逻辑系统 H_t 中的三–I 算法

马巧云[1],吴洪博[2]
MA Qiao-yun[1],WU Hong-bo[2]

1.西安文理学院 数学系,西安 710065
2.陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062
1.Department of Mathematics,Xi'an University of Arts and Science,Xi'an 710065,China
2.College of Mathematics and Information Science,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China

MA Qiao-yun,WU Hong-bo.Three I algorithm in fuzzy logic system H_t.Computer Engineering and Applications,2009,45(20):65-67.

Abstract: Three I algorithm and α-three I algorithm in fuzzy logic system H_t are studied based on the suggestion degree theory and right continuous of implication operator.
Key words: logic system;suggestion degree;three I algorithm;right continuous

摘 要:利用多值逻辑系统 H_t 中的支持度理论和蕴含算子的右连续性,研究了多值逻辑系统 H_t 中的三–I 算法和 α–三–I 算法。
关键词:逻辑系统;支持度;三–I 算法;右连续
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.20.020 **文章编号:**1002-8331(2009)20-0065-03 **文献标识码:**A **中图分类号:**O141

美国的控制论专家 L.A.Zadeh 于 1973 年提出了解决 FMP 问题的著名的 CRI 方法(Compositional Rule of Inference)[1]。但 Zadeh 的 CRI 方法只用了一次蕴涵算法而随后却用到了复合算法,而且 Zadeh 的 CRI 算法还不是还原算法。所以在一定意义下按 Zadeh 的 CRI 方法求的 FMP 问题的结果不是最优的。

王国俊教授提出了解决 FMP 问题的三 I 算法[2-4]。这种算法通过对蕴涵算法的三次使用得到 FMP 问题的结果,且结果优于用 Zadeh 的 CRI 方法求得的结果。这种模糊推理方法在模糊系统中被广泛应用[5-7]。王国俊教授在文[8]中提出 H_t 系统,这是一个更一般的多值逻辑系统。本文利用多值逻辑系统 H_t 中的支持度理论和蕴含算子的右连续性,研究了 H_t 中的三–I 算法和 α–三–I 算法。

1 基础知识

定义 1[8] 在[0,1]中规定:

$$x\vee y=\max\{x,y\}$$

$$\neg x=\neg_t x=\begin{cases}0, & x\geqslant t\\ t-x, & 0<x<t\\ 1, & x=0,t\in(0,1]\end{cases}$$

$$x\to y=H_t(x,y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ (t-x)\vee y, & x>y,t\in(0,1]\end{cases}$$

则[0,1]成为($\neg$,$\vee$,$\to$)型代数,称为 H_t–代数($0<t\leqslant 1$)。

命题 1[9] 设 $f(x,y)=x\to y$。

(1)如果 $f(x,y)$ 关于 y 是增函数,则关于固定的 $A(x)$、$B(y)$ 和 $A^*(x)$,$M(x,y)=(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to 1)$ 是 $(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))$ 当 B^* 变动时的最大可能值;

(2)如果 $f(x,y)$ 关于 y 还是右连续的,则 $F(Y)$ 中有最小的好集 B^*。

2 H_t 中的三–I 算法

定理 1 设 $A,A^*\in F(X)$,$B\in F(Y)$,已知 $A\to_t B$,A^*,则

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}\{A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))\},y\in Y$$

是使

$$(A\to_t B)\to_t(A^*\to_t B^*)=1 \tag{1}$$

的 $F(Y)$ 中的最小 Fuzzy 集。其中

$$E_y=\{x\in X|t-A^*(x)<R_t(A(x),B(y))\}$$

证明 首先证明 B^* 满足式(1)。只需证明

$$A(x)\to_t B(y)\leqslant A^*(x)\to_t B^*(y)\quad(\forall x\in X,y\in Y)$$

(1)若 $x\notin E_y$,则 $t-A^*(x)\geqslant A(x)\to_t B(y)$,而

$$A^*(x)\to_t B^*(y)\geqslant(t-A^*(x))\vee B^*(y)\geqslant$$

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10871121);西安文理学院2008 年中青年专业技术人员科研资助项目(No.kyc200819)。
作者简介:马巧云(1973-),女,讲师,研究方向:不确定性推理。
收稿日期:2009-01-15 **修回日期:**2009-03-23

$$(A(x)\to_t B(y))\vee B^*(y)\geqslant A(x)\to_t B(y)$$

(2)若 $x\in E_y=\{x\in X|t-A^*(x)<R_t(A(x),B(y))\}$，令

$$G_y=\{x\in E_y|A^*(x)\geqslant A(x)\to_t B(y)\}$$

$$H_y=\{x\in E_y|A^*(x)<A(x)\to_t B(y)\}$$

$$E_y=G_y\cup H_y$$

若 $x\in G_y$，则 $A^*(x)\geqslant A(x)\to_t B(y)$。而

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}\{A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))\}\geqslant$$

$$A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))=A(x)\to_t B(y)$$

而 $A^*(x)\to_t B^*(y)\geqslant B^*(y)\geqslant A(x)\to_t B(y)$

若 $x\in E_y$，则 $A^*(x)<A(x)\to_t B(y)$

$$B^*(y)\geqslant A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))=A^*(x)$$

$$A^*(x)\to_t B^*(y)=1\geqslant A(x)\to_t B(y)$$

总之，$A^*(x)\to_t B^*(y)\geqslant A(x)\to_t B(y)$。

其次证明 $B^*(y)=\sup_{x\in E_y}\{A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))\}(y\in Y)$是满足式(1)的 $F(Y)$中的最小 Fuzzy 集。

若 $B^*(y)=0$，结论自然成立。

设 $B^*(y)>0$，$E_y\neq\Phi$，取 ε 使得 $0<\varepsilon<B^*(y)$。

$$B^*(y)=\sup_{x\in G_y}\{A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))\}\vee\sup_{x\in H_y}\{A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))\}=$$

$$\sup_{x\in G_y}(A(x)\to_t B(y))\vee\sup_{x\in H_y}(A^*(x))=g\vee h$$

令 $g=\sup_{x\in G_y}(A(x)\to_t B(y))$，$h=\sup_{x\in H_y}(A^*(x))$。

(1)若 $g\geqslant h$，$B^*(y)=g>\varepsilon$，取 $x_0\in G_y$，$G_y=\{x\in E_y|A^*(x)\geqslant A(x)\to_t B(y)\}$，使得 $A(x_0)\to_t B(y)>g-\varepsilon=B^*(y)-\varepsilon$，即 $B^*(y)-\varepsilon<A(x_0)\to_t B(y)$。由 $x_0\in E_y$ 知，$t-A^*(x_0)<A(x_0)\to_t B(y)$，由 $x_0\in G_y$ 知 $A^*(x_0)\geqslant A(x_0)\to_t B(y)>B^*(y)-\varepsilon$，这时 $A^*(x_0)\to_t(B^*(y)-\varepsilon)=(t-A^*(x_0))\vee(B^*(y)-\varepsilon)<(A(x_0)\to_t B(y))\vee(A(x_0)\to_t B(y))=(A(x_0)\to_t B(y))$。

(2)若 $g<h$，$B^*(y)=h=\sup_{x\in H_y}A^*(x)$，取 $x_0\in H_y=\{x\in E_y|A^*(x)<A(x)\to_t B(y)\}$，使得 $A(x_0)\to_t B(y)>A^*(x_0)>h-\varepsilon=B^*(y)-\varepsilon$。由 $x_0\in E_y$ 知，$t-A^*(x_0)<A(x_0)\to_t B(y)$，从而 $A^*(x_0)\to_t(B^*(y)-\varepsilon)=(t-A^*(x_0))\vee(B^*(y)-\varepsilon)<(A(x_0)\to_t B(y))\vee(A(x_0)\to_t B(y))=(A(x_0)\to_t B(y))$。

3 H_t 中的 α-三-I 算法

定义 2 设 $A,B\in F(S)$，$\Sigma\subset\overline{\Omega}$，$a\in[0,1]$，如果

$$\inf\{v(A\to_t B)|v\in\Sigma\}=\alpha$$

则称 A 对 B 的 Σ-支持度为 α，记作 $sust(\Sigma;A,B)=\alpha$。

规则 1(R_t 型 α-三 I 规则) 设 $A,A^*\in F(X)$，$B\in F(Y)$，已知 $A\to_t B$，且给定 A^*，则得 B^*，这里 B^* 是 $F(Y)$中使

$$(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t B^*(y))\geqslant\alpha \qquad (2)$$

对一切 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 都成立的最小 Fuzzy 集。

定理 2(存在性定理) 设 $A,A^*\in F(X)$，$B\in F(Y)$，则 $F(Y)$中存在使式(2)对一切 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 都成立的最小 Fuzzy 集 $B^*(y)$。

证明 令 $\mathrm{B}=\{B^*\in F(Y)|(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to B^*(y))\geqslant\alpha\}$。由 $1_Y\in\mathrm{B}$ 知，B 非空。

令 $\overline{B}=\wedge\mathrm{B}$，则 $\overline{B}\in F(Y)$。$\overline{B}$的最小性显然。

以下只需证明对一切 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 都有 $(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t\overline{B}(y))\geqslant\alpha$。若上式不成立，则存在 $x_0\in X$ 和 $y_0\in Y$，使得

$$(A(x_0)\to_t B(y_0))\to_t(A^*(x_0)\to_t\overline{B}(y_0))<\alpha \qquad (3)$$

而 $R_t(u,v)$关于 v 右连续，即

$$\lim_{v\to v_0^+}R_t(u_0,v)=R_t(u_0,v_0) \qquad (4)$$

设 $R_t(A(x_0),B(y_0))=c$，$R_t(A^*(x_0),\overline{B}(y_0))=d$。由 $\overline{B}=\wedge\mathrm{B}$ 知，B 中有 $B_1,B_2,\cdots$，令 $\lim_{n\to\infty}B_n(y_0)=\overline{B}(y_0)$，且 $B_n(y_0)\geqslant\overline{B}(y_0)$，则由式(4)可得

$$\lim_{n\to\infty}R_t(A^*(x_0),B_n(y_0))=R_t(A^*(x_0),\overline{B}(y_0))=d$$

又 $R_t(u,v)$关于 v 是增函数，由 $B_n(y_0)\geqslant\overline{B}(y_0)$得

$$R_t(A^*(x_0),B_n(y_0))\geqslant R_t(A^*(x_0),\overline{B}(y_0))=d$$

再次使用式(4)，有

$$\lim_{n\to\infty}R_t(c,R_t(A^*(x_0),B_n(y_0)))=R_t(c,d)<\alpha$$

则存在 n 使 $R_t(c,R_t(A^*(x_0),B_n(y_0)))<\alpha$。即

$$(A(x_0)\to_t B(y_0))\to_t(A^*(x_0)\to_t B_n(y_0))<\alpha$$

这与 $B_n(y)\in\mathrm{B}$ 矛盾。证完。

定理 3(R_t 型 α-三 I 算法)

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y\cap K_y}\{A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))\wedge\}\alpha$$

是满足式(2)的最小 Fuzzy 集。其中

$$E_y=\{x\in X|t-A^*(x)<R_t(A(x),B(y))\}$$

$$K_y=\{x\in X|t-\alpha<A^*(x)\wedge R_t(A(x),B(y))\}$$

证明 先证明 $B^*(y)$满足式(2)。

令 $C(y)=\sup_{x\in E_y\cap K_y}\{A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))\}$，则 $B^*(y)=C(y)\wedge\alpha$。

又 $R_t(a,b\wedge c)=R_t(a,b)\wedge R_t(a,c)$。所以

$$(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t B^*(y))=$$

$$(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t(C(y)\wedge\alpha))=$$

$$((A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t C(y)))\wedge$$

$$((A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t\alpha))$$

只需证

$$M_{xy}=(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t C(y))\geqslant\alpha \qquad (5)$$

$$N_{xy}=(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t\alpha)\geqslant\alpha \qquad (6)$$

由R_t的性质$R_t(u,v)\geqslant v$知，式(6)显然成立。以下证明式(5)成立。设$x\in E_y\cap K_y$，则

$$C(y)=\sup_{x\in E_y\cap K_y}\{A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))\}\geqslant$$
$$A^*(x)\wedge R_t(A(x),B(y))$$

这时，

$$M_{xy}\geqslant(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t(A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))))=(A(x)\to_t B(y))\to_t((A^*(x)\to_t A^*(x))\wedge(A^*(x)\to_t(A(x)\to_t B(y))))=(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t A(x)\to_t B(y)))\geqslant(A(x)\to_t B(y))\to_t(A(x)\to_t B(y))=1\geqslant\alpha$$

若$x\notin E_y$，则$t-A^*(x)>R_t(A(x),B(y))$，而$A^*(x)\to_t C(y)\geqslant t-A^*(x)$，$M_{xy}=(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t C(y))=1\geqslant\alpha$。

若$x\notin K_y$，则$t-\alpha\geqslant A^*(x)\wedge R_t(A(x),B(y))$，$\alpha\leqslant t-A^*(x)\wedge R_t(A(x),B(y))$，则$\alpha\leqslant t-A^*(x)$且$\alpha\leqslant t-R_t(A(x),B(y))$。

$$M_{xy}=(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t C(y))\geqslant$$
$$(A(x)\to_t B(y))\to_t((t-A^*(x))\vee C(y))\geqslant$$
$$(A(x)\to_t B(y))\to_t\alpha\geqslant\alpha$$

其次证明$B^*(y)$是满足式(2)的最小的Fuzzy集。

设对某个$y\in Y$，$D(y)<B^*(y)$，则

$D(y)<\sup_{x\in E_y\cap K_y}\{A^*(x)\wedge(A(x)\to_t B(y))\}$且$D(y)<\alpha$，这时有$x_0\in E_y\cap K_y$，使得$D(y)<A^*(x_0)\wedge R_t(A(x_0),B(y_0))$，则$D(y)<A^*(x_0)$且$D(y)<R_t(A(x_0),B(y_0))$。

由$D(y)<A^*(x_0)$知，$A^*(x_0)\to_t D(y)=(t-A^*(x_0))\vee D(y)$，又$x_0\in E_y$，则

$$t-A^*(x_0)\leqslant R_t(A(x),B(y))$$
$$(t-A^*(x_0))\vee D(y)\leqslant R_t(A(x_0),B(y))$$

则 $(A(x_0)\to_t B(y))\to_t(A^*(x_0)\to_t D(y))=$

$$(A(x_0)\to_t B(y))\to_t((t-A^*(x_0))\vee D(y)))=$$
$$(t-(A(x_0)\to_t B(y)))\vee((t-A^*(x_0))\vee D(y))$$

又$x_0\in K_y$，则$t-A^*(x)\leqslant\alpha$，$t-(A(x_0)\to_t B(y))\leqslant\alpha$。$D(y)<\alpha$。所以$(A(x_0)\to_t B(y))\to_t(A^*(x_0)\to_t D(y))<\alpha$，即用小于$B^*$的$D$替代$B^*$，式(2)不成立。这就说明了$B^*$的最小性。

推论1 在定理3中，令t=1，则得到逻辑系统W中的α–三–I算法。

参考文献：

[1] Zadeh L A.Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J].IEEE Trans,System,Man and Cybernetics,1973,1:28–44.

[2] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三I算法[J].中国科学：E辑，1999，29(1)：43–53.

[3] Wang Guo–jun.On the logic foundation of fuzzy reasoning[J].Information Science,1997,17(7):47–88.

[4] 王国俊.模糊命题演算的一种形式演绎系统[J].科学通报，1997，42(10)：1041–1045.

[5] 马巧云，吴洪博.逻辑系统H_t中三–I算法的另一种证明[J].计算机工程与应用，2008，44(7)：91–93.

[6] 吴洪博，马巧云.基于$\mathcal{L}^*$系统的一种非单调推理系统[J].陕西师范大学学报：自然科学版，2004，32(4)：4–8.

[7] 宋士吉，冯纯伯，吴从炘.关于模糊推理全蕴涵三I算法的约束理论[J].自然科学进展，2000，10(10)：884–889.

[8] 王国俊，兰蓉.系统Ha中的广义重言式理论[J].陕西师范大学学报：自然科学版，2003，31(2)：1–11.

[9] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京：科学出版社，2000.

（上接64页）

98%，且迭代次数仍然为O($c\sqrt{N/M}$)。同时由于使用固定相位搜索作为基本手段，使得量子计算中所用的硬件更少，减少硬件实现的难度。该算法没有使用任何经典的手段，因此可以推广到其他的NP完全问题的求解。

参考文献：

[1] Feynman R.Simulating physics with computers[J].Int Theor Phys,1982,21:467.

[2] Deutsch D.Quantum theory,the church–turing principle and universal quantum computer[C]//Proc R Soc,London,1985,400:97–117.

[3] Shor P W.Polynomial–time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer[J].SIAM Journal on Computing,1997,26(5):1484–1509.

[4] Simon D R.On the power of quantum computation[C]//Proceeding of the 35th Annual IEEE Computer Society,Los Alamitos,1994:116–123.

[5] Grover L K.A fast quantum mechanics algorithm for database search[C]//Proceedings of the 28th ACM Symposium on Theory of Computation,New York,1996:212–219.

[6] Grover L K,Radhakrishnan J.Is partial quantum search of a database any easier?[C]//Proceedings of the 17th Annual ACM Symposium on Parallelixm in Algorithms and Architectures,2005:186–194.

[7] Younes A.Fixed phase quantum search algorithm.[2007].http://www.ArXiv/quant–ph 0704.1585v.

[8] Bonanome M,HIllery M,Bužek V.Application of quantum algorithms to the study of permutations and group automorphisms[J].Physical,Review A,2007,76:012324.

[9] Schutzhold R,Schaller G.Adiabatic quantum algorithms as quantum phase transition:First versus second order[J].Physical Review A,2006,74:060304.

[10] Kato G.Grover–algorithm–like operator using only single–qubit gates[J].Physical Review A,2005,72:032319.

[11] Zalka C.Grove's quantum searching algorithm is optimal[J].Physical Review A,1999,60(4):2746–2751.

[12] Nielson M A,Chuang I L.Quantum computation and quantum information[M].Cambridge:Cambridge University Press,2000.

[13] 吕欣，冯登国.背包问题的量子算法分析[J].北京航空航天大学学报，2004，30(11).

[14] Menezes A J,van Oorschot P C,Vanstone S A.Handbook of applied cryptography[M].CRC Press LLC,1997:300–306.

[15] Boyer M,Brassard G,Hoyer P,et al.Tight bounds on quantum searching[J].Fortschritte der Physik,1998,46:493.