第14卷 第8期　　高能物理与核物理　　Vol. 14, No. 8
1990年8月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Aug., 1990

$SU(2)_l$WZW 模型的基本问题

侯伯宇　李康　王珮
（西北大学现代物理研究所，西安）

摘　　要

本文给出了 $SU(2)_l$WZW 模型 $j_3=1$ 情况下基本问题的解，并给出了一般求解的方法。我们同时也找到了 $SU(2)_l$WZW 模型的交叉矩阵与 $SL(2,q)$ 量子群的辫子矩阵(即量子拉卡系数)的明显关系.

一、引　　言

$SU(2)$WZW 模型通过 GKO 陪集结构与最小模型及超共形场模型相联系[1]. 如陪集结构: $SU(2)_k\otimes SU(2)_l/SU(2)_{k+l}$ 当 $l=1$ 时就对应于最小模型，当 $l\geqslant 2$ 就对应于超共形场模型及 parafermion 模型等[2]. 所以通过对 $SU(2)_l$WZW 模型的讨论,不仅对 $SU(2)$WZW 模型本身的了解,而且对最小模型,超共形场模型及 parafermion 的了解也将有很大的帮助. 近一年来人们又发现了 $SU(2)$WZW 模型与 $SL(2,q)$ 量子群也有联系[3]. 本文的讨论将会使这些联系更加清楚.

几年前，Knizhnik 和 Zamolodchikov 在他们的文章里[4]讨论了 $SU(N)$WZW 模型，并给出了关联函数所满足的方程（后来人们称此方程为 K-Z 方程). Tsuchiya 和 Kanie 的文章[5]用顶点算子的方法讨论了 $SU(2)$WZW 模型，并讨论了 KZ 方程在 $SU(2)_l$WZW 模型中的形式,求出了一个特殊情况下 $\left(j_3=\frac{1}{2}\right)$ KZ 方程的解，并给出了此时此模型的辫子矩阵和聚合矩阵. 但对一般情况下的求解并没有给出，困难在于求解三阶或三阶以上微分方程. 本文在 Tsuchiya 和 Kanie 文章的基础上给出了 $j_3=1$ 时辫子矩阵和聚合矩阵的形式，以及它们与 $SL(2,q)$ 量子拉卡系数的关系,并对 j_3 取任意值的情况进行了讨论.

二、$SU(2)$WZW 模型的基本问题

为了本文的完整性，在这小节里我们先回顾以下 Tsuchiya 和 Kanie 给出的基本题.

三个非负半整数$\begin{pmatrix} & j & \\ j_1 & & j_2\end{pmatrix}$称为一个顶点算子,它代表了如图(1)描述的耦合过程. 文献

本文 1989 年 12 月 20 日收到.

[5]中证明了有唯一的 $\begin{pmatrix} & j & \\ j_1 & & j_2 \end{pmatrix}$ 类型的初级场 Φ 存在，如果 j_1j_2j 满足如下的 lCG 条件：

$$\begin{aligned} &|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2, \\ &j_1 + j_2 + j \leqslant l. \end{aligned} \tag{2.1}$$

$SU(2)$WZW 模型的 KZ 方程有如下形式：

$$\left[(l+2)\frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{j \neq i} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j}\right]\langle \Phi_N(z_N)\cdots\Phi_1(z_1)\rangle = 0. \tag{2.2}$$

这里：

$$\Omega_{ij} = \sum t_i^a t_j^a, \tag{2.3}$$

t_i^a 是对 Φ_i 场 $SU(2)$ 生成算子的表示。

图 1

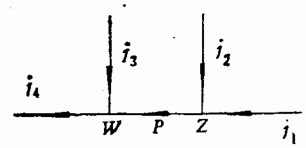

图 2

对四个非负半整数 $(j_1j_2j_3j_4)$，给出的如图2给出的过程，我们有二个顶点算子：$\Phi_1(w), \Phi_2(z)$ 这两个算子分别对应于 $\begin{pmatrix} & j_3 & \\ j_4 & & p \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} & j_2 & \\ p & & j_1 \end{pmatrix}$ 关联函数 $\langle\Phi_1(w)\Phi_2(z)\rangle$ 可以唯一的由满足下式的函数 $\Psi_p(wz)$ 决定：

$$\begin{aligned} &\left[(l+2)\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\Omega_{13}}{w} - \frac{\Omega_{23}}{w-z}\right]\Psi_p(wz) \\ &= \left[(l+2)\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\Omega_{12}}{z} - \frac{\Omega_{23}}{z-w}\right]\Psi_p(wz) = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

(4)式就是四点关联函数满足的 KZ 方程当 $z_1 = 0$、$z_2 = z$、$z_3 = w$、$z_4 = \infty$ 时的形式。

由(2.4)式可得到：

$$\left(w\frac{\partial}{\partial w} + z\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_4\right)\Psi_p(wz) = 0, \tag{2.5}$$

这里：

$$-(l+2)\Delta_4 = \Omega_{12} + \Omega_{13} + \Omega_{23}.$$

引入变量 $\zeta = \dfrac{z}{w}$，从(2.5)式我们发现函数 $z^{\Delta_4}\Psi_p(w, \zeta w)$ 与变量 w 无关，我们缩记此函数为 $\Psi_p(\zeta)$。则从(2.4)式我们知 $\Psi_p(\zeta)$ 满足：

$$\left[(l+2)\frac{d}{d\zeta} - \frac{\Omega_{12} + (l+2)\Delta_4}{\zeta} - \frac{\Omega_{23}}{\zeta - 1}\right]\Psi_p(\zeta) = 0. \tag{2.6}$$

对任意的 $(j_4j_3j_2j_1)$，函数 Ψ_p 所在的空间 V_0 为 $V_{j_4}\otimes V_{j_3}\otimes V_{j_2}\otimes V_{j_1}$ 在 $SL(2C)$ 作用下不变的子空间。V_j 为自旋为 j 的 module 空间。V_0 空间有三组正交的基矢定义如

下：

$$U_{j_{12}}^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{2j_4+1}}\sum_{\substack{m_1+m_2=m_{12}\\ m_{12}+m_3=m_4}}(-1)^{j_4-m_4}C_{m_{12}m_3}^{j_4m_4}C_{m_1m_2}^{j_{12}m_2}\varphi j_4(-m_4)$$
$$\otimes\varphi j_3(m_3)\otimes\varphi j_2(m_2)\otimes\varphi j_1(m_1),$$
$$U_{j_{23}}^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2j_4+1}}\sum_{\substack{m_2+m_3=m_{23}\\ m_1+m_{23}=m_4}}(-1)^{j_4-m_4}C_{m_1m_{23}}^{j_4m_4}C_{m_2m_3}^{j_{23}m_{23}}\varphi j_4(-m_4)$$
$$\otimes\varphi j_3(m_3)\otimes\varphi j_2(m_2)\otimes\varphi j_1(m_1),\tag{2.7}$$
$$U_{j_{13}}^{(\infty)}=\frac{1}{\sqrt{2j_4+1}}\sum_{\substack{m_1+m_3=m_{13}\\ m_2+m_{13}=m_4}}(-1)^{j_4-m_4}C_{m_2m_{13}}^{j_4m_4}C_{m_1m_3}^{j_{13}m_{13}}\varphi j_4(-m_4)$$
$$\otimes\varphi j_3(m_3)\otimes\varphi j_2(m_2)\otimes\varphi j_1(m_1),$$

式中 $C_{m_1m_2}^{j_3m_3}$ 是 CG 系数，$\varphi j(m)$ 为 V_j 空间的基矢．这三组基矢使 $\Omega_{12},\Omega_{23},\Omega_{13}$ 分别对角化：

$$\begin{aligned}\Omega_{12}U_{j_{12}}^{(0)}&=(l+2)(\Delta_{j_{12}}-\Delta_{j_2}-\Delta_{j_1})u_{j_{12}}^{(0)},\\ \Omega_{23}U_{j_{23}}^{(1)}&=(l+2)(\Delta_{j_{23}}-\Delta_{j_2}-\Delta_{j_3})U_{j_{23}}^{(1)},\\ \Omega_{13}U_{j_{13}}^{(\infty)}&=(l+2)(\Delta_{j_{13}}-\Delta_{j_1}-\Delta_{j_3})U_{j_{13}}^{(\infty)},\end{aligned}\tag{2.8}$$

式中：

$$\Delta_j=\frac{j(j+1)}{l+2}.\tag{2.9}$$

把(2.6)式的解写为：

$$\Psi(\zeta)=U^{(i)}\Psi^{(i)}(\zeta)=U^{(\infty)}\Psi^{(\infty)}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\quad i=0,1,\tag{2.10}$$

式中 $U^{(0)}\Psi^{(0)}U^{(1)}\Psi^{(1)}U^{(\infty)}\Psi^{(\infty)}$ 分别代表方程(2.6)式在三组基矢 $U^{(0)}U^{(1)}U^{(\infty)}$ 下的解，这三组解分别在 $\zeta=0$，$\zeta=1$，$\zeta=\infty$ 处解析．这三组解之间有如下的变换关系存在：

$$\begin{aligned}U^{(0)}\Psi^{(0)}&=U^{(\infty)}\Psi^{(\infty)}K(j_4j_3j_2j_1),\\ U^{(0)}\Psi^{(0)}&=U^{(1)}\Psi^{(1)}F(j_4j_3j_2j_1).\end{aligned}\tag{2.11}$$

基之间的变换矩阵记为 S，即：

$$\begin{aligned}U^{(0)}&=U^{(\infty)}S^{(0\infty)},\\ U^{(0)}&=U^{(1)}S^{(01)}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

(2.12)代入(2.11)可得：

$$\begin{aligned}S^{(0\infty)}\Psi^{(0)}&=\Psi^{(\infty)}K(j_4j_3j_2j_1),\\ S^{(01)}\Psi^{(0)}&=\Psi^{(1)}F(j_4j_3j_2j_1).\end{aligned}\tag{2.13}$$

有意义的是不同基下解的变换矩阵 $K(j_4j_3j_2j_1)$ 和 $F(j_4j_3j_2j_1)$ 与变量 ζ 无关． Tsuchiya 和 Kanie 所说的基本问题就是求解 $K(j_4j_3j_2j_1)$ 矩阵及 $F(j_4j_3j_2j_1)$ 矩阵． 然而 K 矩阵和 F 矩阵正好是该模型的辫子矩阵和聚合矩阵．

三、V_0 空间退化到一维、二维情况下的辫子矩阵

对 $j_3=\frac{1}{2}$ 的基本问题的解在文献[5]中已详细给出，这里不必重复这个工作。本节我们就任意的 $(j_4j_3j_2j_1)$ 讨论在 lCG 条件约束下 V_0 空间维数退化情况，并给出一维二维情况下基本问题的解。

对任意的 $(j_4j_3j_2j_1)$，并且假定 j_3 最小，我们引入一个集合：

$$I_l[j_4j_3j_2j_1]=\left\{p\in\frac{1}{2}\mathbf{Z},\ 0\leqslant 2p\leqslant l,\ \begin{pmatrix} & j_3 & \\ j_4 & & p\end{pmatrix}\in(l\mathrm{CG}),\ \begin{pmatrix} & j_2 & \\ p & & j_1\end{pmatrix}\in(l\mathrm{CG})\right\},\quad(3.1)$$

式中 $(l\mathrm{CG})$ 表示满足 lCG 条件顶点算子的集合。(3.1)式就意味着中间态 p 的取值不能任意，要受到以下四个不等式的约束。

$$\left.\begin{array}{l} j_4-j_3\leqslant p\leqslant j_4+j_3 \\ |j_1-j_2|\leqslant p\leqslant j_1+j_2\end{array}\right\}\ \mathrm{CG}\ 条件,\qquad(3.2)$$

$$\left.\begin{array}{l} j_4+j_3+p\leqslant l \\ j_1+j_2+p\leqslant l\end{array}\right\}\ l\ 约束条件.\qquad(3.3)$$

两者结合起来称为 lCG 条件。相邻两 p 值相差为 1.

假定 $j_4-j_3\geqslant|j_1-j_2|$，$j_4+j_3\leqslant j_1+j_2$，且 l 足够大，即：$l\geqslant j_1+j_2+j_3+j_4$. 此时 p 取 $(2j_3+1)$ 个值如下：

$$I_l[j_4j_3j_2j_1]=\{p=j_4+j_3,\ j_4+j_3-1,\cdots|j_4-j_3|\}.\qquad(3.4)$$

KZ 方程此时将变为 $2j_3+1$ 个联立的线性微分方程组。求出的辫子矩阵和聚合矩阵也将是 $(2j_3+1)\times(2j_3+1)$ 矩阵。V_0 空间的维数与中间态数目相等，当然在这个假定下就为 $2j_3+1$ 维。

但是在某个 j_i 取特定值时，上述情况可退化为较低维的情况。我们将 V_0 空间退化为 m 维的情况记为 $(\mathrm{D}m)$.

当 $j_1=j_2+j_4+j_3-m+1$，或 $j_2=j_1+j_4+j_3-m+1$；或 $j_4=j_1+j_2+j_3-m+1$ 时，$2j_3+1$ 个中间态在 CG 条件约束下就退化为 m 个中间态，即 V_0 空间变成较低维（m 维）的情况。这里 m 的取值范围为 $1\leqslant m\leqslant 2j_3$. 上面给出三种情况可以使 $V^{(0)}$ 空间由 $2j_3+1$ 维变为 m 维，把这三种 m 维的情况分别记为 $(\mathrm{D}m)^1$，$(\mathrm{D}m)^2$，$(\mathrm{D}m)^3$.

对 $(\mathrm{D}m)^1$，$(\mathrm{D}m)^2$ 中间态取值：

$$I_l=\{j_4+j_3-m+1,\ j_3+j_3-m+2,\cdots j_4+j_3\},$$

对 $(\mathrm{D}m)^3$

$$I_l=\{j_4-j_3+m-1,\ j_4-j_3+m-2,\cdots|j_4-j_3|\}.$$

当然上面考虑的退化情况仅是 CG 约束，没有考虑 l 约束，而认为 l 足够大。若 l 不是足够大，而 l 在范围 $j_1+j_2+j_4-j_3<l<j_1+j_2+j_4+j_3$ 中取某一值时，上面讨论的各低维情况 $(\mathrm{D}m)^{1,2,3}$ 还要向更低维退化。我们把 m 维情况 $(\mathrm{D}m)^{1,2,3}$ 退化到更低维 n 维 $(n<m)$ 的情况记为 $(\mathrm{D}m)^{1,2,3}_n$.

当 $l=j_1+j_2+j_4+j_3-n$ 时，$(\mathrm{D}m)^{1,2,3}$ 在 l 条件约束下就退化为 $m-n$ 维的情

况 $(Dm)^{1,2,3}_{m-n}(0 \leqslant n \leqslant m)$

对 $(Dm)^{1,2}_{m-n}$，$I_l = \{j_4 + j_3 - m + 1, j_4 + j_3 - m + 2, \cdots j_4 + j_3 - n\}$，

对 $(Dm)^{3}_{m-n}$，$I_l = \{j_4 - j_3, j_4 - j_3 + 1, \cdots j_4 - j_3 + m - n - 1\}$，

当 $n = m$时，退化为 0 维：

$$I_l = \phi \text{（空集）}.$$

V_0 空间在 lCG 条件约束下维数下降表列在附录中.

下面我们讨论 (D1)(D2) 情况下的辫子矩阵.

KZ 方程在奇异点 $\zeta = 0, 1, \infty$ 处的指数由下式给出.

$$\begin{aligned}
\gamma^{(0)} &= \Delta_{j_{12}} - \Delta_{j_2} - \Delta_{j_1} + \Delta_4 = \Delta_{j_{12}} + \Delta_{j_3} - \Delta_{j_4}, \\
\gamma^{(1)} &= \Delta_{j_{23}} - \Delta_{j_2} - \Delta_{j_3}, \\
\gamma^{(\infty)} &= \Delta_{j_{13}} - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_3}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

在 (D1) 情况由 CG 条件的限制，$j_{12}j_{13}j_{23}$ 的取值如下：

$$\begin{aligned}
&(D1)^1, \quad j_{12} = j_3 + j_4,\ j_{13} = j_1 - j_3,\ j_{23} = j_2 + j_3, \\
&(D1)^2, \quad j_{12} = j_3 + j_4,\ j_{13} = j_1 + j_3,\ j_{23} = j_2 - j_3, \\
&(D1)^3 \quad j_{12} = j_4 - j_3,\ j_{13} = j_1 + j_3,\ j_{23} = j_2 + j_3.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

把(3.6)代入(3.5)得：

$$\begin{aligned}
&\text{对 } (D1)^1\text{：}\ \gamma^{(0)} = \frac{2j_3}{l+2}(j_4 + j_3 + 1),\ \gamma^{(1)} = \frac{2}{l+2}j_2 j_3,\ \gamma^{(\infty)} = -\frac{2j_3}{l+2}(j_1 + 1), \\
&\text{对 } (D1)^2\ \ \gamma^{(0)} = \frac{2j_3}{l+2}(j_4 + j_3 + 1),\ \gamma^{(1)} = \frac{-2j_3}{l+2}(j_2 + 1),\ \gamma^{(\infty)} = \frac{2}{l+2}j_1 j_3, \\
&\text{对 } (D1)^3\ \ \gamma^{(0)} = \frac{1}{l+2}(2j_3^2 - 2j_4 j_3),\ \gamma^{(1)} = \frac{2j_2 j_3}{l+2},\ \gamma^{(\infty)} = \frac{2j_1 j_3}{l+2}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

(D1) 下 V_0 空间是一维的，所以基底的怎样选择并不重要，但是为了与一般情况下基底变化矩阵的定义相一致，我们选择如下的基底是方便的.

$$\begin{aligned}
&\text{对 } (D1)^{1,3}\quad U^{(0)} = U^{(\infty)}, \\
&\text{对 } (D1)^2,\quad U^{(0)} = (-1)^{2j_3}U^{(\infty)}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

在 (D1) 情况下的 KZ 方程变为：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\zeta}\Psi^{(i)} = \left(\frac{\gamma^{(0)}}{\zeta} + \frac{\gamma^{(1)}}{\zeta - 1}\right)\Psi^{(i)},\ i = 0, 1, \\
&\frac{d}{d\eta}\Psi^{(\infty)} = \left(\frac{\gamma^{(\infty)}}{\eta} + \frac{\gamma^{(1)}}{\eta - 1}\right)\Psi^{(\infty)},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

这里

$$\eta = \frac{1}{\zeta}.$$

容易得出(3.9)式的解为：

$$\begin{aligned}
&\text{对 } (D1)^{1,3}\text{：}\ \Psi^{(\infty)} = q^{-j_2 j_3}\Psi^{(0)}, \\
&\text{对 } (D1)^2\text{：}\ \ \Psi^{(\infty)} = q^{j_3(j_2+1)}\Psi^{(0)}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

结合(2.12)(2.13)式我们可求出 (D1) 的辫子矩阵如下：

$$K(j_4j_3j_2j_1)_{(D1)^{1,3}} = q^{j_2j_3},$$
$$K(j_4j_3j_2j_1)_{(D1)^2} = (-1)^{2j_3}q^{-j_3(j_2+1)}, \tag{3.11}$$

式中:

$$q = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{l+2}\right). \tag{3.12}$$

下面我们讨论 (D2) 情况，我们这里只讨论 $(D2)^1$，而 $(D2)^{2,3}$ 的讨论方法完全一样. 在 $(D2)^1$ 下，$j_1 = j_2 + j_4 + j_3 - 1$. 中间态取值如下:

j_{12} 取值: $j_4 + j_3$, $j_4 + j_3 - 1$; j_{13} 取值; $j_1 - j_3 + 1$, $j_1 - j_3j_{23}$ 取值为: $j_2 + j_3$, $j_2 + j_3 - 1$. 与 Tsuchiya 和 Kanie 的文章中的计算相似,我们可给出 $(D2)^1$ 下 KZ 方程的解:

$$\varphi_{11}^{(0)}(\zeta) = \zeta^{\frac{2j_3}{l+2}(j_4+j_3+1)}(1-\zeta)^{\frac{2j_2j_3}{l+2}}F\left(\frac{2j_1+2}{l+2}, \frac{2j_3}{l+2}, \frac{2j_3+2j_4}{l+2}; \zeta\right),$$

$$\varphi_{21}^{(0)}(\zeta) = c\zeta^{1+\frac{2j_3}{l+2}(j_4+j_3+1)}(1-\zeta)^{\frac{2j_2j_3}{l+2}}$$
$$\cdot F\left(\frac{2j_1+2}{l+2}+1, \frac{2j_3}{l+2}+1, \frac{2j_3+2j_4}{l+2}+2;\zeta\right), \tag{3.13}$$

$$\varphi_{12}^{(0)}(\zeta) = c'\zeta^{1+\frac{1}{l+2}(2j_3^2+2j_3j_4-2j_4)}(1-\zeta)^{\frac{2j_2j_3-2j_2-2j_3}{l+2}}$$
$$\cdot F\left(-\frac{2j_1+2}{l+2}, -\frac{2j_3}{l+2}+1, 2-\frac{2j_3+2j_4}{l+2}, \zeta\right),$$

$$\varphi_{22}^{(0)}(\zeta) = \zeta^{\frac{1}{l+2}(2j_3^2+2j_3j_4-2j_4)}(1-\zeta)^{\frac{2j_2j_3-2j_2-2j_3}{l+2}}$$
$$\cdot F\left(-\frac{2j_1+2}{l+2}, -\frac{2j_3}{l+2}, -\frac{2j_3+2j_4}{l+2};\zeta\right).$$

(3.13)式为 KZ 方程在 $\zeta = 0$ 点解析的解，$F(\alpha,\beta,\gamma;\zeta)$ 为超几何函数. $\zeta = \infty$点解析的解也可写出(从略). 根据(2.13)式我们可得到 $(D2)^1$ 下的辫子矩阵为:

$$K(j_4j_3j_2j_1)_{(D2)^1} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix},$$

式中:

$$K_{11} = -q^{(j_2j_3-j_1-1)}\left[\frac{(2j_4+2j_3)(2j_1-2j_3+2)}{2j_2 2j_3}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2j_4+2j_3}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{2j_1-2j_3+2}{l+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2j_3}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{2j_2}{l+2}\right)},$$

$$K_{12} = q^{(j_2j_3-j_2)}\left[\frac{(2j_4+2j_3)(2j_1-2j_3+2)}{2j_4(2j_1+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(-\frac{2j_4+2j_3}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{2j_1-2j_3+2}{l+2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{2j_4}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{2j_1+2}{l+2}\right)},$$

$$K_{21}=q^{(j_2j_3-j_3)}\left[\frac{(2j_4+2j_3)(2j_1-2j_3+2)}{2j_4(2j_1+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2j_4+2j_3}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{2j_1-2j_3+2}{l+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2j_4}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{2j_1+2}{l+2}\right)},$$

$$K_{22}=q^{(j_2j_3+j_4)}\left[\frac{(2j_4+2j_3)(2j_1-2j_3+2)}{2j_2\cdot 2j_3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(-\frac{2j_4+2j_3}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{2j_1-2j_3+2}{l+2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{2j_3}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{2j_2}{l+2}\right)}. \tag{3.14}$$

(3.14)式在 $l\geqslant j_1+j_2+j_3+j_4$ 条件下成立．当 $l=j_1+j_2+j_3+j_4-1$ 时，在 l 条件的约束下就退化到一维 $(D2)^1_1$.

显然：

$$K(j_4j_3j_2j_1)_{(D2)^1_1}=K_{22}\big|_{l=j_1+j_2+j_3+j_4-1}. \tag{3.15}$$

四、$j_3=1$ 时的辫子矩阵

当 $j_3=1$ 时，V_0 空间为三维．它的三组基矢 $U_i^{(0)}, U_i^{(1)}, U_i^{(\infty)}$ $(i=1,2,3)$分别对应 j_{12} 取值 j_4+1; j_4, j_4-1; j_{23} 取值 j_2+1, j_2, j_2-1; j_{13} 取值 j_1+1 j_1 j_1-1．我们定义 $\gamma_i^{(0)}\gamma_i^{(1)}\gamma_i^{(\infty)}$ 如下：

$$\begin{aligned}\Omega_{12}U_i^{(0)}&=(l+2)(\gamma_i^{(0)}-\Delta_4)U_i^{(0)},\\ \Omega_{23}U_i^{(1)}&=(l+2)(\gamma_i^{(1)})U_i^{(1)},\\ \Omega_{13}U_i^{(\infty)}&=(l+2)\gamma_i^{(\infty)}U_i^{(\infty)}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

代入(2.8)式可得：

$$\begin{aligned}&\gamma_1^{(0)}=\frac{1}{l+2}(2j_4+4), &&\gamma_2^{(0)}=\frac{2}{l+2}, &&\gamma_3^{(0)}=-\frac{2j_4-2}{l+2},\\ &\gamma_1^{(1)}=\frac{2j_2}{l+2}, &&\gamma_2^{(1)}=-\frac{2}{l+2}, &&\gamma_3^{(1)}=-\frac{2j_2+2}{l+2},\\ &\gamma_1^{(\infty)}=\frac{2j_1}{l+2}, &&\gamma_2^{(\infty)}=-\frac{2}{l+2}, &&\gamma_3^{(\infty)}=-\frac{2j_1+2}{l+2}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

再引入：

$$\begin{aligned}\eta_1^{(i)} &= \gamma_1^{(i)} - \gamma_2^{(i)},\\ \eta_2^{(i)} &= \frac{1}{2}(\gamma_1^{(i)} - \gamma_3^{(i)}), \quad i = 0, 1, \infty.\\ \eta_3^{(i)} &= \gamma_2^{(i)} - \gamma_3^{(i)},\end{aligned} \tag{4.3}$$

我们得到:

$$\begin{aligned}\eta_1^{(0)} &= \frac{2j_4+2}{l+2}, \quad \eta_1^{(1)} = \frac{2j_2+2}{l+2}, \quad \eta_1^{(\infty)} = \frac{2j_1+2}{l+2},\\ \eta_2^{(0)} &= \frac{2j_4+1}{l+2}, \quad \eta_2^{(1)} = \frac{2j_2+1}{l+2}, \quad \eta_3^{(\infty)} = \frac{2j_1+1}{l+2},\\ \eta_3^{(0)} &= \frac{2j_4}{l+2}, \quad \eta_3^{(1)} = \frac{2j_4}{l+2}, \quad \eta_3^{(\infty)} = \frac{2j_1}{l+2}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

KZ 方程此时变为矩阵方程. 如对 $\varphi^{(0)}$ 的方程为:

$$\frac{d}{d\zeta}(\varphi^{(0)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\gamma_1^{(0)}}{\zeta} + \dfrac{\gamma_1^{(1)} - a_1^{(0)}}{\zeta - 1}, & \dfrac{b_1^{(0)}}{\zeta-1}, & 0 \\ \dfrac{b_1^{(0)}}{\zeta-1}, & \dfrac{\gamma_2^{(0)}}{\zeta} + \dfrac{\gamma_2^{(1)} + a_2^{(0)}}{\zeta-1}, & \dfrac{b_2^{(0)}}{\zeta-1} \\ 0 & \dfrac{b_2^{(0)}}{\zeta-1}, & \dfrac{\gamma_3^{(0)}}{\zeta} + \dfrac{\gamma_3^{(1)} + a_3^{(0)}}{\zeta-1} \end{bmatrix}(\varphi^{(0)}), \tag{4.5}$$

这里:

$$\begin{aligned}a_1^{(0)} &= \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1}{\eta_1^{(0)}}, \quad a_2^{(0)} = \frac{2(\varepsilon_0\varepsilon_2' - \varepsilon_1'\varepsilon_4')}{(l+2)\eta_1^{(0)}\eta_3^{(0)}}, \quad a_3^{(0)} = \frac{2\varepsilon_0'\varepsilon_1'}{\eta_3^{(0)}},\\ b_1^{(0)} &= \frac{2\eta_3^{(0)}}{\eta_1^{(0)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4'}{2\eta_3^{(0)}\eta_2^{(0)}}}, \quad b_2^{(0)} = \frac{2\eta_1^{(0)}}{\eta_3^{(0)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0'\varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_4}{2\eta_1^{(0)}\eta_2^{(0)}}},\end{aligned} \tag{4.6}$$

式中:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{1}{l+2}(j_1 + j_2 + j_4 + 2), \quad \varepsilon_0' = \frac{1}{l+2}(j_1 + j_2 + j_4 + 1)\\ \varepsilon_i &= \frac{1}{l+2}(j_1 + j_2 + j_4 + 1 - 2j_i) \quad i = 1, 2, 4,\\ \varepsilon_i' &= \frac{1}{l+2}(j_1 + j_2 + j_4 - 2j_i) \quad i = 1, 2, 4.\end{aligned} \tag{4.7}$$

通过求解此方程，再求辫子矩阵是比较困难的. 但我们发现辫子矩阵只与方程在奇异点的指数有关. 在 $\zeta = 0$ 的指数与 $\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}$ 有关;在 $\zeta = 1$ 的指数与 $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}$ 有关; 在 $\zeta = \infty$ 的指数与 $\gamma_1^{(\infty)}\gamma_2^{(\infty)}\gamma_3^{(\infty)}$ 有关. 我们引入用奇异点指数组合起来的几个量如下:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2}(\gamma_1^{(0)} + \gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(\infty)}), \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}(\gamma_3^{(0)} + \gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(\infty)}),\\ \beta_1^{(0)} &= \frac{1}{2}(\gamma_1^{(0)} + \gamma_1^{(1)} + \gamma_3^{(1)}), \quad \beta_2^{(0)} = \frac{-1}{2}(\gamma_3^{(0)} + \gamma_3^{(1)} + \gamma_1^{(\infty)}),\\ \gamma_1 &= \frac{1}{2}(\gamma_1^{(0)} + \gamma_1^{(\infty)} + \gamma_3^{(1)}), \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2}(\gamma_3^{(0)} + \gamma_3^{(\infty)} + \gamma_1^{(1)}),\\ \beta_1^{(\infty)} &= \frac{1}{2}(\gamma_1^{(\infty)} + \gamma_1^{(1)} + \gamma_3^{(0)}), \quad \beta_2^{(\infty)} = -\frac{1}{2}(\gamma_3^{(\infty)} + \gamma_3^{(1)} + \gamma_1^{(0)}).\end{aligned} \tag{4.8}$$

这时我们通过求解在 CG 约束下的退化情况 (D2)^{1,2,3} 和 (D1)^{1,2,3}. 这些解都是 (D3) 的解在某个 i 取特殊值加上 CG 约束得到的. 由低维情况的解，加上某些对称性，我们可唯一给出 (D3) 下的辫子矩阵元如下：

$$K_{11}=q^{-(i_4+i_1+2)}\left[\frac{\eta_1^{(0)}\eta_2^{(0)}\eta_1^{(\infty)}\eta_2^{(\infty)}}{\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)}\beta_1^{(\infty)}\beta_2^{(\infty)}}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\eta_1^{(0)})\Gamma(\eta_2^{(0)})\Gamma(-\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_2^{(\infty)})}{\Gamma(\beta_1^{(0)})\Gamma(\beta_2^{(0)})\Gamma(-\beta_1^{(\infty)})\Gamma(-\beta_2^{(\infty)})},$$

$$K_{12}=-q^{-(i_1+1)}\left[\frac{\eta_1^{(0)}\eta_3^{(3)}\eta_1^{(\infty)}\eta_2^{(\infty)}}{2\alpha_1\beta_2^{(0)}\gamma_1\beta_1^{(\infty)}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(-\eta_1^{(0)})\Gamma(\eta_3^{(0)})\Gamma(-\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_2^{(\infty)})\Gamma\left(-\frac{1}{l+2}\right)}{\Gamma(-\alpha_1)\Gamma(\beta_2^{(0)})\Gamma(-\gamma_1)\Gamma(-\beta_1^{(\infty)})\Gamma\left(-\frac{2}{l+2}\right)},$$

$$K_{13}=q^{(i_4-i_1-1)}\left[\frac{\eta_2^{(0)}\eta_3^{(0)}\eta_1^{(\infty)}\eta_2^{(\infty)}}{\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(-\eta_2^{(0)})\Gamma(-\eta_3^{(0)})\Gamma(-\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_2^{(\infty)})}{\Gamma(-\alpha_1)\Gamma(-\alpha_2)\Gamma(-\gamma_1)\Gamma(-\gamma_2)},$$

$$K_{21}=-q^{-(i_4+1)}\left[\frac{\eta_1^{(0)}\eta_2^{(0)}\eta_1^{(\infty)}\eta_3^{(\infty)}}{2\alpha_1\beta_1^{(0)}\gamma_1\beta_2^{(\infty)}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(\eta_1^{(0)})\Gamma(\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_3^{(\infty)})\Gamma\left(\frac{1}{l+2}\right)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1^{(0)})\Gamma(\gamma_1)\Gamma(-\beta_2^{(\infty)})\Gamma\left(\frac{2}{l+2}\right)},$$

$$K_{22}=\left[\frac{\sqrt{\eta_1^{(0)}\eta_3^{(0)}\eta_1^{(\infty)}\eta_3^{(\infty)}}}{\alpha_1\gamma_2\Gamma(\alpha_1)\Gamma(-\alpha_1)\Gamma(\gamma_2)\Gamma(-\gamma_2)}-\frac{\sqrt{\eta_1^{(0)}\eta_3^{(0)}\eta_1^{(\infty)}\eta_3^{(\infty)}}}{\beta_2^{(0)}\beta_2^{(\infty)}\Gamma(\beta_2^{(0)})\Gamma(-\beta_2^{(0)})\Gamma(\beta_2^{(\infty)})\Gamma(-\beta_2^{(\infty)})}\right]$$

$$\times\Gamma(-\eta_1^{(0)})\Gamma(\eta_3^{(0)})\Gamma(\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_3^{(\infty)}),\tag{4.9}$$

$$K_{23}=-q^{i_4}\left[\frac{\eta_2^{(0)}\eta_3^{(0)}\eta_1^{(\infty)}\eta_3^{(\infty)}}{2\alpha_2\beta_2^{(0)}\gamma_2\beta_1^{(\infty)}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(-\eta_2^{(0)})\Gamma(-\eta_3^{(0)})\Gamma(\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_3^{(\infty)})\Gamma\left(\frac{1}{l+2}\right)}{\Gamma(-\alpha_2)\Gamma(-\beta_2^{(0)})\Gamma(\beta_1^{(\infty)})\Gamma(-\gamma_2)\Gamma\left(\frac{2}{l+2}\right)},$$

$$K_{31}=q^{(i_1-i_4-1)}\left[\frac{\eta_1^{(0)}\eta_2^{(0)}\eta_2^{(\infty)}\eta_3^{(\infty)}}{\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\eta_1^{(0)})\Gamma(\eta_2^{(0)})\Gamma(\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_3^{(\infty)})}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)},$$

$$K_{32}=-q^{i_1}\left[\frac{\eta_1^{(0)}\eta_3^{(0)}\eta_2^{(\infty)}\eta_3^{(\infty)}}{2\alpha_2\beta_1^{(0)}\gamma_2\beta_2^{(\infty)}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(-\eta_1^{(0)})\Gamma(\eta_3^{(0)})\Gamma(\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_3^{(\infty)})\Gamma\left(-\frac{1}{l+2}\right)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(-\beta_1^{(0)})\Gamma(\gamma_2)\Gamma(\beta_2^{(\infty)})\Gamma\left(-\frac{2}{l+2}\right)},$$

$$K_{33}=q^{j_1+j_4}\left[\frac{\eta_2^{(0)}\eta_3^{(0)}\eta_2^{(\infty)}\eta_3^{(\infty)}}{\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)}\beta_1^{(\infty)}\beta_2^{(\infty)}}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(-\eta_2^{(0)})\Gamma(-\eta_3^{(0)})\Gamma(\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_3^{(\infty)})}{\Gamma(-\beta_1^{(0)})\Gamma(-\beta_2^{(0)})\Gamma(\beta_1^{(\infty)})\Gamma(\beta_2^{(\infty)})}.$$

用这种方法,我们可以推出更高 j_3 下,该模型的辫子矩阵.

前面我们只讨论了 $j_3=1$ 时的辫子矩阵,当然我们进行相似的计算和讨论还可求出该模型的聚合矩阵 F. 通过具体计算,我们验证了 K 矩阵与 F 矩阵满足的如下关系:

$$K_{p\bar{p}}[j_4|j_2j_1]=(-1)^{p+\bar{p}-j_1-j_4}q^{[C_{j_1}+C_{j_4}-C_p-C_{\bar{p}}]}F_{p\bar{p}}[j_4|j_1j_2], \tag{4.10}$$

式中 $C_j=j(j+1)$.

五、$SU(2)$WZW 模型与 $SL(2,q)$ 量子群的关系

$SL(2,q)$ 量子群的辫子矩阵有如下的形式:

$$C_{p\bar{p}}\begin{bmatrix} j_3 & j_2 \\ j_4 & j_1\end{bmatrix}=(-1)^{p+\bar{p}-j_1-j_4}q^{[C_{j_1}+C_{j_4}-C_p-C_{\bar{p}}]}\begin{pmatrix} j_3 & j_4 & p \\ j_2 & j_1 & \bar{p}\end{pmatrix}_q. \tag{5.1}$$

(5.1)式右边最后一个因子为量子 $6j$ 系数[6,7]. 在文献[3]中, L. Alvarez-Gaume 等指出 $SU(2)_l$ WZW 模型中的 $K\left(j\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ j\right)$ 与 $SL(2,q)$ 中的辫子矩阵 $C\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ j & j\end{bmatrix}$ 相差相似变换. 但是我们发现,在一般情况下 $K[j_4j_3j_2j_1]$ 与 $C\begin{bmatrix} j_3 & j_2 \\ j_4 & j_1\end{bmatrix}$ 并不相差相似变换,而是相差以对角矩阵变换. 就[5]中给出的 $K\left(j_4\ \frac{1}{2}\ j_2\ j_1\right)$ 的结果,我们就可推出:

$$K\left(j_4\ \frac{1}{2}\ j_2\ j_1\right)=(-1)^{2(j_1+j_2-j_4+\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}\gamma_+^{-1} & \\ & \gamma_-^{-1}\end{pmatrix}C^T\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & j_2 \\ j_4 & j_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta_+ & \\ & \beta_-\end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

这里:

$$\gamma_\pm=\Gamma\left(\pm\frac{2j_1+1}{l+2}\right)\sqrt{\frac{\Gamma\left(\pm\dfrac{-j_1+j_2+j_4+\frac{1}{2}}{l+2}\right)}{\Gamma\left(\pm\dfrac{j_1+j_2+j_4+\frac{3}{2}}{l+2}\right)\Gamma\left(\pm\dfrac{j_1-j_2+j_4+\frac{1}{2}}{l+2}\right)\Gamma\left(\pm\dfrac{j_1+j_2-j_4+\frac{1}{2}}{l+2}\right)}},$$

$$\beta_+ = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2j_4+1}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{2j_1+1}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{2j_1+1}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{-j_1+j_2+j_4+\frac{1}{2}}{l+2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{2j_4+1}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{j_1+j_2+j_4+\frac{3}{2}}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{j_1-j_2+j_4+\frac{1}{2}}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{j_1+j_2-j_4+\frac{1}{2}}{l+2}\right)}}, \tag{5.3}$$

$$\beta_- = \sqrt{\frac{\Gamma\left(-\frac{2j_4+1}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{2j_1+1}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{2j_1+1}{l+2}\right)\Gamma\left(+\frac{-j_1+j_2+j_4+\frac{1}{2}}{l+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2j_4+1}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{j_1+j_2+j_4+\frac{3}{2}}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{j_1-j_2+j_4+\frac{1}{2}}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{j_1+j_2-j_4+\frac{1}{2}}{l+2}\right)}}.$$

显然(5.2)式不是相似变换. 但当 $j_1=j_4$ 时 $\gamma_\pm=\beta_\pm$ (5.2) 式就退化为相似变换. 对 $j_3=1$ 的情况,我们发现也有类似的关系:

$$K(j_4|j_2j_1)=(-1)^{2(j_1+j_2-j_4+1)}\begin{pmatrix}\alpha_+^{-1} & & \\ & \alpha_0^{-1} & \\ & & \alpha_-^{-1}\end{pmatrix} C^\Gamma\begin{bmatrix}1 & j_2\\ j_4 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta_+ & & \\ & \beta_0 & \\ & & \beta_-\end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

式中:

$$\alpha_\pm=\Gamma(\pm\eta_2^{(\infty)})\sqrt{\frac{\Gamma(\pm\eta_1^{(\infty)})\Gamma(\pm\eta_3^{(\infty)})\Gamma(\pm\beta_1^{(0)})\Gamma(\pm\beta_2^{(0)})}{\Gamma(\pm\alpha_1)\Gamma(\pm\alpha_2)\Gamma(\pm\gamma_1)\Gamma(\pm\gamma_2)\Gamma(\pm\beta_1^{(\infty)})\Gamma(\pm\beta_2^{(\infty)})}}$$

$$\alpha_0=\frac{\Gamma(-\eta_1^{(\infty)})\Gamma(\eta_3^{(\infty)})}{\Gamma(\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_3^{(\infty)})}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\Gamma(\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_2^{(\infty)})\Gamma(-\eta_3^{(\infty)})\Gamma(\beta_1^{(0)})\Gamma(-\beta_2^{(0)})\Gamma\left(\frac{-1}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{l+2}\right)}{\Gamma(-\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(-\gamma_1)\,\Gamma(\gamma_2)\Gamma(-\beta_1^{(\infty)})\Gamma(\beta_2^{(\infty)})\Gamma\left(\frac{1}{l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{l+2}\right)}},$$

$$\beta_+=\left[\frac{\Gamma(-\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_3^{(\infty)})\Gamma(\eta_1^{(0)})\Gamma(\eta_2^{(0)})\Gamma(-\beta_1^{(0)})\Gamma(-\beta_2^{(0)})}{\Gamma(-\eta_1^{(0)})\Gamma(-\eta_2^{(0)})\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)\Gamma(-\beta_1^{(\infty)})\Gamma(-\beta_2^{(\infty)})}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_0=\left[\frac{\Gamma(-\eta_1^{(0)})\Gamma(\eta_3^{(0)})\Gamma(-\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_3^{(\infty)})\Gamma(\beta_1^{(0)})\Gamma(-\beta_2^{(0)})\cdot\Gamma\left(-\frac{1}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{l+2}\right)}{\Gamma(\eta_1^{(0)})\Gamma(-\eta_3^{(0)})\Gamma(-\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(-\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)\Gamma(-\beta_1^{(\infty)})\Gamma(\beta_2^{(\infty)})\cdot\Gamma\left(\frac{1}{l+2}\right)\Gamma\left(\frac{-2}{l+2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

表 $SU(2)_l$WZW 模型在 lCG 条件约束下 V_0 空间维数下降表 $(\min(j_4,j_3,j_2,j_1)=j_3)$

CG 约束 / l 约束	$j_1-j_2\leqslant j_4-j_3$ $j_1+j_2\geqslant j_3+j_4$	$j_1=j_2+j_4-j_3+1$	$j_1=j_2+j_4-j_3+2$	…	$j_1=j_2+j_3+j_4-m+1$	…	…	$j_1=j_2+j_3+j_4-1$	$j_1=j_2+j_3+j_4$
$l\geqslant j_1+j_2+j_3+j_4$	$D(2j_3+1)$	$D(2j_3)$	$D(2j_3-1)$	…	$D(m)$	…	…	$D(2)$	$D(1)$
$l=j_1+j_2+j_3+j_4-1$	$D_{2j_3}(2j_3+1)$	$D_{2j_3-1}(2j_3)$	$D_{2j_3-2}(2j_3-1)$	…	$D_{m-1}(m)$	…	…	$D_1(2)$	$\varnothing$
$l=j_1+j_2+j_3+j_4-2$	$D_{2j_3-1}(2j_3+1)$	$D_{2j_3-2}(2j_3)$	$D_{2j_3-3}(2j_3-1)$	…	$D_{m-2}(m)$	…	…	$\varnothing$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
$l=j_1+j_2+j_3+j_4-n$	$D_{2j_3+1-n}(2j_3+1)$	$D_{2j_3-n}(2j_3)$	$D_{2j_3-n-1}(2j_3-1)$	…	$D_{m-n}(m)$	…			
…	…	…	…	…	…	…			
$l=j_1+j_2+j_3+j_4-m+1$	$D_{2j_3+1-m+1}(2j_3+1)$	$D_{2j_3-m+1}(2j_3)$	$D_{2j_3-m}(2j_3-1)$	…	$D_1(m)$	$\varnothing$			
…	…	…	…	…	$\varnothing$				
$l=j_1+j_2+j_4-j_3+1$	$D_2(2j_3+1)$	$D_1(2j_3)$	$\varnothing$	$\varnothing$					
$l=j_1+j_2+j_4-j_3$	$D_1(2j_3+1)$	$\varnothing$							
$l\leqslant j_1+j_2+j_4-j_3-1$	$\varnothing$								

注意：讨论 CG 约束本应有三种情况如：$j_1=j_2+j_4+j_3-m+1$，或 $j_2=j_1+j_4+j_3-m+1$ 或 $j_4=j_1+j_2+j_3-m+1$，在 CG 约束下都可使 $D(2j_3+1)$ 降为 $D(m)$。本图只讨论了第一种情况，其它两种情况与第一种情况相似。

$$\beta_- = \left[\frac{\Gamma(-\eta_2^{(0)})\Gamma(-\eta_3^{(0)})\Gamma(-\eta_1^{(\infty)})\Gamma(-\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_2^{(\infty)})\Gamma(\eta_3^{(\infty)})\Gamma(\beta_1^{(0)})\Gamma(\beta_2^{(0)})}{\Gamma(\eta_2^{(0)})\Gamma(\eta_3^{(0)})\Gamma(-\alpha_1)\Gamma(-\alpha_2)\Gamma(-\gamma_1)\Gamma(-\gamma_2)\Gamma(\beta_1^{(\infty)})\Gamma(\beta_2^{(\infty)})}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.5}$$

然而当 $j_1 = j_4$ 时，$\alpha_\pm = \beta_\pm$，$\alpha_0 = \beta_0$，(5.4)式就变成相似变换.

我们发现对任意的 $(j_4j_3j_2j_1)$，$SU(2)$WZW 的辫子矩阵元 $K(j_4j_3j_2j_1)$ 与 $SL(2, q)$ 的辫子矩阵元相差一些 Γ 函数因子，这些 Γ 函数因子与 $SU(2)$WZW 模型的结构常数有关[8]. 一般情况下我们有

$$K[j_4j_3j_2j_1] = (-1)^{2(j_1+j_2+j_3-j_4)}\begin{pmatrix} u_1^{-1} & & & \\ & u_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n^{-1}\end{pmatrix} C^\Gamma\begin{bmatrix} j_3 & j_2 \\ j_4 & j_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & & & \\ & v_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_n\end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

这里 $n = 2\min(j_4j_3j_2j_1) + 1$. 当 $j_1 = j_4$ 时二者相差相似变换. 如果把满足(2.2)式的关联函数(其实是共形块)不归一化为 1，而归一化为结构常数，则由此共形块定义的 K 矩阵将不包含与结构常数有关的 Γ 函数因子. 这时 $SU(2)$WZW 模型的辫子矩阵 K 将与 $SL(2, q)$ 的量子群的 C 矩阵完全相同. 这时 K 矩阵将满足 Yang-Baxter 方程.

参 考 文 献

[1] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, *Phys. Lett.*, **B**152(1985), 88; *Commun. Math. Phys.*, 103(1986), 105.

[2] D. Gepner and Z. Qiu, *Nucl. Phys.*, **B**285(1987), 423; D. Nemeschansky, *Phys. Lett.*, **B**244(1989), 121.

[3] L. Alvarez Gaume, C. Gomes and G. Sierra, CERN-TH 5126/88, 5267/88.

[4] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B**247(1984), 83.

[5] A. Tsuchiya and Y. Kanie, in Coformal Field Theory and Solvable Lattice Models, Advanced Studies in Pure Mathematics, 16(1988), 297.

[6] B. Y. Hou, B. Y. Hou and Z. Q. Ma, NWU-IMP-89-11, NWU-IMP-89-12.

[7] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshestikhin, LOMI-Preprint-E-4-87, LOMI-Preprint-E-9-88.

[8] P. Di Francesco, PhT-88 139.

FUNDAMENTAL PROBLEMS OF $SU(2)_l$ WZW MODELS

Hou Boyu Li Kang Wang Pei

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian)

Abstract

In this paper, we give a solution to fundamental problems of Wess-Zumino-Witten model for the case $j_3=1$ and the method of solving the fundamental problems for the general case. We find also the explicit connection between the crossing matrix of $SU(2)_1$ WZW model and the braid matrix of $SL(2, q)$ quantum group, the latter is just the quantum Racah coefficient.