第14卷 第7期　　高能物理与核物理　　Vol. 14, No. 7
1990年7月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　July, 1990

稀土区变形偶-偶核 E_4 特性的微观研究*

王　振
(苏州大学物理系)

吴　华　川
(苏州大学物理系，中国科学院理论所)

摘　　要

本文通过用 BCS 方法对稀土区变形偶-偶核的内禀十六极矩（Q_{40}）随质量数的变化规律的研究，表明了对关联对于解释这种变化规律是十分重要的．对内禀系中 Cooper 对的分析表明，角动量为 4 的核子对（G 对）的成份虽然不大，但其对 Q_{40} 的贡献是十分重要的．

一、引　　言

稀土区变形偶-偶核的内禀十六极矩（Q_{40}）和内禀四极矩（Q_{20}）已在实验上精确地测出[1-3]．由图 1(a) 和(b)可以看出，Q_{40} 及 Q_{20} 随质量数的变化在整体上很有规律性．Bertsch 用 Polar Cap Model (PCM)[4] 对上述规律作出了定性的解释；本文作者之一也用 IBM 理论唯象地进行了讨论[5]．

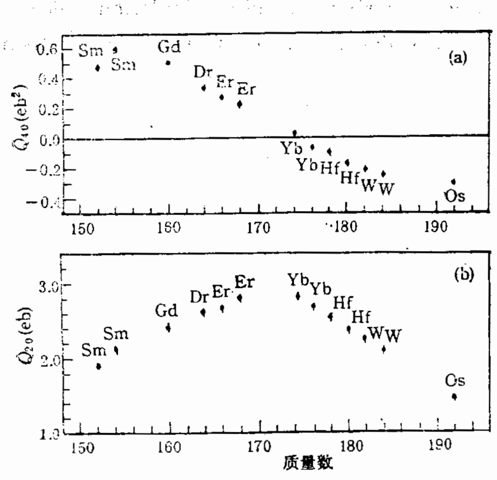

图1 (a)、(b) 稀土区变形偶-偶核的 Q_{40} 及 Q_{20} 实验数值．数据取自文献 [1]．

按 PCM 的结论，Q_{40} 及 Q_{20} 随核子数的变化规律由下列积分描写：

$$Q_{40} \sim \int_{\mu}^{1} P_4(x)dx, \qquad (1.1)$$

$$Q_{20} \sim \int_{\mu}^{1} P_2(x)dx, \qquad (1.2)$$

上式中的被积函数 $P_4(x)$ 及 $P_2(x)$ 是勒让德多项式；$\mu = \cos\theta$，θ 为所填核子轨道与对称轴之间的最大夹角(由粒子数 N_0

本文 1989 年 7 月 3 日收到．
* 国家自然科学基金会资助课题．

确定). PCM 的缺点是它没有考虑核子之间的对关联. 本文拟用 BCS 方法对 Q_{40} 及 Q_{20} 进行计算，并将其结果与 PCM 的结果进行比较，从而阐明核子间对关联对 Q_{40} 及 Q_{20} 的影响. BCS 理论的缺陷是粒子数不守恒，因而其计算结果只能反映若干相邻核素之平均性质[6]. 由于本文的重点在于研究 Q_{40} 及 Q_{20} 随质量数变化的总体规律，因而 BCS 的这一缺陷就显得并不重要.

另一方面，IBM 微观理论中一个重要问题是关于角动量为 4 的核子对（G 对)的重要性. 在这方面已有不少作者[7-9,11]作过研究，其结果表明：尽管 G 对的几率较小，但它对于解释四极矩、转动惯量等物理量是至关重要的. 然而，人们还一直企图寻找关于 G 对重要性的更直接的证据. 因为 Q_{40} 对应于十六极形变，它与 G 对之间存在着内在的联系，因而有理由期望对 Q_{40} 的规律性的分析会为 G 对的重要性提供更直接的证据.

本文的第二部分讨论核子对关联对 Q_{40} 及 Q_{20} 的影响；第三部分研究 G 对对 Q_{40} 的贡献；第四部分讨论粒子数投影问题；最后给出结论和讨论.

二、对关联对 Q_{40} 及 Q_{20} 的影响

由于本文的主要兴趣在于 Q_{40} 及 Q_{20} 随质量数变化的总体规律，因而在计算中拟采用单 j 模型. 在 IBM 的微观研究中，单 j 模型在球形核区域[10]及变形核区域[11]，对 IBM 微观参数总体规律均给出了具有一定精确程度的描写. 参照 Otsuka[11]的作法，取 $j=\frac{41}{2}$（j 的这一取值可视为质子壳与中子壳的某种平均情形). 图 1(a) 和 (b) 中所列的核素，虽然形变不尽相同，但都处于变形区，作为初步近似，对所论的核素，将变形参数取为恒定. 于是，单粒子能级可由下式确定：[11]

$$\varepsilon_m = 8\delta\left[3\left(\frac{m}{j}\right)^2 - 1\right], \tag{2.1}$$

上式中 δ 为变形参数，对于稀土区核，δ 的值可近似取为 0.3[11]；m 为角动量在内禀对称轴上的投影量子数. 当对力强度 G_0 及粒子数 N_0 给定时，用 BCS 方法就可确定能隙 Δ 及费米面能量 λ，从而 v_m^2 及 u_m^2 可由下式确定：

$$v_m^2 = \frac{1}{2}\left[1-(\varepsilon_m-\lambda)/\sqrt{(\varepsilon_m-\lambda)^2+\Delta^2}\,\right], \tag{2.2}$$

$$u_m^2 = \frac{1}{2}\left[1+(\varepsilon_m-\lambda)/\sqrt{(\varepsilon_m-\lambda)^2+\Delta^2}\,\right], \tag{2.3}$$

式中 v_m^2 代表能级 ε_m 被粒子对填充的几率，u_m^2 代表能级 ε_m 空着的几率. 这样核的基态波函数（BCS 波函数）

$$|0\rangle\rangle = \prod_m (u_m + v_m s_m^+)|0\rangle \tag{2.4}$$

即可被确定；式中 $s_m^+ = b_m^+ b_{\bar{m}}^+$，是粒子对产生算符. 在单 j 的情形下，根据电多极矩的定义可得：

$$\hat{Q}_{40} = \langle j\|er^4Y_4\|j\rangle \sum_m (jm40|jm)a_m^+a_m,$$

$$\hat{Q}_{20} = \langle j\|er^2Y_2\|j\rangle \sum_m (jm20|jm)a_m^+a_m,$$

其中 $\langle j\|er^4Y_4\|j\rangle$ 及 $\langle j\|er^2Y_2\|j\rangle$ 为约化矩阵元[6]. 在核内禀基态情况下不难得出:

$$Q_{40} = 2\langle j\|er^4Y_4\|j\rangle \sum_m (jm40|jm)v_m^2, \tag{2.5}$$

$$Q_{20} = 2\langle j\|er^2Y_2\|j\rangle \sum_m (jm20|jm)v_m^2. \tag{2.6}$$

为了研究对力强度对 Q_{40} 及 Q_{20} 总体规律的影响，我们分别取 G_0 为 0.0 和 0.2 进行计算. 不同 G_0 之下 Q_{40} 及 Q_{20} 随 μ 的相对变化关系如图 2 所示 ($\mu = N_0/2(\Omega - 1)$, $\Omega = (2j+1)/2$, 图 1 中稀土区元素的 μ 值范围为 0.25—0.8). 应当指出，在核子填充主壳层的开始端($\mu < 0.25$)和结束端 ($\mu > 0.8$), 由于价核子数与满壳偏离较小，核应接近球形状态，这与本文计算中采用的假定 (变形核) 相矛盾，因而其结果没有物理意义. 随着核子数偏离满壳较远，所论的核由球形过渡到有固定形变，这相当于 $\mu = 0.25$—0.8 的区域，在此区域中本文的模型是适用的. 由图 2 可以看出，Q_{40} 曲线的最大特点是与横轴相交，交点是 Q_{40} 值由正变为负的转变点，因而该点的位置对检验模型极为敏感. 我们可根据这一交点的位置来判定与实验符合的好坏. 由图 1 可确定出交点处的 μ 值约为 0.61, 将图 2 中 $0.25 < \mu < 0.8$ 的区域与图 1(a) 进行比较可以看出: G_0 取 0.0 时 Q_{40} 与横轴交点的位置与 0.6 偏离较远，而 G_0 取 0.2 时 Q_{40} 与横轴交点的位置则很接近 0.61 的位置. 这说明了对于稀土区核而言，对关联的影响是很大的; 同时也说明了作为定性的讨论，G_0 取 0.2 是比较恰当的，这亦与其它作者的结论相符[12—13].

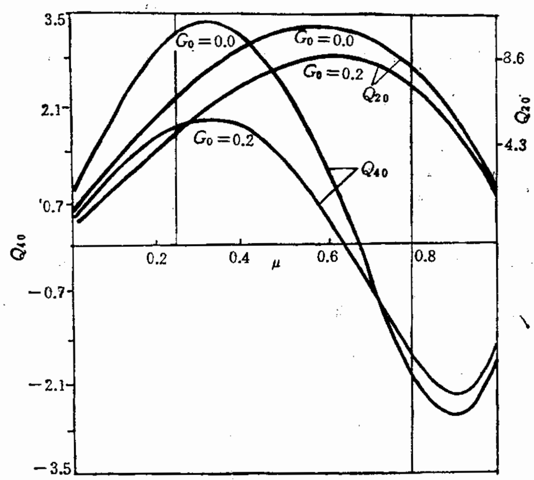

图 2 对力强度 G_0 对 Q_{40} 及 Q_{20} 随 $\mu(\mu = N_0/2(\Omega - 1))$ 变化规律的影响.

不难证明，PCM 是 BCS 理论在 $G_0 = 0$ 时的特殊情形. 当 G_0 为零时，(2.2) 式变成:

$$\begin{cases} v_m^2 = 1 & \epsilon_m < \lambda \\ v_m^2 = 0 & \epsilon_m > \lambda \end{cases}$$

(Normal Phase). 设所填充的核子对数为 M, 则有:

$$Q_{40} \sim 2\sum_{m=\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}} (jm40|jm)$$

$$Q_{20} \sim 2\sum_{m=\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}} (jm20|jm)$$

当 j 很大时，C-G 系数可作如下的近似[11]：

$$(jmJ0|jm) \approx P_J(m/j), \tag{2.7}$$

其中 P_J 为勒让德多项式(当 J 取 0、2、4 时，P_J 的变化规律如图 3 所示)．在这样的近似下即可得到 PCM 的结论．

对力的影响，可通过费米面附近能级上的粒子分布情况发生的变化来说明．对力产生的影响是：费米面以下能级的核子占有率减小，而费米面以上的能级的占有率增大,并且随着 G_0 的增加,这种变化也增大．图 3 中 P_4 在整个区间的变化可分成两个部分：在 AC 段，随着 m/j 的增大，P_4 逐渐下降，这就使得费米面下能级占有率减小所引起的 Q_{40} 的减小值大于费米面上能级占有率的增加所引起的 Q_{40} 的增加值,因而在这个区间 $G_0 \neq 0$ 的 Q_{40} 值小于 $G_0=0$ 的 Q_{40} 值;在 CE 段，P_4 单调上升，使得费米面上能级占有率增大所引起的 Q_{40} 的增加值大于费米面下能级占有率减小所引起的 Q_{40} 的减小值，故在这个区间，$G_0 \neq 0$ 的 Q_{40} 值大于 $G_0=0$ 的Q_{40} 值．对于 Q_{20} 的变化规律可利用 P_2 在整个区间随 m/j 单调上升的事实加以解释．

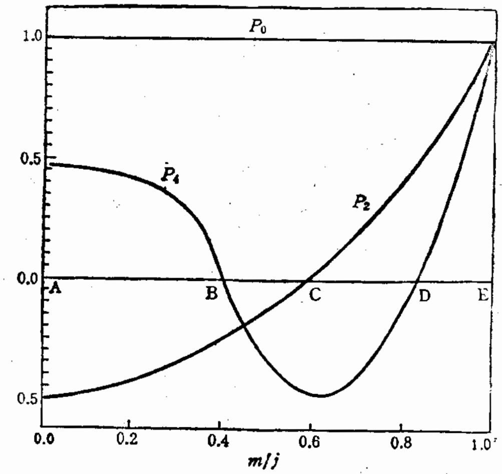

图 3　勒让德多项式 P_0、P_2、P_4 随 $\frac{m}{j}$ 的变化规律

三、G 对对 Q_{40} 的贡献

为了研究对结构,我们讨论 BCS 波函数中粒子数为 N_0 的部分(“物理的”波函数)．

$$|N_0\rangle = N^{-1}\left[\sum_{m>0}\left(\frac{v_m}{u_m}\right) b_m^+ b_{\bar{m}}^+\right]^{\frac{N_0}{2}}|0\rangle = N'^{-1}(A^+)^{\frac{N_0}{2}}|0\rangle, \tag{3.1}$$

其中

$$A^+ = \sum_m c_m b_m^+ b_{\bar{m}}^+, \tag{3.2}$$

$$c_m \sim \frac{v_m}{u_m},\ 且保证\ \langle 0|AA^+|0\rangle = 1$$

N, N' 为归一化常数，A^+称为内禀系中的 Cooper 对[11]．将 A^+按角动量进行展开有：

$$A^+ = \sum_J X_J a^{+(J)}, \tag{3.3}$$

其中 $a^{+(J)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[b_j^+ b_j^+]^{(J)}$ 表示角动量为 J 的核子对，X_J 为其振幅．不难推得,对于单 j 轨道有：

$$X_J = \sum_m \sqrt{2}\, c_m (jmj-m|J0)(-1)^{j-m}, \tag{3.4}$$

$$c_m = \sum_J \sqrt{2}\, X_J (jmj-m|J0)(-1)^{j-m}, \tag{3.5}$$

表 1 列出了不同 N_0 之下的 X_4^2 之值，由表 1 可以看出，对于变形核而言，X_4^2 小于 8%，这说明变形核中 G 对的成分是非常小的.

表 1 G 对的几率

N_0	12	16	20	24	28	32
X_4^2	0.0785	0.0792	0.0731	0.0595	0.0388	0.017

我们就核子对空间的各种不同截断方式（即令较高 J 之系数为零）下的 Q_{40} 值进行比较以研究 G 对的贡献. 具体的截断方式如下：

截断方式	不为零的 X_J 值
全空间(不截断)	X_0, X_2, X_4, X_6, ···
SDG 空间	X_0、X_2、X_4
SD 空间	X_0、X_2

取对力强度为0.2分别在全空间、SDG 空间、SD 空间计算，各空间中 Q_{40} 随 μ 变化的规律如图 4 所示. 由图可以看出，在 $0.25<\mu<0.8$ 的区间中，SD 空间中的计算结果与全空间中的计算结果相差很大. 而当考虑 G 对后，计算结果与在全空间中的计算结果很接近. 因为 G 对与 Q_{40} 之间存在着内在联系，上述结果可视为 G 对重要性的较直接的证据.

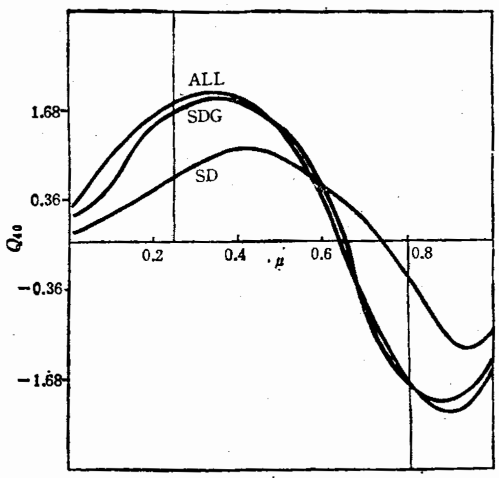

图 4 各种截断方式中 Q_{40} 随 μ 变化的规律
计算中 G_0 取 0.2.

上述数值计算结果，可以定性地说明如下. 由 (2.7) 式有：

$$c_m \approx \sum_J \sqrt{2}\, X_J[(2J+1)/(2j+1)]^{\frac{1}{2}} \cdot P_J(m/j),$$

并可得

$$c_m^{SDG} \approx c_m^{SD} + \sqrt{\frac{3}{7}}\, X_4 P_4(m/j).$$

其中 c_m^{SDG} 和 c_m^{SD} 分别为 c_m 在 SDG 及 SD 空间中的近似. (3.4)式的计算结果表明，X_4 均大于零，则由图 3 中 P_4 的变化规律可得

在 AB、DE 区间：$c_m^{SDG} > c_m^{SD}$

在 BD 区间：$c_m^{SDG} < c_m^{SD}$

而 c_m 与能级 ε_m 的占有率 v_m^2 相对应，由此可见 SD 空间与 SDG 空间的差别在于各能级的占有率 $(v_m^2)^{SD}$ 相对于 $(v_m^2)^{SDG}$ 发生了变化，从而导致了 Q_{40}^{SD} 与 Q_{40}^{SDG} 的不同. Q_{40}^{SD} 与 Q_{40}^{SDG} 差别很大表明，虽然 X_4 的值很小，但 $\sqrt{\frac{3}{7}}\, X_4 P_4(m/j)$ 对能级占有率 v_m^2 的

影响是很大的，这也说明了 G 对的影响是不可忽略的．而 Q^{SDG} 与 Q^{AU} 相近则说明更高 J 对（$J>4$）的影响可以略去．

四、粒子数投影问题

BCS 波函数中粒子数不守恒是该方法的缺陷．作为粒子数不守恒程度之度量，在表 2 中给出了粒子数相对偏差 $\sqrt{\overline{\Delta N_0^2}}/N_0$ 之值 $\left(j=\frac{41}{2},\ G_0=0.2\right)$．由表 2 可见，核子数越少，相对偏差越大，一般地说，由 BCS 计算所得结果的可靠性就越差．为了解决这个

表 2　粒子数相对偏差

N_0	6	12	24	38
$\sqrt{\overline{\Delta N_0^2}}/N_0(\%)$	26.8	18.9	16.0	6.6

问题，粒子数投影的方法被广泛使用．我们采用的是变分后投影方法（VBP）．相对于变分前投影方法（VAP）而言，VBP 比较简单，而其结果仍具有相当的准确性[14]．表 3 列出了 j 取 $\frac{41}{2}$ 及 G_0 取 0.2 时用 VBP 所得的 Q_{40} 及 Q_{20} 的一些结果，同时也列出了未作粒子数投影的 BCS 方法结果以进行比较．由表 3 可以看出，就基态的 Q_{40} 及 Q_{20} 值而言，BCS 方法和 VBP 方法所得结果是比较接近的．这说明了本文用 BCS 方法所得结论从定性的角度来看是基本可信的．

表 3

计算方法	BCS			BCS + VBP		
N_0	6	8	10	6	8	10
Q_{40}	2.284	2.048	1.567	2.446	2.176	1.652
Q_{20}	4.521	5.481	6.196	4.660	5.643	6.372

五、结论与讨论

本文通过用 BCS 方法对 Q_{40} 及 Q_{20} 随质量数变化的总体规律的计算和分析，可以得到如下的结论：

1. 对关联对稀土区变形核的性质，如 Q_{40} 及 Q_{20} 有很大的影响；对于这个区间的核，对力强度 G. 近似地取为0.2是恰当的；

2. 内禀 Cooper 对中，角动量为 4 的核子对（G 对）的成份，对于物理量如内禀 E_4 特性（Q_{40}）有很大的贡献，因而在用核子对来对核结构进行描写时，G 对是不容忽略的，而更高角动量的对可以不考虑．

如前所述，本文所采用的单 j BCS 方法只能反映若干相邻核的平均性质，因而它只能解释物理量随质量数变化的总体规律，无法将计算的结果与真实核素一一对应．如要

对真实核来进行计算，就必须要区分质子与中子，同时采用真实的壳模型轨道作为核子轨道，并进行粒子数及角动量的投影．这方面的工作正在进行之中．

参 考 文 献

[1] T. Ichihara et al., *Phys. Lett.*, **182** (1986), 301.
T. Ichihara et al., *Phys. Rev.*, **C29** (1984), 1228.
[2] F. Ohtani et al., *Phys. Rev.*, **C28** (1983), 120.
[3] H. Ogawa et al., *Phys. Rev.*, **C33** (1986), 834.
[4] G. F. Bertsch, *Phys. Lett.*, **B26**(1968), 130.
[5] H. C. Wu et al., *Phys. Rev.*, **C38** (1988), 1638.
[6] R. D. Lawson "Theory of the Nuclear Shell Model" (oxford university press, 1980).
[7] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Physics scripta*, **22** (1980), 468.
[8] D. R. Bes et al., *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982), 1001.
[9] E. Maglion et al., *Nucl. Phys.*, **A404** (1983), 333.
[10] T. Otsuka, A. Arima and F. Iachello, *Nucl. Phys.*, **A309** (1978), 1.
[11] T. Otsuka et al., *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982), 387.
[12] A. Bohr and B. R. Mottelson, "Nuclear Structure" (Benjamin, New York, 1975), Vol. 2.
[13] R. A. Broglia et al., *Phys. Lett.*, **50B** (1974), 213.
[14] P. Ring and P. Schuck, "The Nuclear Many-Body Problem" (Springer-Verlag, New York, 1980).

A MICROSCOPIC STUDY OF THE E_4 PROPERTY OF DEFORMED EVEN-EVEN NUCLEI IN THE RARE EARTH REGION

Wang Zhen Wu Huachuan

(Department of Physics, Suzhou University)

Abstract

In this paper, BCS method is applied to reproduce the mass-number dependence on the intrinsic *hexadecapole* moments (Q_{40}) of deformed even-even nuclei in the rare earth region, and it is shown that the pair correlation is an important factor for explaining such a dependence. The analysis of the intrinsic Copper-pair shows that the nucleon pairs with angular momentum equal to four (G-pairs) make a considerable contribution to the intrinsic hexadecapole moments although the component of such pairs is small.