◎研究、探讨◎

BR_0代数的关联MP滤子和布尔MP滤子

张秋霞,吴洪博,娄银华
ZHANG Qiu-xia,WU Hong-bo,LOU Yin-hua

陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062
College of Mathematics and Informationg Science,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China
E-mail:qiuyuhongxia@126.com

ZHANG Qiu-xia,WU Hong-bo,LOU Yin-hua.Correlative MP-filters and MP-filters in BR_0-algebras.Computer Engineering and Applications,2009,45(13):39-41.

Abstract: The notiong of correlative *MP*-filters in BR_0-algebras is introduced,and their characterizations are investigated.On basic of these results,the main result is that F is correlative *MP*-filters iff F is Boolean *MP*-filters.Therefore,the sufficient and necessary conditions which make BR_0-algebras becoming Boole-algebras are that every *MP*-filters is correlative or Boolean.
Key words: logical algebras;BR_0-algebras;correlative *MP*-filters;Boolean *MP*-filters

摘 要:引入BR_0代数的关联*MP*滤子。研究它的特征,证明如下主要结果:F是关联*MP*滤子,当且仅当F是布尔*MP*滤子。从而BR_0代数成为Boole代数的充要条件是每个*MP*滤子均为布尔*MP*滤子或关联*MP*滤子。
关键词:逻辑代数;BR_0代数;关联*MP*滤子;布尔*MP*滤子
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.13.011 **文章编号:**1002-8331(2009)13-0039-03 **文献标识码:**A **中图分类号:**O141.1

1 引言

近年来,王国俊教授提出的模糊逻辑命题演算系统L^*受到学术界的普遍关注[1-2],与之相对应的R_0代数也取得一定的进展[3-6]。吴洪博教授在此基础上推广R_0代数和相应的L^*系统,得到了更具一般意义的BR_0代数和BL^*系统[7]。针对这个代数系统的研究,也有了一些研究成果,如文献[8-10]。众所周知,BR_0代数的*MP*滤子在证明BL^*系统的完备性时起到了重要的作用。Boole代数作为BR_0代数的特例,其*MP*滤子也应有独特之处。通过引入关联*MP*滤子的概念,研究其特征及在BR_0代数中的结构找到了BR_0代数与Boole代数的联系;并且进一步探索了关联*MP*滤子和布尔*MP*滤子的关系。

2 预备知识

定义2.1[7] 设M是$(\neg,\vee,\to)$型代数,如果

(i)M上有偏序$\leq$使$(M,\leq)$成为有界分配格,且$\vee$是关于序$\leq$而言的上确界运算;

(ii)$\neg$是关于$\leq$而言的逆序对合对应;

(iii)对任意$a,b,c\in M$,以下条件成立:

$(A_1)\neg a\to\neg b=b\to a$; $(A_2)1\to a=a,a\to a=1$;

$(A_3)b\to c\leqslant(a\to b)\to(a\to c)$;$(A_4)a\to(b\to c)=b\to(a\to c)$;

$(A_5)a\to b\vee c=(a\to b)\vee(a\to c),a\to b\wedge c=(a\to b)\wedge(a\to c)$。

这里1是M中的最大元,并记$0=\neg 1$,那么称M为基础R_0代数,记作BR_0代数。

有时用a'表示$\neg a$,由于"$'$"是逆序对合对应,故DeMorgan对偶律成立,即$(a\vee b)'=a'\wedge b'$,$(a\wedge b)'=a'\vee b'$。记$0=1'$。易知$a'=a\to 0$。对于Boole代数B,规定$a\to b=a'\vee b$,则B是BR_0代数。

命题2.1[1] 设M是BR_0代数,对任意的$a,b,c\in M$,则(p_1) $a\to b=1$当且仅当$a\leq b$;$(p_2)a\leq b\to c$当且仅当$b\leq a\to c$;(p_3) $(a\vee b)\to c=(a\to c)\wedge(b\to c)$,$(a\wedge b)\to c=(a\to c)\vee(b\to c)$;$(p_4)$若$b\leq c$,则$a\to b\leq a\to c,b\to a\geq c\to a$;$(p_5)a\to b\geq a'\vee b$;$(p_6)(a\to b)\vee(b\to a)=1$;$(p_7)a\to(b\to a)=1$;$(p_8)a\to b\leq(a\vee c)\to(b\vee c)$;命题2.2 设$M$是$BR_0$代数,对任意的$a,b,c\in M$,则$(p_9)a\vee b\leq((a\to b)\to b)\wedge((b\to a)\to a)$,$(p_{10})a\to b\leq(b\to c)\to(a\to c)$。

定义2.2[1] 设M是BR_0代数,$F\subseteq M$,且$F\neq\emptyset$,若$(F_1)1\in F$;$(F_2)F$对*MP*运算封闭,即当$a,a\to b\in F$时,$b\in F$。则称F为M的*MP*滤子$(a,b\in M)$。

定义2.3 设M是BR_0代数,F为M的*MP*滤子,称F是布尔的,如果对任意的$a,b,c\in M$,当$a\to(b'\to c)\in F,c\to b\in F$时,有$a\to b\in F$。

以下没有特别声明M均指为BR_0代数。

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10471083);陕西师范大学重点科研基金(No.995130)。
作者简介:张秋霞(1983-),女,硕士研究生,研究方向:不确定性推理;吴洪博(1959-),男,教授,研究生导师,研究方向:不确定性推理;娄银华(1983-),女,硕士研究生,研究方向:不确定性推理。
收稿日期:2008-03-12 **修回日期:**2008-05-14

3 BR_0 代数的关联 MP 滤子

定义 3.1 设 $F\subseteq M$,如果$(F_3)1\in F$;(F_4)当 $c,c\to((a\to b)\to a)\in F$时,有 $a\in F$。则称 F 是 M 的关联 MP 滤子$(a,b,c\in M)$。

命题 3.1 设 F 为 M 的 MP 滤子,对任意的 $a,b,c\in M$,当 $a\leq b\to c$ 且 $a,b\in F$时,有 $c\in F$。

证明:由(p_1)知 $a\leq b\to c$ 当且仅当 $a\to(b\to c)=1\in F$。又 $a,b\in F$,利用两次(F_2)得 $c\in F$。

定理 3.1 设 F 是 M 的关联 MP 滤子,则 F 是 M 的 MP 滤子。

证明:设 $a,b,c\in M$,令 $b=a$。则 $c\to((a\to b)\to a)=c\to((a\to a)\to a)=c\to a$。由 F 是 M 的关联 MP 滤子知(1)$1\in F$,(2)当 $c,c\to a\in F$时,$a\in F$。根据定义 2.2 知 F 是 M 的 MP 滤子。

但 BR_0 代数的 MP 滤子未必是关联 MP 滤子。即定理 3.1 的逆不成立。下列可表明该结论成立。

令 $M=\{0,a,b,1\}$,其$\neg$,$\vee$,$\to$定义如下:

$\neg$	x	$\vee$	0	a	b	1	$\to$	0	a	b	1
0	1	0	0	a	b	1	0	1	1	1	1
a	b	a	a	a	a	1	a	b	1	a	1
b	a	b	b	a	b	1	b	a	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	a	b	1

在 M 上定义序"$\leq$"为 $0\leq b\leq a\leq 1$。易证 M 为 BR_0 代数。$\{1\}$显然是 M 的 MP 滤子。$1\in\{1\}$,$1\to((a\to b)\to a)=1\in\{1\}$,但 $a\notin\{1\}$。故$\{1\}$不是 M 的关联 MP 滤子。

定理 3.2 设 F 为 M 的 MP 滤子,F 是关联的充要条件是 F 满足$(F_5)(a\to b)\to a\in F$时,有 $a\in F$。

证明:(1)必要性:设 F 是 M 的关联 MP 滤子,则由定理 3.1 知 F 是 MP 滤子,从而 $1\in F$。又$(A_2)1\to((a\to b)\to a)=(a\to b)\to a\in F$,故利用$(F_4)$知 $a\in F$。即(F_5)成立。

(2)充分性:设 F 是 MP 滤子,则 $1\in F$,(F_3)成立。下证(F_4)成立。设 $c\in F$,$c\to((a\to b)\to a)\in F$,由 F 是 MP 滤子知$(a\to b)\to a\in F$。再利用(F_5)得 $a\in F$。即(F_4)成立。从而 F 是 M 的关联 MP 滤子。

引理 3.1 设 M 是 BR_0 代数,对任意的 $a,b,c\in M$,则(p_{10}) $((a\to b)\to b)\to b=a\to b$。

证明:首先,由(A_4),(A_2)得$(a\to b)\to(((a\to b)\to b)\to b)=((a\to b)\to b)\to((a\to b)\to b)=1$,再利用$(p_1)$得 $a\to b\leq((a\to b)\to b)\to b$。另一方面,$(((a\to b)\to b)\to b)\to(a\to b)\geq a\to((a\to b)\to b)=(a\to b)\to(a\to b)=1$。利用$(p_1)$得$((a\to b)\to b)\to b\leq a\to b$。综上可证得$((a\to b)\to b)\to b=a\to b$。

定理 3.3 设 F 是 M 的关联 MP 滤子,则(F_6)当 $c\to(b\to a)$,$c\to b\in F$时,$c\to a\in F$。

证明:设 $c\to(b\to a)$,$c\to b\in F$,由(A_3),(A_4)知 $c\to(b\to a)=b\to(c\to a)\leq(c\to b)\to(c\to(c\to a))$。利用定理 3.1 知 F 为 M 的 MP 滤子,再由命题 3.1 知 $c\to(c\to a)\in F$。又根据引理 3.1 知 $c\to(c\to a)=c\to(((c\to a)\to a)\to a)=((c\to a)\to a)\to(c\to a)$,故$((c\to a)\to a)\to(c\to a)\in F$。又由定理 3.2 知 $c\to a\in F$。

定理 3.4 设 F 是 M 的关联 MP 滤子,则(F_7)当$(a\to b)\to b\in F$时,$(b\to a)\to a\in F$。

证明:设 F 是 M 的关联 MP 滤子,$(a\to b)\to b\in F$,由(p_7)知 $a\to((b\to a)\to a)=1$,即 $a\leq(b\to a)\to a$。再利用(p_4)得 $a\to b\geq((b\to a)\to a)\to b\cdots$式(1)。

又(A_2),$(b\to a)\to(b\to a)=1$,由(A_4)和(p_1)得 $b\leq(b\to a)\to a$。根据(p_4)知$(a\to b)\to b\leq(a\to b)\to((b\to a)\to a)=(b\to a)\to((a\to b)\to a)$。由定理 3.1 知 F 为 M 的 MP 滤子。又$(a\to b)\to b\in F$,从而$(a\to b)\to((b\to a)\to a)\in F$。在式(1)基础上应用$(p_4)$得$(a\to b)\to((b\to a)\to a)\leq(((b\to a)\to a)\to b)\to((b\to a)\to a)$,故由 F 为 M 的 MP 滤子及定理 3.2 知$(b\to a)\to a\in F$,即(F_7)成立。

定理 3.5 设 F 是 M 的关联 MP 滤子,则(F_8)当 $c\to(b\to a)\in F$时,$(c\to b)\to(c\to a)\in F$。

证明:设 $c\to(b\to a)\in F$,F 是 M 的关联 MP 滤子,则由(p_{10})得$(c\to b)\to b\leq(b\to a)\to((c\to b)\to a)$。再利用$(p_4)$得 $c\to((c\to b)\to b)\leq c\to((b\to a)\to((c\to b)\to a))$又由$(A_4)$,$(A_2)$知 $c\to((c\to b)\to b)=(c\to b)\to(c\to b)=1\in F$,故 $c\to((b\to a)\to((c\to b)\to a))\in F$。又根据 $c\to(b\to a)\in F$ 及定理 3.3 知 $c\to((c\to b)\to a)=(c\to b)\to(c\to a)\in F$,即$(F_8)$成立。

定理 3.6 设 F 是 M 的关联 MP 滤子,则(F_9)对任意的 $a\in M$,$a\vee a'\in F$。

证明:首先证明对任意的 $a\in M$,$(a'\to a)\to a\in F$。由定理 3.2 知只需证明$((a'\to a)\to a)\to 0)\to((a'\to a)\to a)=((a'\to a)\to a)'\to((a'\to a)\to a)\in F$。因为(应用$(A_3)$,$(A_4)$,$(p_2)$,$(A_1)$,$(p_1)$等)$((a'\to a)\to a)'\to((a'\to a)\to a)=(a'\to a)\to((a'\to a)\to a)'\to a)\geq((a'\to a)\to a)'\to a'=a\to((a'\to a)\to a)=1\in F$。从而由定理 3.2 知$(a'\to a)\to a\in F$。

(2)证 $a\vee a'\in F$。显然$(a\to a')\to a'\leq((a\to a')\to a')\vee((a\to a')\to a)$。再由$(A_5)$得$(a\to a')\to a'\leq(a\to a')\to(a'\vee a)$;由(1)及定理 3.1 知$(a\to a')\to(a'\vee a)\in F$。又$(a'\vee a)\to a'=(a'\to a')\wedge(a\to a')=a\to a'$。所以$((a'\vee a)\to a')\to(a\vee a')\in F$,再由定理 3.2 知 $a\vee a'\in F$。

定理 3.7 设 F 是 M 的关联 MP 滤子,则 F 是 M 布尔 MP 滤子。

证明:设 F 是 M 的关联 MP 滤子,且 $a\to(b'\to c)\in F$,$c\to b\in F$。由(A_3)得 $c\to b\leq(b'\to c)\to(b'\to b)\leq(a\to(b'\to c))\to(a\to(b'\to b))$,再由命题 3.1 及定理 3.1 知 $a\to(b'\to b)\in F$。又$(p_9)b'\vee b\leq((b'\to b)\to b)\wedge((b\to b')\to b')\leq(b'\to b)\to b$。且由定理 3.6 知 $b\vee b'\in F$,从而$(b'\to b)\to b\in F$。由(A_3)知 $a\to(b'\to b)\leq((b'\to b)\to b)\to(a\to b)$。再利用命题 3.1 知 $a\to b\in F$。这说明 F 是 M 布尔 MP 滤子。

定理 3.8 设 F 是 M 的 MP 滤子,F 是关联的当且仅当 F 是布尔的。

证明:(必要性)由定理 3.7 知成立。

下面证明当 F 是 M 的布尔 MP 滤子时,F 是 M 的关联 MP 滤子。再由定理 3.2 知只需证明$\forall a,b\in M$,$(a\to b)\to a\in F$时,$a\in F$。

设$(a\to b)\to a\in F$

(1)首先证明 $b\to a\in F$。因为 $1=b\to(a\to b)\leq((a\to b)\to a)\to(b\to a)$,$1\in F$,故利用命题 3.1 得 $b\to a\in F$。

(2)其次证明 $b'\to(a'\to a)\in F$。因 $1=b'\to 1=b'\to(b'\to 1)=b'\to(b'\to(a\to a))=a\to(b'\to(b'\to a))=a\to((b'\to a')\to b)=(b'\to a)'\to(a\to b)\leq[(a\to b)\to a]\to[(b'\to a)\to a]=[(a\to b)\to a]\to[a'\to(b'\to a)]$(这里利用$(p_1)$,$(A_3)$,$(A_4)$,$(A_1)$,$(A_2)$,$(p_2)$等)。再利用命题 3.1 得 $a'\to(b'\to a)\in F$。由(A_4)知 $b'\to(a'\to a)\in F$。(3)又 $a\to a=1\in F$。F 是 M 布尔 MP 滤子,故 $b'\to a\in F$。由(A_1),(A_2)知 $1\to(a'\to b')=a'\to b'=b\to a\in F$。再次利用 F 是 M 布尔 MP 滤子可得 $1\to a=a\in F$。故由定理 3.2 知 F 是 M 的关联 MP

滤子。

定理 3.9　BR_0代数M的每一个MP滤子是关联的当且仅当M满足（F_{10}）$(a\to b)\to a=a(a,b\in M)$。

证明：由定理3.2知满足（F_{10}）的BR_0代数M的每个MP滤子是关联的。反之，假设M的每个MP滤子是关联的，对任意的$a,b\in M$，由（p_7）得$a\to((a\to b)\to a)=1$，即$a\leq(a\to b)\to a$。下证反向成立。由M的每个MP滤子是关联的，特别地{1}是M的关联MP滤子，由于$a\to((a\to b)\to b)=(a\to b)\to(a\to b)=1\in\{1\}$，故由（$F_8$）得$(a\to(a\to b))\to(a\to b)\in\{1\}$，再由（$F_7$）得$((a\to b)\to a)\to a\in\{1\}$，即$((a\to b)\to a)\to a=1$。从而利用（$p_1$）得$(a\to b)\to a\leq a$。综上所述$(a\to b)\to a=a$。

推论 3.1　BR_0代数M的每一个MP滤子是布尔的当且仅当M满足（F_{10}）。

定理 3.10　BR_0代数M成为Boole代数的充要条件是M的每一个MP滤子是关联的或M的每一个MP滤子是布尔的。

证明：设M为Boole代数，则$a\to b=a'\vee b$。于是$(a\to b)\to a=(a'\vee b)'\vee a=(a\wedge b')\vee a=(a\vee a)\wedge(b'\vee a)=a\wedge(b'\vee a)=a$。即在Boole代数中（$F_{10}$）成立。从而$M$的每一个$MP$滤子是关联的，也即$M$的每一个$MP$滤子是布尔的。

反之，若M的每一个MP滤子是关联的（布尔的），由定理3.9知在M中$(a\to b)\to a=a$。于是$a'\to a=(a\to 0)\to a=a$。$a\to a'=(a')'\to a'=a'$。故$a\vee a'=(a'\to a)\vee(a\to a')=1$。再利用DeMorgan对偶律得$a'\wedge a=0$。因此只需证在$M$中有$a\to b=a'\vee b$成立，即可断定$M$为Boole代数。又（$p_5$）$a\to b\geq a'\vee b$。而（$p_8$）$a\to b\leq(a\vee a')\to(b\vee a')=1\to(b\vee a')=b\vee a'=a'\vee b$。所以在$M$中确有$a\to b=a'\vee b$。

参考文献：

[1] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理[M].北京：科学出版社，2006.

[2] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京：科学出版社，2000.

[3] 程国胜，王国俊.R_0代数及其基本结构[J].数学物理学报，1999，19(5)：584-588.

[4] 王国俊.MV代数，BL代数，R_0代数与多值逻辑[J].模糊系统与数学，2002，16(2)：1-15.

[5] 任芳.R_0代数中的同余关系[J].工程数学学报，2001，18(1)：73-77.

[6] 裴道武，王国俊.形式系统L^*的完备性及其应用[J].中国科学：E辑，2002，32(1)：56-64.

[7] 吴洪博.基础R_0代数与基础L^*系统[J].数学进展，2003，32(5)：565-576.

[8] 吴洪博.R_0代数的格蕴涵表示定理[J].模糊系统与数学，2007，21(3)：16-23.

[9] 吴洪博.基础R_0代数的性质及其在L^*系统中的应用[J].数学研究与评论，2003，23(3)：554-557.

[10] 胡明娣，王国俊.基础R_0代数的正规MP滤子和布尔MP滤子[J].计算机工程与应用，2007，43(5)：33-35.

（上接19页）

（2）决策资源管理

实现决策问题求解资源管理，包括模型库及其管理系统、方法库及其管理系统、知识库及其管理系统、数据库及其管理系统。能够对这些求解资源进行增、删、改，不断丰富求解资源。

（3）决策问题管理

实现决策问题求解之前的准备过程，包括决策问题的定义和描述，如属性定义（名称和个数）和备选方案（名称和个数）等，问题分解方案制订，问题分解，原子问题的构成及其逻辑关系，生成相应的求解任务，定义求解路线。

（4）问题求解管理

沿着求解路线实现对各个原子问题进行求解，结构化原子问题调用模型、方法、数据实现求解，非结构化原子问题调用知识或利用专家群体打分（或投票）实现求解。将所有原子问题的解进行合成，形成问题解决方案，获得各个成员的问题求解结果。

（5）群体协调与决策管理

实现将各个成员的问题求解结果转换成各个成员的偏好矢量，对各成员的偏好矢量集进行聚类，生成若干个偏好矢量（成员）聚集。计算各聚集和整个群体的一致性指标并进行分析。计算各聚集和整个群体的偏好矢量并进行分析，计算并确定属性权重矢量。实现决策方案排序，获得最优方案。形成决策报告，进行决策分析。

6　结束语

群决策支持系统的开发随着群体的规模和复杂性的增加，将变得越来越困难，基于这种特殊的群体，提出了一种面向复杂大群体的群决策支持系统结构。系统以决策问题的求解为中心，据此设计了复杂决策问题求解流程和方法，在此基础上提出了系统处理流程，进一步构建了系统的层次结构和功能结构，并对其中的关键实现技术进行了深入的研究。对面向复杂大群体的群决策支持系统的开发具有一定的指导意义。

参考文献：

[1] 刘勇，李朋，薛华成.Intranet环境下群体决策支持系统的研究[J].系统工程，1997(11)：42-49.

[2] 琚春华.基于互联网环境的群体决策支持系统研究与应用[J].管理工程学报，2000(4)：23-27.

[3] 李春梅，邹平.基于Multi-agent的企业经营战略GDSS总体框架设计[J].系统工程理论与实践，2002(5)：55-59.

[4] Tung Lai-lai，Turban Efraim.A proposed research framework for distributed group support systems[J].Decision Support System，1998，23：175-188.

[5] Barkhi R，Jacob V S，Pirkul H.The influence of communication mode and incentive structure on GDSS process and outcomes[J].Decision Support Systems，2004，37(2)：287-305.

[6] 陈晓红.决策支持系统理论与应用[M].北京：清华大学出版社，2000.

[7] 徐选华，陈晓红.基于矢量空间的群体聚类方法研究[J].系统工程与电子技术，2005，27(6)：1034-1038.

[8] Lie G C.Boltzmann distribution and boltzmann's hypothesis J Chem Educ，1981.

[9] Nash L K.On the boltzmann distribution law[M].[S.l.]：Chem Educ，1982.