第 15 卷 第 1 期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 1
1991 年 1 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 1991

含曲率二次项的强引力

李 元 杰
(华中理工大学物理系,武汉, 430074)

摘 要

本文指出，一个 de-Sitter 型的强引力度规，在引入曲率标量二次项修正后,可保持度规形式不变。但是,由于二次项的作用。等价于使强引力耦合系数 G_f 相应减小,这说明二次项的修正可以导致一个合理的强引力而避免奇异性。

一、

早在 1919 年，Einstein 曾指出[1]：有理由认为,引力在维持基本粒子结构中起着作用。因为引力的强度与能量有关,而其它相互作用只与相关的荷有关,它们与能量毫无关系。于是,正如我们所见到的那样,在低能情况下,引力比其它相互作用小许多,可以不予考虑;但是,在高能情况下，引力完全可与强相互作用匹敌。 1974 年 Salam 等考虑了强引力作用量[2]。 $I_f = \frac{1}{K_f}\sqrt{-f}\ R(f)$，其中，$f$ 是强引力度规 $f_{\mu\nu}$ 的行列式值，$R(f)$ 是 f 度规下的标量曲率，$K_f = 8\pi G_f$。G_f 称为强引力耦合常数。由作用量 I_f 得到强引力的场方程、强引力理论广泛用于处理粒子内部的问题[3]。

由于强引力作用,在粒子内部的时空将有极大的曲率 R，这样,考虑一个包含 R^2 项的作用量[4,7]再不是纯粹数学上的游戏,而成为十分必要的修正。我们准备引入一个

$$I_f = \frac{1}{K_f}\sqrt{-f}\ (\alpha R^2 + \beta R),$$

并导出场方程,进而求具有球对称的度规解。然后,对所求的解进行讨论。

二、

首先,我们导出场方程,取引力场和物质场的总作用量

$$S = S_g + S_m = \int \frac{1}{K_f}\sqrt{-f}\ (\alpha R^2 + \beta R) d^4x$$
$$+ \int \mathscr{L}_m \sqrt{-f} d^4x, \tag{1}$$

其中

本文 1990 年 3 月 16 日收到.

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\delta f^{\mu\nu}d^4x. \tag{2}$$

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-f}}\left[\frac{\partial}{\partial f^{\mu\nu}}(\mathscr{L}_m\sqrt{-f}) - \frac{\partial}{\partial f^{\mu\nu}_{,\lambda}}(\mathscr{L}_m\sqrt{-f})_{,\lambda}\right],$$

而

$$\delta S_g = \frac{1}{K_f}\int\Big[-(\alpha R^2 + \beta R)\frac{1}{2}f_{\mu\nu}\sqrt{-f}\,\delta f^{\mu\nu}$$
$$+\sqrt{-f}(2\alpha R + \beta)(R_{\mu\nu}\delta f^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})\Big]d^4x. \tag{3}$$

我们最关心的是被积式中第三项含 $R\sqrt{-f}f^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ 的计算.

$$\int 2\alpha R\sqrt{-f}f^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x$$
$$= \int 2\alpha R\sqrt{-f}f^{\mu\nu}[(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}]d^4x$$
$$= \int 2\alpha\sqrt{-f}\,d^4x\{(Rf^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (Rf^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}\}$$
$$-\int 2\alpha\sqrt{-f}\,d^4x\{(f^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})R_{;\nu} - (f^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})R_{;\lambda}\}, \tag{4}$$

(4) 式中,第一项积分化成三维超曲面界面积分为零. 第二项可写成

$$2\alpha\int\sqrt{-f}\,d^4x\{R_{;\lambda}\delta(f^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - R_{;\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta f^{\mu\nu} - f^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}R_{;\nu}\}$$
$$= 2\alpha\int\sqrt{-f}\,d^4x\left\{R_{;\lambda}\delta\left[\frac{1}{2}f^{\mu\nu}f^{\lambda\sigma}(f_{\mu\sigma,\nu} + f_{\sigma\nu,\mu} - f_{\mu\nu,\sigma})\right]\right.$$
$$\left.+ R_{;\mu\nu}\delta f^{\mu\nu} - R_{;\mu,\nu}\delta f^{\mu\nu} - f^{\mu\nu}R_{;\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right\}$$
$$= 2\alpha\int\sqrt{-f}\,R_{;\mu\nu}\delta f^{\mu\nu}d^4x + 2\alpha\int\sqrt{-f}\,d^4x$$
$$\times\{-R_{;\lambda}\delta f^{\lambda\nu}_{,\nu} - R_{;\lambda}\delta(f^{\lambda\sigma}\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}) - R_{;\mu,\nu}\delta f^{\mu\nu} - f^{\mu\nu}R_{;\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\}$$
$$= 2\alpha\int\sqrt{-f}\,R_{;\mu\nu}\delta f^{\mu\nu}d^4x + 2\alpha\int\sqrt{-f}\,d^4x$$
$$\times\{\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda}R_{;\mu}\delta f^{\mu\nu} - R_{;\lambda}\delta(f^{\lambda\sigma}\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}) - f^{\mu\nu}R_{;\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\}$$
$$= 2\alpha\int\sqrt{-f}\,R_{;\mu\nu}\delta f^{\mu\nu}d^4x - 4\alpha\int\sqrt{-f}\,d^4x f^{\mu\nu}R_{;\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}. \tag{5}$$

(5) 式中第二项可写成:

$$\int 2\alpha\sqrt{-f}f^{\sigma\lambda}R_{;\lambda}\delta[f^{\mu\nu}_{,\sigma}f_{\mu\nu}]d^4x$$
$$= -2\alpha\int[(\sqrt{-f})_{,\sigma}R^{;\sigma}_{;}f_{\mu\nu} + (R^{;\sigma}_{;})_{,\sigma}\sqrt{-f}f_{\mu\nu}]\delta f^{\mu\nu}d^4x$$
$$= -2\alpha\int\sqrt{-f}f_{\mu\nu}R^{;\sigma}_{;\sigma}\delta f^{\mu\nu}d^4x, \tag{6}$$

最后,我们有

$$\delta S_g=\frac{1}{K_f}\int d^4x\sqrt{-f}\,\delta f^{\mu\nu}\left\{-\frac{\alpha}{2}R^2f_{\mu\nu}+\beta\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}f_{\mu\nu}R\right)\right.$$

$$\left.+2\alpha RR_{\mu\nu}+2\alpha R_{;\mu\nu}-2\alpha f_{\mu\nu}R^{\sigma}_{;\sigma}\right\}. \tag{7}$$

于是由变分原理 $\delta S=0$，我们有场方程

$$-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}=\frac{1}{K_f}\left[-\frac{\alpha}{2}R^2f_{\mu\nu}+(2\alpha R+\beta)R_{\mu\nu}-\frac{\beta}{2}f_{\mu\nu}R\right.$$

$$\left.+2\alpha R_{;\mu\nu}-2\alpha f_{\mu\nu}R^{\sigma}_{;\sigma}\right]. \tag{8}$$

方程 (8) 是考虑曲率二次项 R^2 修正后的场方程．下面，我们将在球对称度规下，求解方程 (8)．

三、

取球对称度规

$$ds^2=-e^{2\mu}dt^2+e^{-2\mu}dr^2+r^2d\Omega^2. \tag{9}$$

令 $\omega^0=e^{\mu}dt$，$\omega^1=e^{-\mu}dr$，$\omega^2=rd\theta$，$\omega^3=r\sin\theta d\varphi$ 则 (9) 式改写为

$$ds^2=-(\omega^0)^2+(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2,$$

对于无挠情况．借助 Carton 结构方程

$$\left.\begin{aligned}&d\omega^i+\omega^i_j\Lambda\omega^j=0\\&\frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k\Lambda\omega^l=d\omega^i_j+\omega^i_k\Lambda\omega^k_j\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

分别求出非零的联络 1-形式 ω^i_j 及曲率张量 R^i_{jkl}、R_{icci} 张量 R_{ij}，曲率标量 R[5]．

$$\left.\begin{aligned}&\omega^1_0=\omega^0_1=\mu'e^{\mu}\omega^0\\&-\omega^2_1=\omega^1_2=-\frac{e^{\mu}}{r}\omega^2\\&-\omega^3_1=\omega^1_3=-\frac{e^{\mu}}{r}\omega^3\\&-\omega^3_2=\omega^2_3=-\frac{\cot\theta}{r}\omega^3\end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}&R^0_{101}=-[\mu'e^{2\mu}]'\\&R^0_{202}=R^0_{303}=R^1_{212}=R^1_{213}=-\frac{\mu'e^{2\mu}}{r}\\&R^2_{323}=\frac{1-e^{2\mu}}{r^2}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$R_{00}=(\mu'e^{2\mu})'+\frac{2\mu'e^{2\mu}}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{11} &= -(\mu' e^{2\mu})' + \frac{2\mu' e^{2\mu}}{r} \\ R_{22} &= R_{33} = -\frac{2\mu' e^{2\mu}}{r} + (1 - e^{2\mu})/r^2 \\ R &= -2(\mu' e^{2\mu})' - \frac{8\mu' e^{2\mu}}{r} + 2(1 - e^{2\mu})/r^2 \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

假定物质场是理想流体，则

$$T_{00} = \rho,\quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = p, \tag{14}$$

将(13)，(14)式代入方程(8)我们有

00分量:

$$-\frac{1}{2}K_f\rho = 2\alpha\left(\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right)R + \beta\left(\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right) + \frac{1}{2}(\alpha R^2 + \beta R) + 2\alpha R^{\sigma}_{;\sigma}, \tag{15}$$

11分量:

$$-\frac{1}{2}K_f p = 2\alpha\left(-\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right)R + \beta\left(-\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right) - \frac{1}{2}(\alpha R^2 + \beta R) - 2\alpha R^{\sigma}_{;\sigma} + 2\alpha R_{;rr}, \tag{16}$$

22分量

$$-\frac{1}{2}K_f p = -\frac{1}{2}(\alpha R^2 + \beta R) - 2\alpha R^{\sigma}_{;\sigma}, \tag{17}$$

及

$$K_f T^{\mu}_{\mu} = 2\beta R + 12\alpha R^{\mu}_{;\mu}. \tag{18}$$

(17)+(15)有

$$-\frac{K_f}{2}(p + \rho) = 2\alpha\left(\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right)R + \beta\left(\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right). \tag{19}$$

(16)－(17)有

$$0 = 2\alpha\left(-\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right)R + \beta\left(-\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right) + 2\alpha R_{;rr}. \tag{20}$$

以上式中，已令 $X = e^{2\mu}$, $X' = \frac{dX}{dr}$, $X'' = \frac{d^2X}{dr^2}$. 考虑到(18)式，(20)式可改写为

$$-\frac{K_f}{2}p + \frac{K_f}{6}\rho = 2\alpha\left(-\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right)R + \beta\left(-\frac{1}{2}X'' + \frac{X'}{r}\right) - \frac{1}{3}\beta R \tag{21}$$

联立(19)式和(21)式得

$$-\frac{2}{3}K_f\rho = -2\alpha\left(X''^2 + \frac{4X'X''}{r} + 2\frac{XX''}{r^2} - \frac{2X''}{r^2}\right)$$

$$+\beta X''+\frac{1}{3}\beta R. \tag{22}$$

方程 (22) 有形如 $X=1-\Lambda r^2$ 的解。将此解代入 (22) 式不难得到一个代数方程

$$48\alpha\Lambda^2-2\beta\Lambda=\frac{16}{3}\pi G_f\rho. \tag{23}$$

对 (23) 式作如下讨论:

(一) $\alpha=0$, $\beta=\pm1$ 的情况,显然

$$\Lambda=\mp\frac{8\pi G_f}{3}\rho. \tag{24}$$

此时,我们得到的度规解正是强引力 de-Sitter 型解[6],它表明在不考虑 R^2 项时,其结果应与通常强引力结论相同。

(二) $\alpha=1$, $\beta=0$ 的情况,由 (23) 式解得

$$\Lambda=\pm\frac{1}{3}\sqrt{\pi G_f\rho}. \tag{25}$$

我们仍得到一个 de-Sitter 型度规,其等效引力耦合常数 $G_f'=\frac{\sqrt{\pi}}{8}(\rho G_f)^{-1/2}G_f$, 只要 $\rho>\frac{1}{G_f}$, 我们便有

$$G_f'<G_f. \tag{26}$$

条件 $\rho>\frac{1}{G_f}$ 通常是容易满足的,实际上 $G_f=10^{38}G_N$, G_N 为牛顿引力常数，而对强子而言 $\rho\sim10^{20}\,\mathrm{kg}m^{-3}$.

(26) 式表明,引入 R^2 的贡献,等效于一个使引力减小的作用。

(三) $\alpha=1$, $\beta=\pm1$ 的情况

$$\Lambda=\pm\frac{1}{48}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{48}\right)^2+\frac{\pi G_f\rho}{9}}. \tag{27}$$

可见,在一般情况下,只要引入 R^2 项的修正,亦将使引力减弱。这一结论是具有合理性的,否则,会出现无限增大的引力。实际上,由 (13) 式 R 的表达式及 $X=e^{2\mu}$, 我们容易求得

$$R=16\Lambda, \tag{28}$$

于是,当 G_f 增大时,曲率 R 增大, R^2 项修正若可以使 G_f 再增大,那将造成一个恶性循环。而我们所得到的结论，却能起着一个稳定的作用，使我们可以得到一个稳定的强引力。这对稳定基本粒子的结构是十分重要的。实际上,它避免了奇异性出现。

参 考 文 献

[1] A. Einstein., reprimted in: Principle of Relativity., ed. A. Sommerfield (Dover. London, 1923), 191.

[2] A. Salam., in: Five Deades of Weak Interactions., ed. N. P. Chang, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **294**(1977), 12.

[3] C. Sivaram and K. P. Sinha., *Phys Rep*, 51, N.3, (1979), 111—187.

[4] H. A. Buchdahl., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **N.8**(1979), 1234.

[5] 李元杰,高能物理与核物理,11(1989),990.
[6] C. Sivaram and K. P. Sinha, Progr. Theor. Phys. (Kyoto) 55, (1976) 1288.
[7] Luis Farina-Busto., *Phys. Rev.*, N.6(1988), 1741.

A Strong Gravity With the Term R^2

LI YUANJIE

(*Department of Physics, Huazhong University of Science and Techmology, Wuhan* 430074)

ABSTRACT

In this paper, we introduce a square term of the curvature scale R in the strong gravity Lagrange with de-Sitter form, the square term has made the coupling coefficient of strong gravity G_f to decrease, it can get a reasonable strong gravity model and avoid singularity.