第13卷 第11期　　高能物理与核物理　　Vol. 13, No. 11
1989年11月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Nov., 1989

挠率、曲率及强引力模型

李　元　杰
(华中理工大学物理系，武汉)

摘　　要

本文在 Eeinstein 方程中，引入曲率和挠率所产生的能-动张量，证明了，曲率修正导致场方程的不相容．而挠率修正可引出一个强引力的模型．这一结果与通常 Poincare 规范引力论认为曲率与强耦合成正比之观点大不相同．

一

近年来，人们应用 Poincare 规范引力理论找到了许多数学解[1-6]，其中一些解被用来解释强引力[3-6]．但是，由于在真空中解出现发散，同时在这些解中，强、弱引力往往交织在一起，使得这些解的物理意义不十分明确．为了进一步弄清其物理图象，我们在这里提出了一个较具体的模型，并分别引入曲率或挠率的修正．考察分析其作用．假定一个质量为 m 的粒子，有球对称的密度分布 $\rho(r)$．在粒子内部存在曲率和挠率，整个体系是球对称的．

首先，在 $r \leqslant R$ 时空流形上，引入活动标架场 V^i_μ，R 是粒子的半径．取

$$V^0_\mu=(e^\mu,0,0,0),\ V^1_\mu=(0,e^\nu,0,0),$$
$$V^2_\mu=(0,0,r,0),\ V^3_\mu=(0,00,r\sin\theta),$$

在标架空间中，度规为

$$ds^2=-(\omega^0)^2+(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2, \tag{1}$$

其中，$\omega^0=e^\mu dt$，$\omega^1=e^\nu dt$，$\omega^2=rd\theta$，$\omega^3=r\sin\theta d\varphi$．由于体系为球对称，不妨令 $\nu=-\mu$，且非零的挠率分量只可能有[7]：

$$T^0_{01}=f(r),\ T^1_{10}=h(r),\ T^2_{20}=T^3_{30}=k(r),\ T^2_{21}=T^3_{31}=-g(r). \tag{2}$$

依照 Carton 第一结构方程

$$\frac{1}{2}T^i_{jk}\omega^j\Lambda\omega^k=d\omega^i+\omega^i_j\Lambda\omega^j, \tag{3}$$

求出联络 1一形式 ω^i_j：

$$\omega^0_0=0,\ \omega^1_0=h\omega^1+(\mu^1e^\mu+f)\omega^0,\ \omega^2_0=k\omega^2,\ \omega^3_0=k\omega^3,$$

$$\omega^0_1=h\omega^1+(\mu^1e^\mu+f)\omega^0,\ \omega^1_1=0,\ \omega^2_1=\left(\frac{e^\mu}{r}-g\right)\omega^2,\ \omega^3_1=\left(\frac{e^\mu}{r}-g\right)\omega^3,$$

本文1989年2月22日收到．

$$\omega_2^0 = k\omega^2,\ \omega_2^1 = -\left(\frac{e^\mu}{r} - g\right)\omega^2,\ \omega_2^2 = 0,\ \omega_2^3 = \frac{\cot\theta}{r}\omega^3,$$

$$\omega_3^0 = k\omega^3,\ \omega_3^1 = -\left(\frac{e^\mu}{r} - g\right)\omega^3,\ \omega_3^2 = -\frac{\cot\theta}{r}\omega^3,\ \omega_3^3 = 0.$$

再由 Carton 第二结构方程

$$\frac{1}{2} R^i_{jkl}\omega^k \Lambda \omega^l = d\omega^i_j + \omega^i_k \Lambda \omega^k_j, \tag{4}$$

求得非零的 R^i_{jkl} 曲率分量为

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= -(\mu^1 e^{2\mu} + f e^\mu)' \equiv -A,\\
R^0_{202} &= R^0_{303} = -(\mu^1 e^\mu + f)\left(\frac{e^\mu}{r} - g\right) \equiv C,\\
R^0_{212} &= R^0_{313} = \frac{(kr)'}{r} e^\mu - h\left(\frac{e^\mu}{r} - g\right) \equiv -D,\\
R^1_{202} &= R^1_{303} = k(\mu' e^\mu + f) \equiv G = D,\\
R^1_{212} &= R^1_{313} = hk - (e^\mu - gr)' e^\mu / r \equiv -H,\\
R^2_{323} &= \frac{1}{r^2} + k^2 - \left(\frac{e^\mu}{r} - g\right)^2 \equiv L.
\end{aligned} \tag{5}$$

利用(5)式可求出

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R^i_{0io} = A - 2C,\ R_{11} = -A - 2H,\\
R_{22} &= R_{33} = C - H + L,\ R_{01} = R_{10} = 2D,
\end{aligned} \tag{6}$$

及
$$R = R^i_i = -2A + 4C - 4H + 2L.$$

最后，得到 Eeinstein 张量

$$\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}R = L - 2H,\\
G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}\eta_{11}R = -L - 2C,\\
G_{22} &= G_{33} = A - C + H,\\
G_{01} &= G_{10} = 2D.
\end{aligned} \tag{7}$$

至于能量-动量张量，一般有三个部分：

1. 物质的能-动张量 $\mathscr{T}_{ij}$.

假定物质为理想流体，则

$$\mathscr{T}_{00} = \rho,\ \mathscr{T}_{11} = \mathscr{T}_{22} = \mathscr{T}_{33} = p. \tag{8}$$

2. 规范势 $B^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}$ 对应的能-动张量：（这里 Γ^i_{jk} 为活动标架联络，T^i_{jk} 为挠率.）

$$t_{ij} = -\frac{1}{2}[R_{jlm}{}^n R^{lm}_{in}] + \frac{1}{8} R_{klm}{}^n R^{klm}{}_n \eta_{ij},$$

t_{ij} 是曲率的贡献．考虑到(5)式，经计算求得

$$t_{00}=A^2-L^2+2(C^2-H^2),\ t_{11}=L^2-A^2+2(C^2-H^2),$$
$$t_{22}=t_{33}=A^2-L^2,\ t_{01}=t_{10}=-4D(C-H). \tag{9}$$

3. 规范势 V^i_μ 对应的能动张量:

$$\tau_{ij}=-\frac{1}{2}T^m_{li}T^l_{jm}+\frac{1}{8}T^{mn}_lT^l_{mn}\eta_{ij}, \tag{10}$$

将(2)代入(10)得

$$\tau_{00}=\frac{1}{4}(f^2-h^2)-\frac{1}{2}(k^2+g^2),\ \tau_{11}=-\frac{1}{4}(f^2-h^2)-\frac{1}{2}(k^2+g^2),$$
$$\tau_{22}=\tau_{33}=\frac{1}{4}(f^2-h^2),\ \tau_{10}=\tau_{01}=kg, \tag{11}$$

τ_{ij} 是挠率的贡献．于是,一般情况下场方程的形式为:

$$G_{ij}=-8\pi\mathscr{T}_{ij}-G_l\tau_{ij}-\lambda t_{ij}, \tag{12}$$

(12)式是我们的基本方程.

二

现在,我们单独考虑曲率的贡献．这时方程(12)简化为

$$G_{ij}=-\lambda t_{ij}. \tag{13}$$

1) 在无挠情况下,即 $f=g=h=k=0$,令 $X=e^{2\mu}$ 则:

$$A=\frac{X''}{2},\ C=-\frac{X'}{2r},$$
$$D=G=0, H=C,\ L=\frac{1}{r^2}(1-X). \tag{14}$$

(13)式的具体形式为:

$$L-2C+\lambda(A^2-L^2)=0, \tag{15-1}$$
$$-L-2C-\lambda(A^2-L^2)=0, \tag{15-2}$$
$$A+\lambda(A^2-L^2)=0, \tag{15-3}$$

由此不难得到:

$$C=0,\ A=L=0, \tag{16}$$

因此 $t_{ij}=0$，即曲率的贡献为 0.

2) 在有挠情况下,假定 $f=-h,\ g=k$．令 $X=e^{2\mu},\ Y=fe^{\mu},\ Z=ke^{\mu}$．则

$$A=\frac{X''}{2}+Y',\ C-H=-\frac{X'+2Y}{r},$$
$$D=G,\ L=\frac{1}{r^2}(1-X)+\frac{2Z}{r}. \tag{17}$$

(13)式的具体形式为:

$$L-2H+\lambda[A^2-L^2+2(C^2-H^2)]=0, \tag{18-1}$$
$$-L-2C+\lambda[L^2-A^2+2(C^2-H^2)]=0, \tag{18-2}$$

$$A - C + H + \lambda(A^2 - L^2) = 0, \tag{18-3}$$

$$D - 2\lambda D(C - H) = 0, \tag{18-4}$$

解(18)式得

$$-\frac{X' + 2Y}{r} = \frac{1}{2\lambda}, \tag{19}$$

$$\frac{X''}{2} + Y' - \frac{1}{r^2}(1 - X) - \frac{2Z}{r} = \frac{1}{\lambda}. \tag{20}$$

又由 $D = G$ 可证明

$$Z' = -\frac{Z + Y}{r}. \tag{21}$$

容易证实方程(19)—(21)是不相容的．事实上，利用(19)，可将(20)式写为

$$X = 1 + 2Zr + \frac{5}{4\lambda}r^2. \tag{22}$$

将(22)式对 r 求导，并考虑(19)，(21)式就得

$$-\frac{r}{2\lambda} - 2Y = 2r\left(-\frac{Z + Y}{r}\right) + 2Z + \frac{5}{2\lambda}r. \tag{23}$$

显然(23)式是不成立的．

进一步，我们同时考虑曲率与挠率的贡献，类似地讨论表明，场方程仍是不相容的．为此，我们认为 $\lambda = 0$，它表明规范势 B^i_{jk} 产生的能-动张量在场方程中可略去不计．

三

最后，我们研究挠率的贡献．这时场方程(12)简化为：

$$G_{ij} = -8\pi\mathscr{T} - G_f\tau_{ij}. \tag{24}$$

如果我们取挠率分量为

$$g = f = k = -h,$$

1) 对于点模型的粒子 $\rho(r) = \rho_0\delta(r)$，

2) 对于理想流体模型粒子 $\rho(r)$ 在 $r \leqslant R$ 范围内有限．

这时，有

$$\begin{gathered} A = \frac{X''}{2} + Y', \quad L = \frac{1}{r^2}(1 - X) + \frac{2Y}{r}, \\ C - H = -\frac{X' + 2Y}{r}, \quad Y' = -\frac{2Y}{r}(D = G). \end{gathered} \tag{25}$$

(24)式的具体形式为

$$L - 2H = -8\pi\rho + G_f k^2, \tag{26-1}$$

$$-L + 2C = -8\pi p + G_f k^2, \tag{26-2}$$

$$A - C + H = -8\pi p, \tag{26-3}$$

$$D = -\frac{G_f}{2}k^2. \tag{26-4}$$

解(26)式得

$$A+2L+C-H=-8\pi\rho.$$

即

$$\frac{X''}{2}+Y'+\frac{2}{r^2}(1-X)+\frac{4Y}{r}-\frac{X'+2Y}{r}=-8\pi\rho. \tag{27}$$

由(26-4)得

$$\frac{X'}{2}+Y=-\frac{G_f}{2}Y. \tag{28}$$

联立(27),(28)式可求得

$$X=1+\frac{G_f}{2}Yr-\frac{1}{4}G_fr^2Y'+2rY+4\pi\rho r^2. \tag{29}$$

再由(25)式 $Y'=-\frac{2Y}{r}$ 解得

$$Y=-\frac{C_0}{r^2}, \tag{30}$$

将(30)式代入(29)有

$$X=1-\frac{C_0(G_f+2)}{r}+4\pi\rho r^2. \tag{31}$$

取 $C_0=\frac{2mG_f}{G_f+2}$, 则

$$X=1-\frac{2G_fm}{r}+4\pi\rho r^2. \tag{32}$$

由于在 $r\leqslant R$ 范围,通常 $4\pi\rho r^2$ 项可略去,所以无论在真空 $\rho=0$ 处或 ρ 有限下,粒子内部度规都可取为

$$X=1-\frac{2G_fm}{r}, \tag{33}$$

其中,m 是粒子质量,G_f 是强引力耦合常数. (33)式表明、强引力与粒子内部物质分布的关系不大. 在粒子半径处 $r=R$, 应有 $X=e^{2\mu}=0$[6] 即:

$$R=2G_fm.$$

以质子来估计, $R_p=2\times10^{-14}$ cm, $m_p=1.67\times10^{-27}$kg 可得

$$G_f=5.39\times10^{27}\mathrm{m^3s^{-2}kg^{-1}}=0.8\times10^{38}G_N.$$

所以,强引力常数 G_f 约为牛顿引力常数 G_N 的 10^{38} 倍.

如果不考虑挠率,或者挠率为0时,场方程在真空中有

$$L-2H=0,\quad -L-2C=0,\quad A-C+H=0.$$

容易求得

$$X=1-\frac{2m}{r}, \tag{34}$$

它是 Schwarzschid 外部解.

在粒子内部,场方程为

$$L-2H=-8\pi\rho,\quad -L-2C=-8\pi p,\quad A-C+H=-8\pi p,$$

解得

$$L-2H=-8\pi\rho,$$

即

$$\frac{X'}{r}-\frac{1}{r^2}(1-X)=-8\pi\rho.$$

于是

$$X=1-\frac{2m(r)}{r}, \tag{35}$$

其中

$$m(r)=\int_0^r 4\pi r^2\rho(r)dr.$$

若 $\rho=$ 常量，则

$$X=1-\frac{8\pi}{3}\rho r^2. \tag{36}$$

解(35)和(36)是 Schwarzschid 的内部解，从以上讨论，使我们有理由推测，挠率在粒子内部的存在．可以产生一个与牛顿引力不同的强引力，这个强引力与强力同量级，它为我们研究强作用提供了一种新的方式．

参 考 文 献

[1] F. W. Hehl., In cosmology and gravitation, eds. P. G. Bergmann and V. de Sabkate (1980).
[2] 郭汉英、吴詠时，张元仲，科学通报，18(1973).
[3] Shao Chang gui, Xu Bang qing., *Inter. J. Theor. Phys*, V. **25**, (1986), 347.
[4] Peter. Baekler, *Phys. Lett*, V. **96**A, (1983), 279.
[5] Peter. Baekler, *Phys. Lett*, V. **99**B, (1981), 329.
[6] C. Siraram and K. P. Sinha, *Phys. Rep*, **51**, N. **3**, (1979), 111.
[7] P. Baekler Diploma. thesis Univ. of Cologne (1980).

A MODEL OF CURVATURE, TORSION AND STRONG GRAVIEY

Li Yuanjie

(*Department of physics, Huazhong of Science and Tehnology, Wuhan*)

Abstract

In this paper the stress-energy tensors of curvature and of torsion are introduced. We may derived a model of strong gravity from Einstein's equation with the stress-energy tensor of torsion, while Einstein's equation with the stressenergy tensor of curvature is an inconsistent equation. This conclusion is different from the Poincare gauge theories of gravitation, in which the curvature is directly proportional to the strong coupling.