

# 离散混沌系统的自适应自由递阶 变结构控制研究

黄良玉<sup>1,2</sup>

(1. 广西大学 物理科学与工程技术学院, 广西 南宁 530004; 2. 上海交通大学 电信学院 自动化系, 上海 200240)

**摘要:** 本文采用自适应自由递阶变结构控制的方法对离散混沌系统进行控制, 使输出达到设定的目标值。研究提出当接近超平面  $s(k)=0$  的小区域内时加入自适应控制律, 使控制器能随  $x(k)$  与目标值之间的误差而改变, 自适应地缩小控制范围和控制强度, 避免了在接近超平面的较小区域内仍采用较大且固定的控制器进行跳跃的控制。采用这种方法能精确得到输出域内的任意目标值, 有效降低输出抖振, 提高控制精度, 并可在低能耗的条件下实现系统输出功率的灵活调整。

**关键词:** 离散混沌系统; 自适应自由递阶; 变结构控制

中图分类号: TP273. 23

文献标志码: A

文章编号: 1000-6931(2009)04-0355-05

## Adaptive Freely Hierarchical Variable Structure Control of Discrete Chaotic System

HUANG Liang-yu<sup>1,2</sup>

(1. College of Physical Science and Technology, Guangxi University, Nanning 530004, China;

2. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** Discrete chaotic system was controlled to reach the given orbit  $x_r$  by using the adaptive freely hierarchical variable structure control scheme. The adaptive control scheme was used when hierarchical sliding mode was close to the hyperplane in a small scope. The control intensity and control scope would be changed adaptively with the variation of the error between  $x(k)$  and  $x_r$  by using the adaptive scheme. The large-scale control intensity was avoided in the small control scope by using this control scheme. Any orbit in the output scope could be obtained accurately by using this control scheme. The output's dithering was reduced effectively and the precision of controlling was enhanced by using this adaptive freely hierarchical variable structure control scheme.

**Key words:** discrete chaotic system; adaptive freely hierarchical; variable structure control

20 世纪 60 年代, Emelyanov、Utkin 和 Itkis 提出了变结构控制理论, 目前, 变结构控制已成为控制理论的一重要分支<sup>[1-4]</sup>。滑模变结构控制由于具有优良特性<sup>[5]</sup>, 在混沌控制领域中受到了广泛关注<sup>[5-12]</sup>。本文研究混沌系统的自适应自由递阶变结构控制的问题, 设计自适应自由递阶变结构控制器, 通过对 Logistic 混沌系统控制的数值仿真, 验证所设计控制器的有效性。

## 1 自适应自由递阶变结构控制原理

在自由递阶控制作用下, 系统实现递阶控制, 即  $x_0 \rightarrow S_{i_1} \rightarrow S_{i_1 i_2} \rightarrow \dots \rightarrow S_{i_1 i_2 \dots i_m} = S_0$ ,  $x_0$  为任一初始状态, 而此时  $(i_1 i_2 \dots i_m)$  的顺序事先并不知道且也无需知道, 这个序列的排列顺序完全决定于系统的初始值  $x_0$ 。需要做的是寻求适当的控制器及切换函数, 使其达到: 1) 存在滑动模态; 2) 所有运动于有限时间内到达  $S_0$ ; 3) 设计控制器使得滑动模态趋向超平面  $S_0 = 0$ <sup>[1-2]</sup>。

### 1.1 滑动模态的存在性

假设系统可描述为:

$$\dot{x} = Ax + Bu, s = Cx \quad (1)$$

式中:  $x$  为状态向量;  $u$  为控制向量;  $s$  为滑动模态,  $s = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$ ;  $A, B, C$  为常系数矩阵。

希望在每一切换面  $S_i$  存在滑动模态, 使其满足条件  $\begin{cases} \dot{s}_i(x) > 0, & \text{当 } s_i(x) < 0 \\ \dot{s}_i(x) < 0, & \text{当 } s_i(x) > 0 \end{cases}$ , 应对所有  $i = 1, 2, \dots, m$  成立。为此, 可取一般形式的趋近律:

$$\dot{s} = -(\epsilon \operatorname{sgn} s + f(s)) \quad (2)$$

其中:  $\operatorname{sgn} s = [\operatorname{sgn} s_1, \dots, \operatorname{sgn} s_m]^T$ ;  $f(s) = [f_1(s), \dots, f_m(s)]^T$ ;  $\epsilon = \operatorname{diag}[\epsilon_1, \dots, \epsilon_m]$ ,  $\epsilon_i > 0, s_i f_i(s) \geq 0, f_i(0) = 0$ 。

这时求出的控制, 即足以保证  $S_i$  上布满止点<sup>[2]</sup>。对式(1)中的  $s$  求导数并将  $x$  的表达式代入, 得  $\dot{s} = CAx + CBu$ , 带入式(2), 可得变结构控制:

$$u = -(CB)^{-1}(CAx + \epsilon \operatorname{sgn} s + f(s)) \quad (3)$$

不仅  $S_i$  上存在滑动模态, 且  $s_{i_1 i_2} (i_1 i_2 = 1, 2, \dots, m)$  上和  $s_{i_1 i_2 \dots i_m} = s_0$  上均存在滑动模态, 每 1 级减低维数 1 次, 构成了递阶控制。

### 1.2 $s_0$ 子空间的到达性

将式(3)代入式(1), 得变结构系统的闭环

系统的运动微分方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = [I - B(CB)^{-1}C]Ax - \\ \quad B(CB)^{-1}\epsilon \operatorname{sgn} s - B(CB)^{-1}f(s) \\ s_i = c_i x \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (4)$$

将系统(4)表示成 1 个  $n$  维空间的系统简单形式: 其中,  $c_i$  表示  $C$  的第  $i$  行,  $\dot{x} = f(x), x \in \mathbf{R}^n = \chi$ 。在  $\mathbf{R}^n$  中取  $n - m$  维子空间  $l_0 = \{x | s = Cx = 0\} = \ker C$ , 考虑  $\{s\} = \{(s_1, \dots, s_m)\} = \mathbf{R}^m = \nu$  为  $m$  维空间, 则系统  $\dot{x} = f(x), x \in \mathbf{R}^n = \chi$ , 令  $s_1 = c_1 x, \dots, s_m = c_m x$ , 则以上系统可转换成一  $m$  维系统:

$$\dot{s} = g(s), s = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T \in \mathbf{R}^m = \nu \quad (5)$$

即可将对系统(1)的研究转化为在  $\nu$  空间内对动力学系统(5)的研究。若确信  $s = 0$  是全局渐进稳定的, 即  $s_i \rightarrow 0; i = 1, 2, \dots, m$ , 那么,  $c_i x \rightarrow 0; i = 1, 2, \dots, m$ , 这意味着  $x \rightarrow s_0$  (符号  $\rightarrow$  表示到达)。对式(5)构造李雅普诺夫函数:  $v = \frac{1}{2}s^T s$ , 求其导数, 得  $\dot{v} = \frac{1}{2}\dot{s}^T s + \frac{1}{2}s^T \dot{s} = s^T \dot{s} =$

$$-\sum_{i=1}^m [\epsilon_i |s_i| + s_i f_i(s_i)],$$

由于在进行趋近率的设计时便已设定  $\epsilon_i > 0, s_i f_i(s) \geq 0, f_i(0) = 0$ ,

因此可得  $\dot{v} = -\sum_{i=1}^m [\epsilon_i |s_i| + s_i f_i(s_i)] < 0$ 。由李雅普诺夫稳定性定理可知, 所有  $S_i$  均趋向  $s = 0$ , 并于有限时间到达它, 也就是  $s_0$  子空间是可到达的。

### 1.3 控制器的设计

本文主要以 Logistic 混沌系统为例, 讨论离散混沌系统控制问题。文献[1]中已证明, 只要离散系统的采样步长小于超平面的法线方向向量, 则离散系统的变结构控制可按照连续系统的设计方法进行设计。只要所选择的超平面满足以上条件, 那么, 按照上述自由递阶控制的方法来设计离散系统的变结构控制器是合理并可行的。且文献[1]指出, 对于离散系统, 进入滑模区的条件是:

$$\begin{cases} (s(k+1) - s(k)) \operatorname{sgn} s(k) < 0 & (6) \\ (s(k+1) + s(k)) \operatorname{sgn} s(k) > 0 & (7) \\ \forall s(k) \neq 0 \end{cases}$$

其中: 式(6)为保证状态轨迹进入滑模区  $s(k) = 0$  上的必要条件, 而式(7)则为保证状态轨迹收敛到  $s(k) = 0$  上的条件。只要式(6)、

(7)的条件被满足,则系统必能进入滑模区<sup>[2]</sup>。

在上述自由递阶变结构控制基础上加入自适应控制律:

$$\left. \begin{array}{l} k_0 * x(k) \\ \text{if } |s(k)| < k_0, \text{ then } k_0 = s(k) \\ \text{if } |s(k)| < \delta \end{array} \right\} \quad (8)$$

该项表示,当  $s(k)$  的值落入接近超平面  $s(k) = 0$  的很小区域  $\delta$  内时,通过自适应的方法调整控制器使其随  $x(k)$  值自适应改变,使滑动模态趋向超平面  $S_0 = 0$ 。本文中取  $k_0 = 0.001$ ,  $\delta = 0.0005$ 。得到控制策略如下:

$$u = \left\{ \begin{array}{l} u_{e1} * \text{sgn } s(k), \text{ if } |s(k)| \geq |\Delta_1| \\ u_{e2} * \text{sgn } s(k), \\ \text{if } |\Delta_2| \leq |s(k)| < |\Delta_1| \\ \vdots \\ u_{ei} * \text{sgn } s(k), \\ \text{if } |\Delta_i| \leq |s(k)| < |\Delta_{i-1}| \\ \vdots \\ k_0 * x(k) \\ \text{if } |s(k)| < k_0, \text{ then } k_0 = s(k) \\ \text{if } |s(k)| < \delta \end{array} \right\} \quad (9)$$

自适应控制律的加入,避免了在接近超平面的小区域内仍采用较大且固定的控制器进行跳跃的控制,有效消除了抖振,且能提高控制精度。

控制器采用离散趋近律方法  $s(k+1) - s(k) = -\epsilon T \text{sgn } s(k) - qTs(k)$  计算  $u_i$ ,再取  $u_{ei} = u_i - u_{i-1}$ ,逐步缩小控制域和控制强度,达到消除抖振的目的。其中,  $\epsilon > 0, q > 0, qT < 1$ ,  $T$  为采样时间。当以上控制律满足设计时,则满足进入滑模区的必要条件和收敛条件。

## 2 Logistic 混沌系统的自适应自由递阶变结构控制原理及数值模拟结果

### 2.1 Logistic 混沌系统的自适应自由递阶变结构控制原理

Logistic 系统状态方程如下:

$$x(n+1) = \mu x(n)[1-x(n)] - u \quad (10)$$

当  $\mu = 3.8$  时,计算得到系统的 Lyapunov 指数为 0.44488,表明此时系统处于混沌状态。

采用趋近律控制  $s(k+1) - s(k) = \mu x(n)[1-x(n)] + u - (x(k) - x_r) = -\epsilon T \cdot \text{sgn } s(k) - qTs(k)$ ,取滑动超平面为  $s(k) =$

$x(k) - x_r$ ,得到控制器的表达式  $u = -\mu x(n) \cdot [1-x(n)] + (x(k) - x_r) - \epsilon T \text{sgn } s(k) - qTs(k)$ 。取递阶滑动模态  $s_i(k) = x(k) - x_r = \Delta_i$ ,并带入控制器的表达式,可得  $u_i = -\mu(x_r + \Delta_i)[1 - (x_r + \Delta_i)] + \Delta_i - \epsilon T \text{sgn } \Delta_i - qT\Delta_i$ ,  $u_{ei} = |u_i - u_{i-1}|$ 。取  $T = 1$  计算机单位采样时间,  $q = 0.146, \epsilon = 0.717$ 。由  $u_i$  的表达式可见,  $u_i$  由  $\Delta_i$  和  $x_r$  共同确定,其中,  $x_r$  为目标轨道,它可是系统的平衡点,也可是输出域中的任意周期轨道,  $\Delta_i$  是自由递阶滑模区。由自由递阶变结构控制原理知道,所有自由递阶滑模区同时启动,控制并不一定按照也没有必要按照  $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_m$  的顺序固定递阶,滑模区的选择由滑动模态的值确定,也可能一开始就可进入最小的滑模区,滑模区的大小可根据具体需要自由设定。

### 2.2 数值模拟结果

在式(9)的控制律中,自由递阶滑模区  $\Delta_i$  正负对称,  $\Delta_i$  取正值或负值计算得到的控制器均可满足控制律。然而,取  $\Delta_i$  的正值计算得到  $u_1$  的幅值较大,虽满足以上变结构控制律,但从本系统考虑,不符合实际应用,而取负值时计算得到  $u_1$  的幅值更为合理,因而,本文的控制器均是取  $\Delta_i$  的负值计算得到。

当目标值为系统平衡点,即  $x_r = 2.8/3.8$  时,  $\Delta_1 = \pm 0.01, u_{e1} = |u_1| = 0.05, \Delta_2 = \pm 0.005, u_2 = 0.033, u_{e2} = |u_1 - u_2| = 0.017, \Delta_3 = \pm 0.001, u_3 = 0.022, u_{e3} = |u_2 - u_3| = 0.011, \Delta_4 = \pm 0.0005, u_4 = 0.021, u_{e4} = |u_3 - u_4| = 0.001$ 。当  $|\Delta| < |\Delta_4|$  后,便按照自适应控制律进行控制,在超平面附近  $\Delta$  区域内,递阶控制达到滑动超平面。在迭代步数  $t = 300$  时,加入上述自适应自由递阶变结构控制,控制目标为  $x_r = 2.8/3.8$ ,控制结果如图1所示。图2a为输出误差  $e = x - x_r$ ,误差精度可达  $10^{-5}$  量级,图2b为不加入自适应控制律时的自由递阶变结构控制器的控制误差,存在  $10^{-2}$  量级的抖振误差(系统输出值为  $10^{-1}$  量级)。由图2中两个控制误差结果的比较可知,加入自适应控制律后能有效改善控制存在抖振的情况,并能较大幅度提高控制精度。

当目标值为输出域中的任意值时,亦可按照以上方法计算得到控制器的值。例如,当目

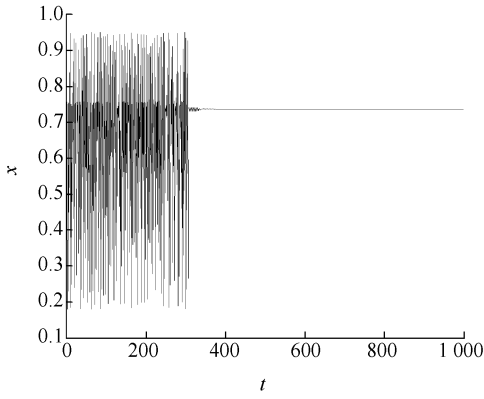


图1 控制目标为  $x_r=2.8/3.8$  的自适应自由递阶变结构控制结果

Fig. 1 Result of control target  $x_r=2.8/3.8$  by using adaptive freely hierarchical variable structure control scheme

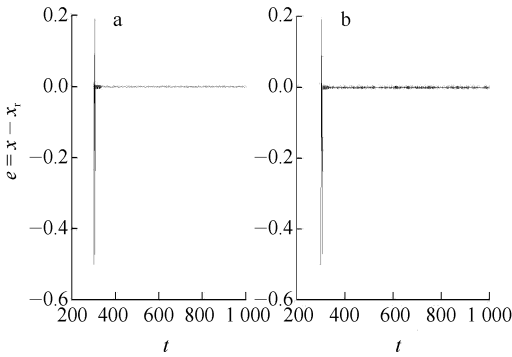


图2 控制目标为  $x_r=2.8/3.8$  的输出误差

Fig. 2 Output error of control target  $x_r=2.8/3.8$

- a——加入自适应控制律的输出误差；  
b——无自适应控制律的输出误差

标值  $x_r = 0.85$  时,  $\Delta_1 = \pm 0.01, u_{e1} = |u_1| = 0.2077, \Delta_2 = \pm 0.001, u_2 = 0.22899, u_{e2} = |u_1 - u_2| = 0.0213, \Delta_3 = \pm 0.0005, u_3 = 0.23074, u_{e3} = |u_2 - u_3| = 0.0018$ 。在迭代步数  $t = 300$  时, 加入控制, 得到两个稳定的输出轨道  $0.84929$  和  $0.48636$ , 如图 3 所示。在数值模拟过程中发现, 与图 3 结果类似, 当目标值为非平衡点时, 控制后将会得到两个稳定的周期轨道, 即目标值和由目标值产生的另外 1 个轨道。这一现象从系统本身的动力学特性很容易得到解释, 当控制目标设定为任意非平衡点的输出值时, 得到该目标值后, 下一时刻系统必然由目标值迭代产生另外 1 个轨道。例如,  $x(n) = 0.84929$ , 则  $x(n+1) = 3.8 \times 0.84929 \times (1 -$

$0.84929) = 0.48638$ , 而由于控制器的作用使输出值与理论值产生  $2 \times 10^{-5}$  的误差值, 因此得到的输出必然达到另一轨道  $0.48636$ , 而当到达轨道  $0.48636$  时, 控制器又将其拉回轨道  $0.84929$ 。因此, 系统输出并非在目标值附近出现抖振, 而是在两个输出轨道之间周期转换, 这是由控制器的作用和 Logistic 系统本身动力学性质所共同决定的。对于这种情况, 只需在输出端设置 1 个滤波器, 把不必要的那个轨道滤除, 这无论在工程设计和理论分析上均易做到。例如, 取控制目标为  $0.6$ , 在迭代步数  $t=300$  时, 加入自适应自由递阶变结构控制, 控制得到的输出如图 4a 所示为两个输出轨道, 在输出端设置限幅滤波器可精确得到所需的目标值。图 4b 为在输出端加入限幅滤波器滤除多余的轨道后得到目标值为  $0.6$  的输出波形。

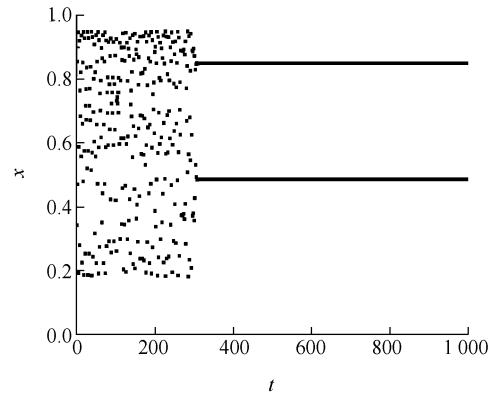


图3 控制目标为  $x_r=0.85$  的控制输出结果

Fig. 3 Output result of control target  $x_r=0.85$

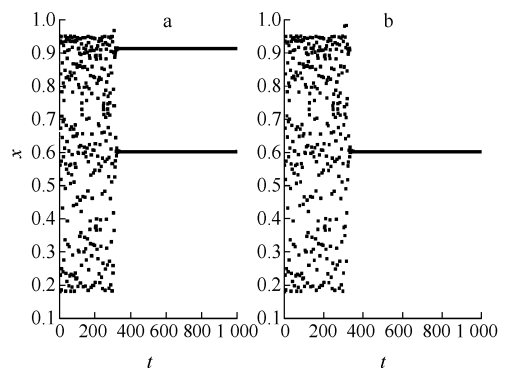


图4 控制目标为  $x_r=0.6$  时的输出结果

Fig. 4 Output result of control target  $x_r=0.6$

- a——设置滤波器前的输出结果；  
b——设置滤波器后的输出结果

由以上数值模拟结果可知,利用该控制方法不仅能灵活地控制系统达到任意周期轨道,且加入的控制器的幅值很小,即能够在低能耗的条件下实现系统输出功率的灵活调整。

### 3 结论和讨论

混沌系统镶嵌着的无穷多个周期轨道均可成为混沌控制的目标态,因而,可在混沌系统中用极小的代价来实现系统状态的转换。本文正是根据混沌控制的这一优点,采用自适应自由递阶变结构控制的方法使控制器能随 $x(k)$ 与目标值之间的差距自适应地改变,克服了变结构控制器在两个固定大小值之间变化的缺点,有效地消除了抖振,提高了控制精度。

然而,在本系统的控制中,由于选择非平衡点作为控制目标时,输出端会得到两个输出周期轨道,必须要使用滤波器的方法来滤除另外一多余的轨道,这毫无疑问使输出功率受到了削弱,这对于要求提高输出功率的系统来说是不利的,这一问题将有待于进一步解决。

#### 参考文献:

[1] 姚琼荟,黄继起,吴汉松. 变结构控制系统[M]. 重庆:重庆大学出版社,1997:87-90.

[2] 高为炳. 变结构控制理论基础[M]. 北京:中国科学技术出版社,1996:108-111.

[3] 胡耀明. 变结构控制理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2003:1-14.

[4] 李文林. 多变量系统变结构控制的一个滑模到达条件[J]. 控制与决策,2006,21(5):532-535.  
LI Wenlin. Reaching condition of variable structure control for multivariable systems[J]. Control and Decision, 2006, 21(5): 532-535(in Chinese).

[5] TAKAO S, YUICHI I, KOHEI Y, et al. Application of sliding mode control into a machine for studying bifurcations and chaos[C]//16th IEEE International Conference on Control Applications Part of IEEE Multi-conference on Systems and Control. Singapore: IEEE International Conference, 2007: 208-213.

[6] 黄良玉,罗晓曙,方锦清. 用滑模变结构控制方法实现外腔反馈式半导体激光器的混沌控制

[J]. 物理学报,2005,54(2):543-549.

HUANG Liangyu, LUO Xiaoshu, FANG Jinqing. Controlling chaotic dynamical behavior of a semiconductor laser with external optical feedback using sliding mode variable structure control scheme[J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(2): 543-549(in Chinese).

- [7] 陈从颜,宋文忠. 混沌同步的变结构控制[J]. 控制与决策,2001,16(6):937-939.  
CHEN Congyan, SONG Wenzhong. Switching manifold approach to chaos synchronization[J]. Control and Decision, 2001, 16(6): 937-939(in Chinese).
- [8] 杨志红,常风云,姚琼荟. 基于 T-S 模糊模型的离散混沌系统变结构控制[J]. 控制工程,2007,14(2):161-163.  
YANG Zhihong, CHANG Fengyun, YAO Qionghui. Variable structure control of discrete chaotic system based on T-S fuzzy models[J]. Control Engineering of China, 2007, 14(2): 161-163(in Chinese).
- [9] 黄丽蒂,姚婷好,赵文艳. 混沌系统的自适应变结构同步及其在保密通信中的应用[J]. 电路与系统学报,2006,11(2):103-106.  
HUANG Lidi, YAO Tingyu, ZHAO Wenyan. Adaptive variable structure synchronization of chaotic systems and its application to secure communications[J]. Journal of Circuits and Systems, 2006, 11(2): 103-106(in Chinese).
- [10] FANG Jinqing, HONG Yiguang, CHEN Guanrong. Switching manifold approach to chaos synchronization[J]. Phys Rev E, 1999, 59(3): R2523-R2526.
- [11] FANG Jinqing, YU Xinghuo, CHEN Guanrong. Controlling halo-chaos via variable structure method[J]. Chin Phys Lett, 2003, 20(12): 2110-2113.
- [12] 尹逊和,山秀明,任勇. 混沌系统的滑模变结构观测器同步[J]. 原子能科学技术,2003,37(2):185-192.  
YIN Xunhe, SHAN Xiuming, REN Yong. Observer based on sliding mode variable structure for synchronization of chaotic systems[J]. Atomic Energy Science and Technology, 2003, 37(2): 185-192(in Chinese).