 506	0.022 753	0.000 399

表4 算法在部分测试函数上的收敛度(GD)值

MOEAs	SMOEA		NSGA - II		$\varepsilon$ -MOEA	
	SP(Avg)	SP( $\sigma$ )	SP(Avg)	SP( $\sigma$ )	SP(Avg)	SP( $\sigma$ )
ZDT1	0.000 272 13	0.000 018 21	0.000 364 51	0.000 284 17	0.000 299 11	0.000 028 44
ZDT2	0.000 185 88	0.000 044 46	0.000 373 54	0.000 286 47	0.000 256 49	0.000 037 17
ZDT6	0.000 784 10	0.000 063 96	0.052 445 96	0.018 029 94	0.000 876 53	0.000 046 02
SCH	0.000 381 34	0.000 017 41	0.000 426 35	0.000 006 45	0.000 308 88	0.000 002 82

$$SP = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{d} - d_i)^2} \quad (7)$$

其中  $d_i = \min_j \left\{ \sum_{k=1}^r |f_k^i - f_k^j| \right\}$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ );  $\bar{d}$  为  $d$  的平均值。

均值;  $j_k^i$  为第  $i$  个个体的第  $k$  维目标值;  $n$  为算法得到的 Pareto 最优解集中的解的个数。SP 越小, 说明分布性越好。

(2) GD: GD 为世代距离(Generational Distance, GD), GD 主要用于评价收敛性。GD 定义为:

$$GD = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}}{n} \quad (8)$$

$n$  是解集中个体的数目,  $d_i$  是每个个体到全局非劣最优解的最小欧几里得距离。 $GD$  的值越小就说明解集越靠近全局非劣最优区域, 如果  $GD = 0$  就说明算法的解都在全局非劣最优区域上, 这是最理想的情况。

在表 2 的实验环境下, 对表 1 中所有测试函数, 运行 SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 各 20 次。得到的 SP 的平均值 (mean) 及其标准差 ( $\sigma$ ) 列于表 3, 表中有下划线的数字表示该算法得到的值最小。可以看出, SMOEA 在所有的测试函数上的分布性均比 NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 要好的多。

由于有些测试函数没有提供真实 Pareto Front 的表达式, 这里只对部分测试函数的 GD 进行了统计。对于表 1 中的部分测试函数, 在表 2 的实验环境下, 运行 SMOEA、NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 各 20 次, 统计 GD 的平均值 (mean) 与方差 ( $\sigma$ ), 得表 4。表中有下划线的数字表示该算法得到的值最小。从表中可知, 除 SCH 以外, SMOEA 得到的平均 GD 均要小于 NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 所得到的平均 GD。这说明, SMOEA 在改进算法分布性的同时, 也使算法获得了较好的收敛性。

## 6 结论

分布性保持在实际中有着重要的意义, 一个好的分布性能够给决策者提供更多合理的选择。经过对多目标算法环境选择和匹配选择方法的分析, 本文提出了一种基于相似个体的多目标进化算法。该算法有两个特点: (1) 在种群修剪的过程中, 删除相似程度最大的个体 (密集程度最大), 从而保证了解分布。(2) 在进化操作过程中, 选择了相似个体进行进化操作。通过对 7 个测试函数的 SP 以及部分测试函数 GD 的统计, 与 NSGA-II 与  $\varepsilon$ -MOEA 进行比较, 实验结果表明, SMOEA 能在很大程度上提高分布性, 同时, 还改进了收敛性。

## 参考文献:

- [1] Zitzler E, Laumanns M, Bleuler S. A tutorial on evolutionary multiobjective optimization [ C ]//Sørensen K, Gandibleux X, Sevaux M, et al. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Meta-heuristics for Multiobjective Optimization. [ S. I. ]: Springer, 2004, 35: 3–37.
- [2] Rosenberg R S. Simulation of genetic populations with biochemical properties [ D ]. University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1967.
- [3] Schaffer J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms [ D ]. Vanderbilt University, 1984.
- [4] Schaffer J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms [ C ]// Genetic Algorithms and their Applications: Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms, Lawrence Erlbaum, 1985: 93–100.
- [5] Fonseca C M, Fleming J. Genetic algorithms for multiobjective optimization: formulation, discussion and generalization [ C ]// Stephanie F. Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, San Mateo, California. University of Illinois at Urbana-Champaign: Morgan Kaufmann Publishers, 1993: 416–423.
- [6] Srinivas N, Deb K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms [ J ]. Evolutionary Computation, 1994, 2 (3): 221–248.
- [7] Horn J, Nafpliotis N, Goldberg D E. A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization [ C ]// Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Piscataway, New Jersey, IEEE Service Center, 1994, 1: 82–87.
- [8] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—a comparative study [ M ]// Eiben A E. Parallel Problem Solving from Nature V. Amsterdam: Springer-Verlag, 1998: 292–301.
- [9] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach [ J ]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3 (4): 257–271.
- [10] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: improving the strength Pareto evolutionary algorithm, 103 [ R ]. Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), ETH Zurich, Zurich, Switzerland, 2001.
- [11] Knowles J, Corne D. Properties of an adaptive archiving algorithm for storing nondominated vectors [ J ]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003, 7 (2): 100–116.
- [12] Deb K, Goldberg D E. An investigation of niche and species formation in genetic junction optimization [ C ]// Schaffer J D. Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms. San Mateo, California, George Mason University: Morgan Kaufmann Publishers, 1989: 42–50.
- [13] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II [ J ]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6 (2): 182–197.
- [14] Corne D W, Knowles J D, Oates M J. The pareto envelope-based selection algorithm for multiobjecitve optimization [ C ]// Schoenauer M, Deb K, Rudolph G. Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference, Paris, France, 2000: 839–848.
- [15] Corne D W, Knowles J D, Oates M J. PESA-II: region-based selection in evolutionary multiobjective optimization [ C ]// Spector L. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2001), San Francisco, California, 2001: 283–290.
- [16] 郑金华. 多目标进化算法及其应用 [ M ]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [17] 崔逊学. 多目标进化算法及其应用 [ M ]. 北京: 国防工业出版社, 2006.
- [18] Villalobos-Arias M, Coello C A. Asymptotic convergence of metaheuristics for multiobjective optimization problems [ J ]. Soft Computing, 2006, 10 (11): 1001–1005.
- [19] Peter A N. The balance between proximity and diversity in multiobjective evolutionary algorithms [ J ]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003, 7 (2): 174–188.
- [20] Laumanns M, Thiele L, Deb K. Combining convergence and diversity in evolutionary multi-objective optimization [ J ]. Evolutionary Computation, 2002, 10 (3): 263–282.
- [21] Edgeworth F Y. Mathematical psychics [ M ]. London, Keagan P: [ s. n. ], 1881.
- [22] Pareto V, Cours D. Economie politique, volume I and II [ M ]. Rouge F. Lausanne: [ s. n. ], 1896.
- [23] Hajela P, Lin C Y. Genetic search strategies in multicriterion optimal design [ J ]. Structural Optimization, 1992, 4: 99–107.
- [24] Fonseca C M, Fleming P J. Genetic algorithms for multiobjective optimization: formulation, discussion and generalization [ C ]// Proc of 5th International Conference on Genetic Algorithms, 1993: 416–423.
- [25] Jaszkiewicz A. On the performance of multiple-objective genetic local search on the 0/1 knapsack problem . a comparative experiment [ J ]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002 (6): 402–412.