◎博士论坛◎

不确定广义系统的时滞依赖鲁棒镇定

杨　瑞[1]，宋振明[2]
YANG Rui[1]，SONG Zhen-ming[2]

1.西南交通大学 智能控制开发中心，成都 610031
2.西南交通大学 数学系，成都 610031
1.Intelligent Control Development Center，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China
2.Department of Mathematics，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China
E-mail：yrhappy@gmail.com

YANG Rui，SONG Zhen-ming.Robust delay-dependent stabilization for uncertain singular systems.Computer Engineering and Applications，2008，44（20）：1-3.

Abstract： The robust delay-dependent stabilization problem for uncertain singular systems is considered.Delay-dependent stability and stabilization criterions are formulated in terms of Linear Matrix Inequalities（LMIs）by Lyapunov method.A new method that introduces the new free-weighting matrices is proposed to estimate the upper bound of the derivative of the Lyapunov function by considering the additional useful terms which are ignored in previous methods.An algorithm involving convex optimization is proposed to design a fuzzy controller guaranteeing a suboptimal maximal delay such that the system can be stabilized.Two numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.
Key words： delay-dependent；uncertain singular system；robust stabilization；Linear Matrix Inequality（LMI）

摘　要：研究不确定广义系统的时滞依赖鲁棒镇定问题。利用 Lyapunov 泛函方法，得到一个线性矩阵不等式（LMIs）形式的时滞依赖稳定与镇定判据。新方法考虑一些以前方法中通常忽略的有用的项，引入一些自由权重矩阵，估计 Lyapunov 泛函导数的上界；再用凸优化算法，进一步给出状态反馈控制器的设计方法。最后通过两个仿真示例表明了新方法的有效性。
关键词：时滞依赖；不确定广义系统；鲁棒镇定；线性矩阵不等式（LMI）
DOI：10.3778/j.issn.1002-8331.2008.20.001　**文章编号：**1002-8331（2008）20-0001-03　**文献标识码：**A　**中图分类号：**O231

1 引言

近年来，时滞系统由于具有重要的实际意义而成为控制理论的研究热点之一。在实际问题中，时滞因素通常会导致整个系统性能的下降，甚至不稳定。从是否考虑时滞大小的角度来说，时滞系统稳定性问题的研究通常分为时滞无关和时滞依赖稳定性。对于二者的稳定性设计而言，一般是时滞无关稳定性设计方案比较保守，特别是在时滞较小的时候。对时滞依赖稳定性的设计一般采用系统模型变换和矩阵向量不等式的方法。在随后的研究中，人们发现这样得到的时滞依赖条件仍然十分保守，为降低所得结果的保守性，Yong He[1-3]引入自由权矩阵，并巧妙运用 Leibniz-Newton 公式，得到了保守性较小的稳定性条件，Xu S.[4,5]则避免采用文献[6-8]中的系统模型变换和向量不等式，使所得的时滞依赖的条件有了很大的改进。文献[9-15]又把它推广到广义系统中，也取得了一些成果。

本文考虑不确定广义系统的时滞依赖稳定和镇定问题。无需对广义系统作假设和模型变换，得到了基于 LMIs 的时滞依赖稳定和镇定的充分条件。在 Leibniz-Newton 公式中加入自由权重矩阵来调整对其中各项的影响，并且通过考虑一些以前方法中通常忽略的有用项来估计 Lyapunov 泛函导数的上界。最后给出的仿真示例通过与以往对比，表明了本文方法具有较小的保守性。

在本文中，矩阵 $X>0(X\geqslant 0)$ 表示 X 为正定（半正定）矩阵，符号“*”表示矩阵中对称位置矩阵的转置。

2 模型描述和预备知识

考虑如下的一类不确定广义时滞系统

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_\tau+\Delta\boldsymbol{A}_\tau)\boldsymbol{x}(t-\tau)+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(t)\qquad(1)$$

其中，$\boldsymbol{E}\in R^{n\times n}$ 是奇异矩阵，并且 $rank(\boldsymbol{E})=r<n$；$\boldsymbol{x}(t)\in R^n$，$\boldsymbol{u}(t)\in$

基金项目：国家自然科学基金（the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60474022）；教育部博士点专项科研基金资助项目（Doctoral Fund of Ministry of Education of China under Grant No.20060613007）。
作者简介：杨瑞（1980-），女，博士研究生，研究方向：模糊控制，鲁棒控制，广义系统理论等；黄天民（1958-），男，教授，研究方向：模糊控制，智能控制及非线性控制等。
收稿日期：2008-03-11　**修回日期：**2008-04-24

R^m 分别为系统的状态向量和控制输入向量；$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}_\tau$、$\boldsymbol{B}$ 是适当维数的已知常数矩阵；$\tau>0$ 是滞后时间常数；$\boldsymbol{\phi}(t)$是给定的初始向量值连续函数；$\Delta\boldsymbol{A}$、$\Delta\boldsymbol{A}_\tau$、$\Delta\boldsymbol{B}$ 是适当维数的不确定矩阵函数，表示系统模型中的参数不确定性。初始条件为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$，$t\in[-\tau,0]$，$\boldsymbol{\varphi}(t)\in C[-\tau,0]$为已知相容的初始函数。假设所考虑的参数不确定性是范数有界的，并具有以下形式：

$$[\Delta\boldsymbol{A},\Delta\boldsymbol{A}_\tau,\Delta\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)[\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_\tau,\boldsymbol{G}_2] \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{G}_1$、$\boldsymbol{G}_\tau$、$\boldsymbol{G}_2$ 是适当维数的已知常数矩阵，反映了不确定性的结构信息。$\boldsymbol{F}(t)$是满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$ 的不确定参数矩阵，它可以是时变的。

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_\tau+\Delta\boldsymbol{A}_\tau)\boldsymbol{x}(t-\tau)$$

选取状态反馈控制器为 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$，则构成如下闭环系统：

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}_K+\Delta\boldsymbol{A}_K)\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_\tau+\Delta\boldsymbol{A}_\tau)\boldsymbol{x}(t-\tau)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),t\in[-\tau,0]\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}_K=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$，$\Delta\boldsymbol{A}_K=\Delta\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$。

在证明本文主要结果之前，先给出下面有用的定义和引理：

定义 1 (1)如果行列式 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$不恒为 0，则称矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$是正则的。(2)如果矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$正则且 $\deg\{\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\}=rank\boldsymbol{E}$，则称矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$是无脉冲的。

引理 1[16] 给定矩阵 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}(t)$和对称负定矩阵 $\boldsymbol{N}$，不等式 $\boldsymbol{N}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}^{\mathrm T}\boldsymbol{F}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{D}^{\mathrm T}<0$ 对所有满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$成立的充要条件是存在某个标量 $\varepsilon>0$，不等式 $\boldsymbol{N}+\varepsilon\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm T}\boldsymbol{G}<0$ 成立。

3 主要结果

首先考虑 $u(t)=0$ 时，系统(1)的标称系统，有如下的时滞依赖稳定性准则：

定理 1 考虑系统(1)的标称系统，如果存在适当维数正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$，任意具有适当维数的 $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{N}\end{bmatrix}$，非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$，满足以下 LMI：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}\geqslant 0 \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} & \tau\boldsymbol{M} & \tau\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\\ * & \boldsymbol{\Phi}_{22} & \tau\boldsymbol{N} & \tau\boldsymbol{A}_\tau^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\\ * & * & -\tau\boldsymbol{R} & 0\\ * & * & * & -\tau\boldsymbol{R}\end{bmatrix}<0 \tag{4b}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}_{11}=\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{M}^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\Phi}_{12}=\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_\tau-\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{N}^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\Phi}_{22}=-\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{N}^{\mathrm T}$，则系统(1)的标称系统渐近稳定。

证明

(1)首先证明系统(1)标称系统的正则和无脉冲性。由于 $rank\boldsymbol{E}=q<n$，不失一般性，假设 $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}I_q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，把非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 做相应块的分解 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12}\\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22}\end{bmatrix}$，则条件(4a)成立等价于 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{11} & 0\\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_{11}=\boldsymbol{P}_{11}^{\mathrm T}>0$，$\boldsymbol{P}_{22}$ 非奇异。设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_\tau=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\tau11} & \boldsymbol{A}_{\tau12}\\ \boldsymbol{A}_{\tau21} & \boldsymbol{A}_{\tau22}\end{bmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{Q}_{12}^{\mathrm T} & \boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22}\end{bmatrix},\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12}\\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22}\end{bmatrix}$$

把它们代入式(4b)并利用 Schur 补可得：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{22}+\boldsymbol{Q}_{22} & \boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_{\tau22}\\ * & -\boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}<0$$

由此可知 $\boldsymbol{A}_{22}$ 非奇异，因此系统(1)的标称系统正则且无脉冲。

(2)证明系统(1)标称系统的渐近稳定性。选取 Lyapunov Krasovskii 泛函

$$\boldsymbol{V}(x_t)=\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3 \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{V}_2=\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$，$\boldsymbol{V}_3=\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)^{\mathrm T}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$。

记 $\boldsymbol{\omega}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\ \ \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-\tau)]^{\mathrm T}$，对于任意具有适当维数的矩阵 $\boldsymbol{W}$，由 Leibniz-Newton 公式知：

$$2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right]=0 \tag{6}$$

对 $\boldsymbol{V}_1$ 沿系统(3)的任意运动轨迹求时间导数，把式(6)的左边加进去，再由(4a)可得：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}_1=&2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_\tau\boldsymbol{x}(t-\tau))+\\ &2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right)=\\ &\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_\tau\\ * & 0\end{bmatrix}+\boldsymbol{W}[\boldsymbol{I}\ \ -\boldsymbol{I}]\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{W}^{\mathrm T}[\boldsymbol{I}\ \ -\boldsymbol{I}]\right)\boldsymbol{\omega}(t)-\\ &\int_{t-\tau}^{t}2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$\boldsymbol{V}_2$ 和 $\boldsymbol{V}_3$ 的导数为：

$$\dot{\boldsymbol{V}}_2=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-\tau)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-\tau)$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}_3=&\tau\dot{\boldsymbol{x}}(t)^{\mathrm T}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)^{\mathrm T}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s=\\ &\tau\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{A}_\tau^{\mathrm T}\end{pmatrix}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{A}_\tau)\boldsymbol{\omega}(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)^{\mathrm T}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

于是，$\boldsymbol{V}(x_t)$的导数为：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(x_t)=&\dot{\boldsymbol{V}}_1+\dot{\boldsymbol{V}}_2+\dot{\boldsymbol{V}}_3\leqslant\sum_{i=1}^{r}h_i(t)[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\omega}(t)-\\ &\int_{t-\tau}^{t}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{W}+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{W}^{\mathrm T}\boldsymbol{\omega}(t)+\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(s))\mathrm{d}s]\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_\tau\\ * & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}+\boldsymbol{W}[\boldsymbol{I}\ \ -\boldsymbol{I}]\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{W}^{\mathrm T}[\boldsymbol{I}\ \ -\boldsymbol{I}]+\tau\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{A}_\tau^{\mathrm T}\end{pmatrix}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{A}_\tau)+\tau\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{W}^{\mathrm T}$。因为 $\boldsymbol{R}>0$，所以式(7)的积分项不小于 0，只要满足 $\boldsymbol{\phi}<0$，则$\dot{\boldsymbol{V}}(x_t)<0$。再利用 Schur 补，$\boldsymbol{\phi}<0$ 等价于式(4b)，从而系统(3)渐近稳定。证毕。

注 1 定理 1 避免了系统模型转换和交叉项不等式的变形，通过考虑 $\boldsymbol{R}$ 的正定性，构造一个正的积分项，很方便地得到了系统渐近稳定的充分条件。

由于 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{e}^{-s\tau}A_\tau)=0$ 和 $\det(s\boldsymbol{E}^{\mathrm T}-\boldsymbol{A}^{\mathrm T}-\boldsymbol{e}^{-s\tau}A_\tau^{\mathrm T})=0$ 同解，因此系统(1)的标称系统正则、无脉冲且渐近稳定等价于系统

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_\tau^{\mathrm T}\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{8}$$

正则、无脉冲且渐近稳定。

再考虑闭环系统(3)的标称系统,用 $A+BK$ 替代式(4b)中的 A,易得如下的时滞依赖鲁棒镇定准则:

定理 2 考虑闭环系统(3)的标称系统,如果存在适当维数的正定对称矩阵 Q 和 R,非奇异矩阵 P,任意具有适当维数的 $W=\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ 和 V 满足

$$EP=P^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}\geqslant 0 \tag{9a}$$

$$\Omega=\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \tau M & \tau(AP+BV) \\ * & \Omega_{22} & \tau N & \tau A_\tau P \\ * & * & -\tau R & 0 \\ * & * & * & -\tau P^{\mathrm{T}}R^{-1}P \end{bmatrix}<0 \tag{9b}$$

其中 $\Omega_{11}=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+AP+BV+V^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+Q+ME^{\mathrm{T}}+EM^{\mathrm{T}}$,$\Omega_{12}=P^{\mathrm{T}}A_\tau^{\mathrm{T}}-ME^{\mathrm{T}}+EN^{\mathrm{T}}$,$\Omega_{22}=-Q-NE^{\mathrm{T}}-EN^{\mathrm{T}}$,则闭环系统(3)的标称系统渐近稳定,且反馈增益为 $K=VP^{-1}$。

最后考虑不确定闭环系统(3)的时滞依赖鲁棒镇定准则,有如下定理:

定理 3 考虑闭环系统(3),如果存在适当维数的正定对称矩阵 Q 和 R,非奇异矩阵 P,任意具有适当维数的 $W=\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ 和 V 满足(9a)和

$$\Xi=\begin{bmatrix} \Omega_{11}+\varepsilon DD^{\mathrm{T}} & \Omega_{12} & \tau M & \tau(AP+BV) & P^{\mathrm{T}}G_1^{\mathrm{T}}+V^{\mathrm{T}}G_2^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}G_\tau^{\mathrm{T}} \\ * & \Omega_{22}+\varepsilon DD^{\mathrm{T}} & \tau N & \tau A_\tau P & 0 & 0 \\ * & * & -\tau R & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau P^{\mathrm{T}}R^{-1}P & P^{\mathrm{T}}G_1^{\mathrm{T}}+V^{\mathrm{T}}G_2^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}G_\tau^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix}<0 \tag{10}$$

则闭环系统(3)渐近稳定,且反馈增益为 $K=VP^{-1}$。

证明 用 $A+\Delta A$,$B+\Delta B$,$A_\tau+\Delta A_\tau$ 分别替代式(9)中的 A、B、A_τ,再结合式(8),可得

$$\Omega+\bar{D}F(t)\bar{G}+\bar{G}^{\mathrm{T}}F(t)^{\mathrm{T}}\bar{D}^{\mathrm{T}}<0 \tag{11}$$

其中

$$\bar{D}=\begin{bmatrix} D^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ \bar{G}=\begin{bmatrix} G_1P+G_2V & 0 & 0 & G_1P+G_2V \\ G_\tau P & 0 & 0 & G_\tau P \end{bmatrix},\ V=KP$$

由引理 1 知,存在某个标量 $\varepsilon>0$,使得式(11)等价于

$$\Omega+\varepsilon\bar{D}\bar{D}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\bar{G}^{\mathrm{T}}\bar{G}<0 \tag{12}$$

再根据 Schur 补即可得到(10)成立。证毕。

注 2 由于 Ξ 中含有非线性矩阵 $P^{\mathrm{T}}R^{-1}P$,无法直接利用 Matlab 中的 LMI 工具箱。为此,引入新的矩阵变量 S,使得 $P^{\mathrm{T}}R^{-1}P\geqslant S$,将矩阵不等式(10)中的换成

$$\Xi=\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \tau M & \tau(AP+BV) & P^{\mathrm{T}}G_1^{\mathrm{T}}+V^{\mathrm{T}}G_2^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}G_\tau^{\mathrm{T}} \\ * & \Omega_{22} & \tau N & \tau A_\tau P & 0 & 0 \\ * & * & -\tau R & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau S & P^{\mathrm{T}}G_1^{\mathrm{T}}+V^{\mathrm{T}}G_2^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}G_\tau^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} \tag{13}$$

类似于文献[8],非线性矩阵不等式(10)的求解可以转化为如下非线性最小化问题

$$\text{Minimize}\ \ Tr(ST+PJ+RM) \tag{14}$$

s.t. (9a),(13)以及

$$\left.\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \dfrac{P+P^{\mathrm{T}}}{2} & I \\ I & \dfrac{J+J^{\mathrm{T}}}{2} \end{bmatrix}\geqslant 0,R>0,P+P^{\mathrm{T}}>0 \\ &\begin{bmatrix} T & J^{\mathrm{T}} \\ J & U \end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix} S & I \\ I & T \end{bmatrix}\geqslant 0,\begin{bmatrix} R & I \\ I & U \end{bmatrix}\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

如果上述非线性最小化问题的解是 $3n$,则由定理 2 知闭环系统(2)是渐近稳定的。但事实上,让其解精确地等于 $3n$ 很难做到,所以可以利用文献[8]给出的迭代算法,求得次优的最大时滞界限 $\bar{\tau}$。

4 仿真示例

例 1 考虑标称广义时滞系统(3),其中

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},A=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},A_\tau=\begin{bmatrix} -1.1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

根据定理 1,应用 Matlab 中的 LMI 工具箱,可以得到保证该系统渐近稳定的最大时滞界。与其他文献得到的结果进行对比,见表 1,可以看出本文方法具有更小的保守性。

表 1 最大时滞界对比

方法	文[12]	文[9,14]	文[15]	文[7]	文[13]	本文定理 1
最大时滞界	–	0.556 7	0.870 8	0.909 1	1.042 3	1.065 3

例 2 考虑不确定广义时滞系统(1),其中

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},A_\tau=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.05 & -0.05 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},G_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},G_\tau=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},G_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

令 $\tau=1$,根据定理 3 和算法求解(9a)、(10)和(12),得到一组可行解:

$$P=\begin{bmatrix} 76.093\,8 & 0 \\ -64.357\,8 & 131.011\,0 \end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix} 168.044\,5 & 22.184\,8 \\ 22.184\,8 & 215.690\,4 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} 245.032\,0 & 0.190\,4 \\ 0.190\,4 & 239.063\,6 \end{bmatrix},M=\begin{bmatrix} -43.861\,1 & -1.134\,5 \\ -16.076\,8 & 0.226\,1 \end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix} 5.172\,8 & 3.071\,9 \\ -5.015\,9 & 0.010\,5 \end{bmatrix},\varepsilon=138.614\,4$$

验证式(10)成立,则得到反馈增益矩阵为 $K=[-1.613\,0\ \ -0.569\,6]$。否则进行迭代,求解凸优化问题(14),直到式(10)成立,迭代算法停止。

5 结论

本文利用 Lyapunov 泛函方法和 LMI 工具讨论了不确定广义时滞系统的时滞依赖稳定与镇定问题,无需对不确定广义系统作变换和假设,所得结果保证了系统正则、无脉冲和渐近稳定。进一步,求解基于 LMI 约束的凸优化问题,可得到保证广义系统渐近稳定的最大时滞界。最后通过算例分析说明本文结果的有效性。该结果易推广到不确定和变时滞系统中。

(下转 154 页)