Liouville 理论的闭链条件及其在二维诱导引力中的应用（II）*

王仲华　吴　可　郭汉英
（CCAST，中国科学院理论物理研究所，北京 100080）

摘　　要

本文继续（I）中讨论，运用 Liouville 理论的闭链条件导出 Beltrami-Liouville 理论，即在任意度量下的引力理论的复合公式，并由此导出了相应的 Ward 恒等式以及 Beltrami-Liouville 理论的能量动量张量，即推广的 Schwartz 导数。

本文作为文献[1]的续篇，进一步讨论有关 Liouville 理论的上同调分析和二维诱导引力理论的关系，此时，二维引力是定义在任意二维度量中，没有取定任何规范，在二维空间中一般的度量可以取 Beltrami 参数定义。这时的 Liouville 理论，作为 Beltrami-Liouville 理论，其中一部分是和二维诱导引力等效的，称为 Beltrami-Liouville 引力理论。

在文[1]中，我们已经讨论了 Liouville 理论的闭链条件，如果把这些链写成一个复形，便是

$$\Lambda^{(0)} \xrightarrow{\Delta} \Lambda^{(1)} \xrightarrow{\Delta} \Lambda^{(2)} \rightarrow \cdots\cdots. \tag{1}$$

到目前为止，我们的讨论还仅限最初的几个链，如 $\Lambda^{(0)}$, $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ 等。虽然用同一个上同调算子 Δ，和相同的复形记号，但对于具体不同的 Liouville 理论，都有着不同的内容。文献[1]中我们讨论了二种情况。

第一种情况所讨论的 Liouville 作用量，它们定义在具有相同复结构的二维度量上，度量之间的区别在于它们具有不同的 Weyl 因子，这种上同调分析反映了 Weyl 变换的性质。主要结果由文献[1]中(8)式和(13)式给出。用文献[1]中记号，$S_L(\varphi, g)$ 是以 φ 为 Liouville 模，g 为背景度量的 Liouville 作用量，并且设 $S_L(\varphi)$ 为 $S_L(\varphi, g)$ 以及 $S_W(\varphi, \varphi_0)$ 为 $S_L(\varphi_1 - \varphi_0, e^{\varphi_0}g)$，那么由文献[1]中的结论知：

$$\begin{aligned} &S_L(\varphi) \in \Lambda^{(0)}, \\ &S_W(\varphi_1, \varphi_0) \in \Lambda^{(1)}, \\ &(\Delta S_L)(\varphi_1, \varphi_0) = S_W(\varphi_1, \varphi_0), \\ &(\Delta S_W)(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

本文 1990 年 9 月 26 日收到。
* 国家自然科学基金资助。

第二种情况所讨论的 Liouville 作用量，它们可以定义在具有不同复结构的二维度量上，也就是说不同的度量可以是共取变换不等价的. 因此，这种上同调分析反映了二维 Riemann 面的模空间的性质，其主要结论由文献[1]中(29)式和(35)式给出，为了体现模空间的性质，我们用 Beltrami 微分的系数来标记 Liouville 作用量.

$$S^{(0)}(\mu_z^f)=S_L\left(\ln\frac{e^\varphi}{\partial f\bar{\partial}\bar{f}},\ df d\bar{f}\right),$$

$$S^{(1)}(\mu_z^f,\ \mu_g^f)=S_L\left(\varphi(f_{;g,z}),\ \frac{e^\varphi}{\partial_g f\bar{\partial}_g\bar{f}}df d\bar{f}\right), \tag{3}$$

那末我们有

$$\left.\begin{aligned}&S^{(0)}(\mu_z^f)\in\Lambda^{(0)},\\&S(\mu_z^f,\ \mu_g^f)\in\Lambda^{(1)},\\&(\Delta S^{(0)})(\mu_z^f,\ \mu_g^f)=S^{(1)}(\mu_z^f,\ \mu_g^f),\\&(\Delta S^{(1)})(\mu_z^f,\ \mu_g^f,\ \mu_h^f)=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

此时，我们也可以把 Liouville 复形称为 Beltrami-Liouville 复形.

现在，我们开始讨论在任意度量下与二维诱导引力等效的 Beltrami-Liouville 理论，即 Beltrami-Liouville 引力. 也就是说要把文献[1]中讨论的 Beltrami-Liouville 复形中的等式运用到 Beltrami-Liouville 引力. 在文献[1]中，我们已经提到了，此时，Beltrami-Liouville 引力作用量可以表示成

$$S_{引力}(f,z)=\int dz\wedge d\bar{z}\left\{\frac{1}{1-\mu_z^f\bar{\mu}_z^f}(\partial_z-\bar{\mu}_z^f\partial_{\bar{z}})\ln\frac{e^\varphi}{\partial f\bar{\partial}\bar{f}}\right.$$

$$\left.\cdot(\partial_{\bar{z}}-\mu_z^f\partial_z)\ln\frac{e^\varphi}{\partial f\cdot\bar{\partial}\bar{f}}+\Lambda(1-\mu_z^f\mu_{\bar{z}}^f)(e^\varphi-\partial f\bar{\partial}\bar{f})\right\}, \tag{5}$$

也可以写成

$$S_{引力}(f,\ z)=S^{(0)}(\mu_z^f), \tag{6}$$

并且证明了它满足.

$$S_{引力}(f,z)-S_{引力}(f,g)=S^{(1)}(\mu_z^f,\ \mu_g^f), \tag{7}$$

即满足 Beltrami-Liouville 理论的 1 上边缘定义，它并不是 Beltrami-Liouville 引力作用量所满足的复合公式，原因在于(7)式右端已经不是 Beltrami-Liouville 引力作用量了.

为此，我们要从 $S^{(1)}(\mu_z^f,\mu_g^f)$ 中抽出一个 Beltrami-Liouville 引力作用量 $S_{引力}(g,z)$，经过烦琐但直接的计算可知:

$$\begin{aligned}&S^{(1)}(\mu_z^f,\ \mu_g^f)\\&=S_L\left(\phi(f;g,\ z),\ \frac{e^\varphi}{\partial_g f\partial_{\bar{g}}\bar{f}}df d\bar{f}\right)\\&=S_{引力}(g,\ z)+S^{(2)}(f,\ g,\ z),\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$S_{引力}(g,\ z)=\int dz\wedge d\bar{z}\left\{\frac{1}{1-\mu_z^g\bar{\mu}_z^g}(\partial_z-\bar{\mu}_z^g\partial_{\bar{z}})\ln\frac{e^\varphi}{\partial g\bar{\partial}\bar{g}}\right.$$

$$\cdot\,(\partial_{\bar z}-\mu_z^g\partial_z)\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial g\bar\partial\bar g}$$
$$+\,\Lambda(1-\mu_z^g\bar\mu_z^g)(e^{\varphi}-\partial g\bar\partial\bar g)\Big\},\tag{9}$$

以及

$$\begin{aligned}
&S^{(2)}(f,g,z)\\
&=\int dz\wedge d\bar z\Big\{\frac{1}{1-\mu_z^f\bar\mu_z^f}\Big[(\partial_z-\bar\mu_z^f\partial_{\bar z})\ln\frac{|1-\mu_z^f\bar\mu_z^g|^2}{(1-\mu_z^g\bar\mu_z^g)^2}\\
&\cdot(\partial_{\bar z}-\mu_z^f\partial_z)\ln\frac{|1-\mu_z^f\bar\mu_z^g|^2}{(1-\mu_z^g\bar\mu_z^g)^2}\\
&-2(\partial_z-\bar\mu_z^f\partial_{\bar z})\ln\frac{|1-\mu_z^f\bar\mu_z^g|^2}{(1-\mu_z^g\bar\mu_z^g)^2}(\partial_{\bar z}-\mu_z^f\partial_z)\ln\partial g\bar\partial\bar g\Big]\\
&-2\ln\phi(f,g,z)(\partial_z-\partial_{\bar z}\bar\mu_z^f-\bar\mu_z^f\partial_{\bar z})\Big[\frac{1}{1-\mu_z^f\bar\mu_z^f}(\partial_{\bar z}-\mu_z^f\partial_z)\\
&\cdot\ln\frac{e^{\phi}}{\partial_g f\partial_{\bar g}\bar f}\Big]\Big\}+\int dg\wedge d\bar g\Big\{(-\partial_g\varphi\partial_{\bar g}\varphi+2\partial_g\ln(\partial g\bar\partial\bar g)\partial_{\bar g}\varphi)\\
&+\frac{1}{1-\mu_g^f\bar\mu_g^f}[2\mu_g^f\bar\mu_g^f\partial_g\ln\partial g\bar\partial\bar g\partial_{\bar g}\ln\partial g\bar\partial\bar g\\
&-\mu_g^f(\partial_g\ln\partial g\bar\partial\bar g)^2-\bar\mu_g^f(\partial_{\bar g}\ln\partial g\bar\partial\bar g)^2]\\
&+\Lambda(1-\mu_g^f\bar\mu_g^f)e^{\varphi}(e^{\varphi(f,g,z)}-1)-\Lambda\left(\frac{e^{\varphi}}{\partial g\bar\partial\bar g}-1\right)\Big\}.
\end{aligned}\tag{10}$$

于是，我们得到本文的主要结果之一，即 Beltrami-Liouville 引力作用量的复合公式，当$(f,\bar f)$,经过 $(g,\bar g)$ 复合后作为 $(z,\bar z)$ 的函数,即 $f(g(z,\bar z),\bar g(z,\bar z))$，$\bar f(g(z,\bar z),\bar g(z,\bar z))$时,复合公式写为:

$$S_{引力}(f,z)=S_{引力}(f,g)+S_{引力}(g,z)+S^{(2)}(f,g,z),\tag{11}$$

或者记成

$$(\Delta S_{引力})(f,g,z)=-S^{(2)}(f,g,z).\tag{12}$$

此式和

$$(\Delta S^{(0)})(\mu_z^f,\mu_g^f)=S^{(1)}(\mu_z^f,\mu_g^f).\tag{13}$$

是同样的公式,但反映的上同调性质却完全不一样,一个是 Beltrami-Liouville 理论的 1 上边缘表达式,另一个是 Beltrami-Liouville 引力的 2 上边缘表达式. 自然,这个 2 上边缘满足闭链条件:

$$\begin{aligned}
&(\Delta S)^{(2)}(f,g,h,z)\\
&=S^{(2)}(f,g,h)-S^{(2)}(f,g,z)+S^{(2)}(f,h,z)-S^{(2)}(g,h,z)\\
&=0.
\end{aligned}\tag{14}$$

由于 $S^{(2)}(f,g,z)$ 的表达式很烦琐,我们就不再写出其具体表达式了. 同样关于 $S^{(2)}(f,g,z)$的拓扑含义以及有关应用,我们将另文给出讨论.

接着我们讨论 Beltrami-Liouville 引力的关联函数,和光锥规范下的引力理论相比,除了已有的 μ 场以外,还有 $\bar\mu$ 场和 φ 场,一般来讲可以给出这三种场的关联函数.

$$\langle\mu(z_{P_1})\cdots\mu(z_{P_m})\bar\mu(z_{Q_1})\cdots\mu(z_{Q_n})\varphi(z_{R_1})\cdots\varphi(z_{R_l})\rangle$$

它应该不依赖于坐标系的具体选取，即在任意坐标变换下是不变的，即：

$$\delta\langle \mu(z_{p_1})\cdots\mu(z_{p_m})\cdot\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_n})\varphi(z_{R_1})\cdots\varphi(z_{R_l})\rangle = 0. \tag{15}$$

也就是说：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\langle \mu(z_{p_1})\cdots\delta\mu(z_{p_i})\cdots\mu(z_{p_m})\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_n})\varphi(z_{R_1})\cdots\varphi(z_{R_l})\rangle \\
&+\sum_{j=1}^{n}\langle \mu(z_{p_1})\cdots\mu(z_{p_m})\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\delta\bar{\mu}(z_{Q_j})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_n})\varphi(z_{R_1})\cdots\varphi(z_{R_l})\rangle \\
&+\sum_{k=1}^{l}\langle \mu(z_{p_1})\cdots\mu(z_{p_m})\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_n})\varphi(z_{R_1})\cdots\delta\varphi(z_{R_k})\cdots\varphi(z_{R_l})\rangle \\
&-\frac{c}{48\pi}\langle \mu(z_{p_1})\cdots\mu(z_{p_m})\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_n})\varphi(z_{R_1})\cdots\varphi(z_{R_l})\delta S\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

此即 Ward 恒等式，为得到具体的表达式，我们要给出 $\delta\mu$，$\delta\bar{\mu}$，$\delta\varphi$ 以及 δS，也就是由坐标变换所诱导的 $\mu,\bar{\mu},\varphi,S$ 的变化量。

在文献[2]中，我们已经得到了在无穷小的任意坐标变换

$$\begin{aligned} z &\to z+\varepsilon(z,\bar{z}), \\ \bar{z} &\to \bar{z}+\bar{\varepsilon}(z,\bar{z}) \end{aligned} \tag{17}$$

下

$$\begin{aligned}
\delta\mu &= (\bar{\partial}-\mu\partial+(\partial\mu))(\varepsilon+\mu\bar{\varepsilon}), \\
\delta\bar{\mu} &= (\partial-\bar{\mu}\bar{\partial}+(\bar{\partial}\bar{\mu}))(\bar{\varepsilon}+\bar{\mu}\varepsilon), \\
\delta\varphi &= \partial\varepsilon+\bar{\partial}\bar{\varepsilon}+\mu\partial\bar{\varepsilon}+\bar{\mu}\bar{\partial}\varepsilon+\varepsilon\partial\varphi+\bar{\varepsilon}\bar{\partial}\varphi.
\end{aligned} \tag{18}$$

剩下的问题就是要确定 δS。

我们知道引力作用量 $S_{引力}(f,z)$，其表达式由(5)给出，是在坐标系 $(z,\bar{z})$ 中 $f,\bar{f}$ 和 φ 的作用量。对 $(z,\bar{z})$ 作一任意变换 $(z,\bar{z})\to(g,\bar{g})$，引力作用量就变成 $S_{引力}(f,g)$，其改变量

$$\Delta S = S_{引力}(f,g)-S_{引力}(f,z), \tag{19}$$

可由(7)式得到

$$\begin{aligned}
\Delta S &= -S_L\left(\varphi(f,g,z),\ \frac{e^{\varphi}}{\partial_g f\overline{\partial_{\bar{g}} f}}\,df\,d\bar{f}\right) \\
&= -\int d^2z\sqrt{\hat{g}}\left(\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\varphi(f,g,z)\partial_b\varphi(f,g,z)+\hat{R}\varphi(f,g,z)\right. \\
&\quad\left.+\Lambda(e^{\varphi(f,g,z)}-1)\right),
\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\hat{g}$ 是由 $dS^2=\dfrac{e^{\varphi}}{\partial_g f\partial_{\bar{g}}\bar{f}}\,df\,d\bar{f}$ 给出。这里我们用最初的 Liouville 作用量的表达式是为了求它的无穷小形式，也就是说当

$$g(z,\bar{z})=z+\varepsilon(z,\bar{z}),\quad \bar{g}(z,\bar{z})=\bar{z}+\bar{\varepsilon}(z,\bar{z}) \tag{21}$$

时，作用量的改变量，其一阶小量记为 δS。当我们把(21)式代入

$$\varphi(f,g,z)=\ln\frac{(\partial-\bar{\mu}_z^{f}\bar{\partial})g\cdot(\bar{\partial}-\mu_z^{f}\partial)\bar{g}}{(\partial g\bar{\partial}\bar{g}-\partial\bar{g}\bar{\partial}g)^2}. \tag{22}$$

得到 $\varphi(f, z+\varepsilon, \bar{z})$ 的一阶无穷小量

$$\varphi(f, z+\varepsilon, \bar{z}) = \varphi(f, z, \bar{z}) - [(\partial + \bar{\mu}\bar{\partial})\varepsilon + (\bar{\partial} + \mu\partial)\bar{\varepsilon}], \tag{23}$$

代入(20)式得到

$$\delta S = -\int d^2z[\varepsilon(\partial + \bar{\partial}\bar{\mu})(\sqrt{g}\ R + \sqrt{g}\,\Lambda) + \bar{\varepsilon}(\bar{\partial} + \partial\mu)(\sqrt{g}\ R + \sqrt{g}\,\Lambda)]. \tag{24}$$

把(18)式和(24)式代入(16)式就得到了具体的 Ward 恒等式，为了简单起见，我们不妨取 $\bar{\varepsilon}=0$，只写对由 ε 变换而引起的 Ward 恒等式，即：

$$\begin{aligned}
&-\frac{c}{48\pi}\Big[\partial_z\langle\sqrt{g}(R+\Lambda)\mu(z_{p1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\varphi(z_{R_1})\cdots\rangle \\
&+\partial_{\bar{z}}\langle\sqrt{g}(R+\Lambda)\bar{\mu}(z)\mu(z_{p1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\varphi(z_{R_1})\cdots\rangle \\
=&\sum_{i=1}^{m}\partial_{\bar{z}}\delta(z-z_{p_i})\langle\mu(z_{p1})\cdots\mu(z_{p_i})\cdots\widehat{\bar{\mu}(z_{Q_1})}\cdots\varphi(z_{R_1})\cdots\rangle \\
&+\sum_{i=1}^{m}[\partial_z\delta(z-z_{pi})-\delta(z-z_{p_i})\partial_{z_{p_i}}]\langle\mu(z_{p1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\varphi(z_{R_1})\rangle \\
&+\sum_{j=1}^{n}\partial_z\delta(z-z_{Q_i})\langle\bar{\mu}(z)\mu(z_{p1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\widehat{\mu(z_{Q_j})}\cdots\varphi(z_{R_1})\cdots\rangle \\
&-\sum_{j=1}^{n}\partial_{\bar{z}}\delta(z-z_{Q_j})\langle\mu(z_{p1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\bar{\mu}^2(z_{Q_j})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_n})\varphi(z_{R_1})\cdots\rangle \\
&+\sum_{k=1}^{l}\partial_z\delta(z-z_{R_k})\langle\mu(z_{p1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\varphi(z_{R_1})\cdots\widehat{\varphi(z_{R_l})}\cdots\cdots\rangle \\
&+\sum_{k=1}^{l}\delta(z-z_{R_k})\partial_{\bar{z}R_k}\langle\mu_{zp_1}\cdots\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\varphi(z_{R_1})\cdots\bar{\mu}(z_{R_k})\cdots\varphi(z_{R_l})\rangle \\
&+\sum_{k=1}^{l}\partial_z\delta(z-z_{R_k})\langle\mu(z_{p1})\cdots\bar{\mu}(z_{Q_1})\cdots\varphi(z_{R_1})\cdots\rangle.
\end{aligned} \tag{25}$$

若二边取复共轭，则得到对 $\bar{\varepsilon}$ 的 Ward 恒等式，如果在(25)式中仅考虑 μ 场的关联函数，也即当 $n=0$, $l=0$ 时，就回到了 Polyakov[3] 给出的 Ward 恒等式。值得注意的是，这里讨论的关联函数和 Distler-Kawai[4] 提出的二维诱导引力在共形规范下的关联函数之间的关系还不清楚，此问题留待今后作进一步的讨论。

下面，我们开始讨论有关能量动量张量的问题。在二维共形场论中，能量动量张量的变换性质不再是张量了：

$$T_{zz}(W) = \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 T_{\xi\xi}(W) + \frac{c}{12}\{\xi, z\} \tag{26}$$

破坏张量性质的项是 Schwartz 导数，它和二维场论中的迹反常有密切关系。关于这一点，我们从二维诱导引力理论出发进一步加深理解。

在光锥规范中，我们取的度量为

$$dS^2 = (dz + \mu d\bar{z})d\bar{z}. \tag{27}$$

Polyakov 为了得到光锥规范下的诱导引力的显式表达式，他引入了一个 Beltrami 型的场 f,满足

$$(\bar{\partial} - \mu\partial)f = 0, \tag{28}$$

自然也可以写成

$$\mu = \frac{\bar{\partial} f}{\partial f}, \tag{29}$$

对 μ 求三阶导数可得

$$\partial^3\mu = (\bar{\partial} - \mu\partial - 2(\partial\mu))\{f, z\}, \tag{30}$$

其中左边正比于相应规范(27)式下的标量曲率的一阶微商 $\frac{1}{4}\partial R$，于是，我们得到了曲率和 Schwartz 导数之间的关系

$$\frac{1}{4}\partial R = (\bar{\partial} - \mu\partial - 2(\partial\mu))\{f, z\}. \tag{31}$$

到此，人们自然会问：在 Beltrami-Liouville 引力理论中的曲率和 Schwartz 导数还有没有什么联系？为了解决此问题，首先要知道此式的 Schwartz 导数应该是什么样的？即如何推导 Schwartz 导数.

为此，先回忆一下在文献[1]中我们推导 Polyakov 的二维光锥规范诱导引力作用量的复合式：

$$(\Delta S_p)(f, g, z) = 2\int dz\Lambda d\bar{z}\,\frac{\mu_g^f}{\partial g}\{g, z\}$$

时所得到的公式即(44)式，其中 g 的 Schwartz 导数写成：

$$\{g, z\} = (\partial g)^2\left(\partial_g^2 \ln\partial g + \frac{1}{2}(\partial_g \ln\partial g)^2\right). \tag{32}$$

而右端第二个括号中的项和二维共形的极小模型的能量动量张量

$$T = \partial_z\varphi\partial_z\varphi - \alpha_0\partial_z^2\varphi \tag{33}$$

形式完全一致。其实 $\frac{1}{2}(\partial_g\ln\partial g)^2 + \partial_g^2\ln\partial g$ 就是二维光锥引力理论的能量动量张量.因此，能量动量张量和 Schwartz 导数仅差一个因子 $(\partial g)^2$.

$$T_{\text{引力}} = \frac{1}{(\partial g)^2}\{g, z\}. \tag{4ε}$$

现在，我们把上述思想应用到 Beltrami-Liouville 引力理论，为了讨论简单起见，取此时的宇宙常数 $\Lambda = 0$，那么 Beltrami-Liouville 引力作用量可以在如下任意度量

$$dS^2 = e^{\varphi}|dz + \mu d\bar{z}|^2 = \frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar{\partial}\bar{f}}\,df d\bar{f}. \tag{35}$$

下给出：

$$S_{\text{引力}}(f, z) = \int dz\Lambda d\bar{z}\left\{\frac{1}{1 - \mu_z^f\bar{\mu}_z^f}(\partial_z - \bar{\mu}_z^f\partial_{\bar{z}})\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar{\partial}\bar{f}}\right.$$
$$\left.\cdot(\partial_{\bar{z}} - \mu_z^f\partial_z)\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar{\partial}\bar{f}}\right\}. \tag{36}$$

若我们记

$$A=\frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar{\partial}\bar{f}}, \tag{37}$$

那末，类似于(31)式的 Beltrami 度量下的引力理论的守恒方程变成：

$$-\frac{1}{4A}\partial_{\bar f}R=(\partial_{\bar f}+2\partial_{\bar f}\ln A)\left[\frac{1}{A^2}\left(\partial_f^2\ln A-\frac{1}{2}(\partial_f\ln A)^2\right)\right], \tag{38}$$

其中 ∂_f, $\partial_{\bar f}$ 在 $(z,\bar z)$ 坐标中表示成：

$$\partial_f=\frac{\partial-\bar\mu\bar\partial}{\partial f(1-\mu\bar\mu)},\quad \partial_{\bar f}=\frac{\bar\partial-\mu\partial}{\bar\partial\bar f(1-\mu\bar\mu)}. \tag{39}$$

显然，我们可以取：

$$T=\frac{1}{A^2}\left(\partial_f^2\ln A-\frac{1}{2}(\partial_f\ln A)^2\right) \tag{40}$$

作为 Schwartz 导数的推广。如果我们取：

$$A=\frac{1}{\partial f},\quad \partial_f=\frac{1}{\partial f}\partial_z,$$

那么，(40)就回到通常定义的 Schwartz 导数。

此时，相应于 Schwartz 导数的复合公式的推广可以利用文献[1]中的(29)式：

$$S_L\left(\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar\partial\bar f},\ df d\bar f\right)=S_L\left(\varphi(f;g,z),\frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar\partial\bar f}df d\bar f\right)$$
$$+S_L\left(\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar\partial\bar f},\ df d\bar f\right), \tag{41}$$

求各项相应的守恒方程中的能量动量张量得到，对应于(41)式，我们记

$$T(f,z)=\left(\frac{\partial f\bar\partial\bar f}{e^{\varphi}}\right)^2\left(\partial_f^2\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar\partial\bar f}-\frac{1}{2}\left(\partial_f\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar\partial\bar f}\right)^2\right),$$

经过一些烦琐的计算得到：

$$T(f,z)=\tilde T(g,z)+e^{-2\varphi(f,g,z)}T(f,g), \tag{42}$$

其中 $T(f,z)$, $T(f,g)$ 是相应于 $S_L\left(\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\bar\partial\bar f},df d\bar f\right)$ 和 $S_L\left(\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial_g f\partial_{\bar g}\bar f},\ df d\bar f\right)$ 的推广的 Schwartz 导数，而 $\tilde T(g,z)$ 的形式与 $T(f,z)$ 不同，它写成：

$$\tilde T(g,z)=e^{-2\varphi}e^{-2\varphi(f,g,z)}\left[\partial_f^2\varphi(f;g,z)-\frac{1}{2}(\partial_f\varphi(f;g,z))^2\right.$$
$$\left.-\partial_f\varphi(f;g,z)\partial_f\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial_g f\partial_{\bar g}\bar f}\right], \tag{43}$$

它是以 $\varphi(f;g,z)$ 为 Liouville模，以 $\frac{e^{\varphi}}{\partial_g f\partial_{\bar g}\bar f}df d\bar f$ 为背景度量下的 Beltrami-Liouville 理论的能量动量张量。 因为其作用量形式和 Beltrami-Liouville 引力的作用量略有区别。

进一步的研究发现，我们仍可以用协变导数的语言，把它们写成一致的形式。由于

Beltrami-Liouville 引力作用量是在平度量 $\mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}$ 中写的，因此，将全部导数改成协变导数后，表达式是一致的，即我们可重新定义推广的 Schwarz 导数为：

$$T(f,z)=\frac{1}{A^2}\left(\nabla_f^2\ln A+\frac{1}{2}(\nabla_f\ln A)^2\right), \tag{44}$$

则(43)可以写成

$$\widetilde{T}(g,z)=e^{-2\varphi(f,g,z)}(\nabla_f^2\varphi(f;g,z)-\frac{1}{2}(\nabla_f\varphi(f;g,z))^2) \tag{45}$$

于是它们得到了统一的形式，广义 Schwartz 导数(45)的复合公式可以写成：

$$\widetilde{T}(f,z)=\widetilde{T}(g,z)+e^{-2\varphi(f,g,z)}\widetilde{T}(f,g), \tag{46}$$

它自然包含了通常 Schwartz 导数的复合公式为其特例。有关广义 Schwartz 导数的其它性质及其应用，我们将作进一步讨论。

作为本文的结束，我们要强调二点：

1. 包含文献[1]在内，我们进行的所有的讨论都是在一个局部邻域中进行的，比如讲，在一个单位圆盘内部。但是，由文献[5]讨论，我们知道，单位圆盘带有单位圆为其边界时，可以作为高亏格黎曼面的复盖空间。即模去 Fuchsian 群后即得到亏格数大于 2 的 Riemann 面。因此，我们的讨论是有整体意义的。如何得到高亏格黎曼面上的结果，我们将在今后作进一步讨论。

2. 本文后一部分重点讨论了如何推广 Schwartz 导数，其中我们用到了二维引力理论的守恒方程。在光锥规范下，它连系着二维空间的标量曲率和通常的 Schwartz 导数。值得注意的是它和 KdV 方程和 KdV hierarchy 的联系。目前人们已在拓扑引力和离散方法的讨论中，发现了 KdV 流，因此进一步讨论 KdV 方程在 Beltrami-Liouville 引力中的应用，将是十分有意义的。这一点我们在下面的文章中讨论。

参 考 文 献

[1] 王仲华、吴可、郭汉英，"Liouville 理论的闭链条件及其在二维诱导引力中的应用 (I)"，高能物理与核物理，待发表。

[2] 王世坤、王仲华、吴可，郭汉英，物理学报，40(1990)，505.

[3] A.M.Polyakov, *Mod. Phys. Lett.*, **A2**(1987), 893.

[4] J.Distler and H.Kawai, *Nucl. Phys.*, **B321**(1989), 509.

[5] S.Nag, A.Verjovsky, *Commun. Math. Phys.*, **Vol. 130, No.1** (1990), 123.

The Cocycle Condition of Liouville Theory and Its Application to the 2-D Induced Gravity (II)

WANG ZHONGHUA WU KE GUO HANYING

(CCAST (World Laboratory) P. O. Box 8730, *Beijing* 100080)

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica P. O. Box 2735, *Beijing* 100080)

ABSTRACT

In terms of the cocycle condition of Liouville theory, we have got the composition law in the theory of Beltrami-Liouville gravity as well as its Ward identity and its energy-momentum tensor, i.e. the extended Schwarzian derivative.