

第六章 非平衡态统计理论初步

§ 6.1 玻耳兹曼方程的弛豫时间近似

§ 6.1 玻耳兹曼方程的弛豫时间近似

平衡态的统计理论平衡态是热运动的一种特殊状态，由于在许多重要的实际问题中物质系统处在非平衡态，因而需要研究非平衡态的统计理论。但建立非平衡态统计理论则要困难得多。

作为基础课程，我们仅限于讲述气体动理学理论。

它的传统研究对象是稀薄气体，目前也被广泛应用于固体物理、等离子体物理和天体物理等领域。

在统计物理课程中，我们要求出非平衡态的分布函数，出非平衡态分布函数求微观量的统计平均值，为此，首先要导出非平衡态分布函数所遵从的方程。

当气体分子的平均热波长远小于分子间的平均距离时，可以将分子看作经典粒子，用坐标和动量描述它的微观运动状态。

$f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\tau d\omega$ 经过时间 dt 之后

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t + dt) d\tau d\omega$$

$$[f(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt] d\tau d\omega$$

两式相减得在 dt 时间内 $d\tau d\omega$ 内分子数的增加为

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt d\tau d\omega \quad \frac{\partial f}{\partial t} \text{ 表示分布函数随时间的变化率。}$$

分布函数随时间变化有两个原因，一个原因是分子的运动，分子具有的速度使其位置随时间而改变，当存在外场时分子具有的加速度使分子的速度随时间而改变，这两者都引起 $d\tau d\omega$

内分子数的改变；另一个原因是分子相互碰撞引起分子速度的改变，使 $d\tau d\omega$ 内的分子数发生改变。

先考虑在 dt 时间内通过 \mathbf{x} 平面中的“面积” $dA = dydzdv_x dv_y dv_z$ 进入 $d\tau d\omega$ 内的分子数。这些分子必位于以 dA 为底，以列 $\dot{x}dt$ 为高的柱体内，这柱体内的分子数是

$$(f \dot{x})_x dt dA$$

在 dt 时间内通过 $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ 平面而走出 $d\tau d\omega$ 的分子数是：

$$(f \dot{x})_{x+dx} dt dA = [(f \dot{x})_x + \frac{\partial}{\partial x} (f \dot{x}) dx] dt dA$$

净分子数是：

$$-\frac{\partial}{\partial x} (f \dot{x}) dx dt dA = -\frac{\partial}{\partial x} (f \dot{x}) dt d\tau d\omega$$

同理有：

在 dt 时间内通过一对平面 v_x 和 $v_x + dv_x$ 进入 $d\tau d\omega$

的分子数为：

$$-\frac{\partial}{\partial v_x}(f \dot{v}_x) dt d\tau d\omega$$

在 dt 时间内通过六对平面进入 $d\tau d\omega$ 的分子数为：

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(f v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f v_z) + \frac{\partial}{\partial v_x}(f \dot{v}_x) + \frac{\partial}{\partial v_y}(f \dot{v}_y) + \frac{\partial}{\partial v_z}(f \dot{v}_z)\right] dt d\tau d\omega$$

此即在 dt 时间内，由于运动引起的 $d\tau d\omega$ 内分子数的变化。

因分子的坐标 \mathbf{r} 与其速度 \mathbf{v} 是相互独立的变量，因而：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

设：作用于一个分子的外力为 $mF(mX, mY, mZ)$ ，则有：

$$\dot{v}_x = X, \quad \dot{v}_y = Y, \quad \dot{v}_z = Z$$

对重力与电磁力满足：

$$\frac{\partial X}{\partial v_x} + \frac{\partial Y}{\partial v_y} + \frac{\partial Z}{\partial v_z} = 0$$

则由于运动收起的分布函数的变化率可简化为：

$$-\left[v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial v_x} + Y \frac{\partial f}{\partial v_y} + Z \frac{\partial f}{\partial v_z} \right]$$

假设平衡状态下分子遵从麦玻分布，则局域平衡的分布函数仍可表为：

$$f^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v-v_0)^2}$$

当分函数 f 与局域平衡的分布函数 $f^{(0)}$ 存在偏离 $f - f^{(0)}$ 时，他子碰撞将使偏离迅速减小。

假设：分子碰撞引起偏离的碰撞变化率与偏离成正比，则：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (f - f^{(0)}) \right]_c = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau_0}$$

积分可得：

$$f(t) - f^{(0)} = [f(0) - f^{(0)}] e^{-\frac{t}{\tau_0}}$$

τ_0 : 称为弛豫时间。

因此有：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial v_x} + Y \frac{\partial f}{\partial v_y} + Z \frac{\partial f}{\partial v_z} = - \frac{f - f^{(0)}}{\tau_0}$$

此即玻耳兹曼方程的弛豫时间近似。

对于定常的状态有

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad , \quad \text{则}$$

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial v_x} + Y \frac{\partial f}{\partial v_y} + Z \frac{\partial f}{\partial v_z} = - \frac{f - f^{(0)}}{\tau_0}$$