

# 带电粒子束在非线性周期场中的传输

郁庆长

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

## 摘 要

本文研究带电粒子束在非线性周期场中的传输。利用映射方法得到了与非线性周期场匹配的束流发射相图。这种束的发射相图的变化和包络线都是周期性的,且其周期等于场的周期。

## 一、引 言

带电粒子束在周期场中的传输问题,对于线性场来说已有完善的理论<sup>[1-3]</sup>。如果知道周期场系统中一个周期的传输矩阵,就可以求出与它相匹配的束流发射相图,其形状为一超椭球。具有这种发射相图的束在周期场中传输时其相图形状的变化是周期性的,束的包络线也是周期性的,它们的周期等于周期场的周期。

但是在某些情况下必须考虑非线性周期场。例如在一些大直径强流束传输系统中,场的非线性部分就难以忽略。

在非线性场中,初始发射相图形状为超椭球的束在传输过程中其相图形状将发生畸变而不再保持超椭球。在这种情况下原来的研究方法遇到了困难。

近年来一些人利用映射方法讨论束在非线性周期场中的传输(例如[4])。本文将用这一方法求出与场相匹配的束流发射相图,虽然它不再具有超椭球的形状。文中不考虑横向运动与纵向运动的耦合与空间电荷效应。

为了简单将仅讨论轴对称束,但其结果可以推广到一般的束。

## 二、粒子在非线性周期场中的运动

这里不研究粒子在每一周期内的运动而只注意每经过一个周期粒子的位置与运动方向的变化,也就是只注意粒子在  $z = iL$  处  $r$  与  $r'$  的值  $r_i$  与  $r'_i$ 。这里  $z$  为纵向坐标,  $r$  为径向坐标,  $r' = \frac{dr}{dz}$ ,  $L$  为场的周期,  $i$  为任意整数。

利用映射来描述周期场。引入列矢量  $\mathbf{x}$ ,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$\mathbf{x}_{i+1}$  与  $\mathbf{x}_i$  的关系可用二维映射  $F_p$  表达:

$$\mathbf{x}_{i+1} = F_p(\mathbf{x}_i). \quad (2)$$

映射  $F_p$  完全决定于场的参数  $p$ . 以  $F_p^2(\mathbf{x})$  表示  $F_p(F_p(\mathbf{x}))$ ,  $F_p^3(\mathbf{x})$  表示  $F_p(F_p(F_p(\mathbf{x})))$ , 以此类推, 有

$$\mathbf{x}_i = F_p^i(\mathbf{x}_0). \quad (3)$$

$\mathbf{x}_0$  为列矢量  $\mathbf{x}$  的初值.

当给定场参数  $p$  与  $\mathbf{x}_0$  时可由上式求出  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \cdots \mathbf{x}_i \cdots$  在相平面  $(r, r')$  上标出它们相应的点, 发现粒子的运动有以下三种情况.

1. 粒子作周期运动, 周期为场周期的整数倍. 记此整数为  $n$ , 此时粒子将按一定顺序跳过相平面上的  $n$  个点, 然后再按同样顺序重复(图 1(a)). 这  $n$  个点就是映射  $F_p$  的周期点.

2. 粒子作准周期运动. 此时  $\mathbf{x}_i (i = 0, 1, 2, 3 \cdots \infty)$  在相平面上相应的点组成一条或几条封闭曲线, 称之为粒子的“路径”. 注意“路径”并不是粒子在相平面上的运动轨迹, 因为这里并不涉及粒子在每一周期内的运动. 当粒子经过一个周期时它就从“路径”上一点跳到另一点(图 1(b)). 如果在  $z = iL$  处粒子位于相平面上  $A$  点, 那么总能找到一个整数  $k$  使粒子在  $z = (i + k)L$  处所在点  $B$  到  $A$  的距离小于事先给定的小正数  $\varepsilon$ .

3. 粒子作非周期运动, 最后远离系统而去(图 1(c)).

第三种情况属于不稳定运动. 第一种情况是一种特例. 我们最感兴趣的是第二种情况.

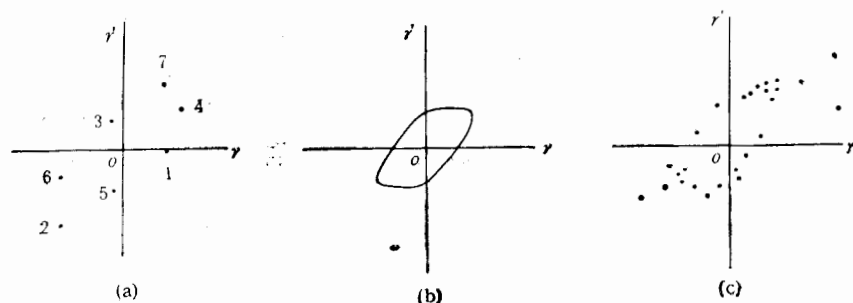


图 1 粒子在周期场中运动的三种情况

(a) 周期运动 (b) 准周期运动 (c) 非周期运动

作为例子, 研究一个由轴对称薄透镜组成的周期场系统<sup>[5]</sup>. 所有薄透镜都是相同的, 每一周期由薄透镜开始(图 2). 此时映射  $F_p$  为

$$\begin{cases} r_{i+1} = r_i + Lr'_{i+1}, \\ r'_{i+1} = r'_i - \alpha r_i - \beta r_i^3, \end{cases} \quad (4)$$

此处  $L$  为透镜间距,  $\alpha$  与  $\beta$  为透镜参数. 其中  $\alpha > 0$  反映透镜的线性聚焦能力,  $\beta$  反映透镜的非线性特性. 注意  $r'_i$  为第  $i$  个薄透镜入射方向的  $r'$  值. 通过计算可以获得不

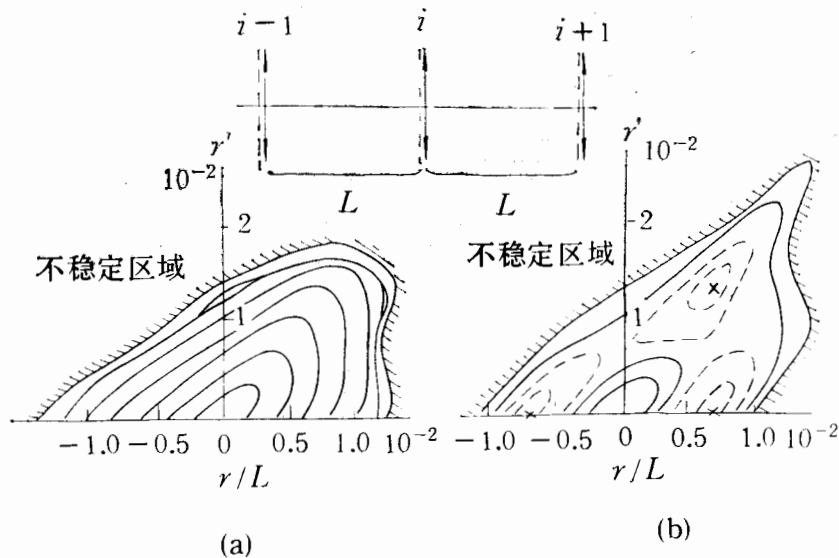


图 2 由轴对称薄透镜组成的周期场系统和粒子在相平面上的“路径”。“路径”所包围的区域就是系统的匹配相图

(a)  $L\alpha = 2$ ,  $\alpha/\beta L^2 = -4 \times 10^{-4}$  (b)  $L\alpha = 1.8$ ,  $\alpha/\beta L^2 = 4 \times 10^{-4}$

同透镜参数情况下粒子的“路径”。从图 2 可以看出非线性周期场系统的一些特点:

1. 对于线性周期场,可以指出当参数取某一范围内的值时系统是稳定的。而对于非线性周期场,稳定性不仅与场参数有关还与粒子运动的初始条件有关。不同参数的系统在相平面上有着不同的稳定区域,有些系统不存在稳定区域。

2. 对于稳定的线性周期场系统,所有作准周期运动的粒子其“路径”都是相似的椭圆。而对于非线性系统“路径”有着不同的形状。一般来说,在非线性较弱的区域(如图 2 中原点附近)“路径”接近椭圆,而在非线性较强的区域“路径”形状受到严重扭曲。

3. 对于线性周期场系统,当场参数取某些值时所有粒子作周期运动。非线性系统则与此完全不同。以图 2(b) 为例,图中画叉的点是共振点(此图对原点对称,横轴下方一个共振点未画出),在共振点处粒子作周期运动。在共振点附近,“路径”是由几条围绕共振点的封闭曲线组成的。图 2(b) 中虚线所示的两条“路径”,每条都由四条封闭曲线组成(横轴下方的曲线未画出)。每经过一个周期粒子就按一定顺序从一条封闭曲线跳到另一条封闭曲线,并按同样顺序重复。这样的区域称为共振区。在离共振点较远处,“路径”仍然是围绕原点的一条封闭曲线。共振区是非线性系统特有的现象。

一般来说,在稳定区边缘及共振区边缘场参数和粒子初始条件的微小变化可能导致“路径”形状的显著改变。

关于非线性周期场系统的上述特点还将在以后的文章中作进一步的讨论。

### 三、非线性周期场中的匹配相图

如果一个非线性周期场系统用二维映射  $F_p$  描述,那么此系统中任一粒子“路径”上

的任一点经过映射  $F_p$ , 必然还位于同一“路径”上, 这就是说任一“路径”经过映射  $F_p$  得到的仍是同一“路径”。

由于“路径”不能交叉, 任一条“路径”所包围的相平面区域经过映射  $F_p$  得到的仍是同一区域。因此任一条“路径”所包围的相平面区域就是与这个非线性周期场系统匹配的束流发射相图。如果束在进入周期场时具有这种相图, 那么它在传输过程中相图形状的变化是周期性的, 束的包络线也是周期性的, 它们的周期等于周期场的周期。与线性周期场系统不同的是, 这种匹配发射相图不具有椭圆形状。从图2可以看到, 一些相图形状较简单, 接近椭圆或平行四边形, 另一些相图形状较复杂, 甚至是由几条封闭曲线组成的。

如果恰当地选择参数, 非线性周期场同样可用于传输带电粒子束。例如一个粒子束具有平行四边形的发射相图, 就可考虑用图2(a)那类系统进行传输。

如果某一粒子束的发射相图A与非线性周期场系统不匹配, 可以作出它的外接匹配相图B和内接匹配相图C(图3)。虽然具有相图A的束在传输过程中相图形状会发生畸变, 其包络线也不是周期性的, 但是在周期场中任意处具有相图A的束的有效发射度不会超过具有相图B的束的有效发射度, 它的包络线也不会超出后者的包络线范围, 它与相图C重叠的那部分区域在传输过程中将不发生畸变。

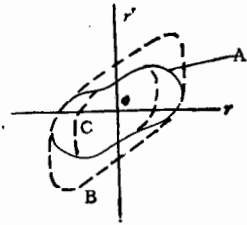


图3 与非线性周期场不匹配的束流发射相图  
A不匹配的相图 B外接匹配相图 C内接匹配相图

图3 与非线性周期场不匹配的束流发射相图

#### 四、理论的推广

以上讨论的是轴对称束。对于非轴对称束, 如果两横向运动( $x$ 与 $y$ 方向)间没有耦合, 上述理论可直接用于研究束在非线性周期场中各横向的运动。反之, 如果两横向运动间存在耦合, 粒子“路径”将成为超曲面, 此时计算将变得非常复杂, 但理论的思想仍然适用。

#### 参 考 文 献

- [1] A. A. Kolomenskij and A. N. Lebedev, *Theory of Cyclic Accelerators* (Trans. from Russian), North-Holland, Amsterdam, 1966.
- [2] M. Kapchinskij, *Theory of resonance linear accelerators* (Trans. from Russian), Harwood, New York, 1985.
- [3] 王书鸿等, 质子直线加速器原理, 原子能出版社, 北京, 1986, 第五章.
- [4] D. R. Douglas, *Dynamic Aperture Calculations for Circular Accelerators and Storage Rings*, AIP Conf. Proc. 153, vol. 1, 390.
- [5] 郁庆长, 计算物理, 9(1992), 634.

## Transport of Charged Particle Beam in Nonlinear Periodic Field

YU QINGCHANG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039*)

### ABSTRACT

In this paper the transport of charged particle beams in nonlinear periodic fields is studied. By means of mapping method the emittance plots of beams matched with the nonlinear periodic fields can be obtained. The variance of emittance plots and envelopes of these beams are periodic and their periods are equal to the period of field.