

DoG 小波的对称性图像分类

鲁 坚, 邹玉茹

LU Jian, ZOU Yu-ru

深圳大学 数学与计算科学学院, 广东 深圳 518060

College of Mathematics and Computational Science, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060, China

LU Jian, ZOU Yu-ru. Classification of symmetric images by using DoG wavelet. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(2): 7-9.

Abstract: An effective algorithm for detection and classification of cyclic and dihedral symmetric images in DoG wavelet domain is presented. The proposed algorithm is very robust to noise for the noisy images corrupted by Additive White Gaussian Noise (AWGN). Combined with the modified ridgelet transform, the proposed method can successfully detect and classify the noisy images with cyclic and dihedral symmetries, even under the situation of high-level noise (for example, noise deviation is $\sigma=70$).

Key words: cyclic group; dihedral group; symmetry classification; DoG wavelet transform

摘 要: 提出了一种 DoG 小波域的循环群、二面体群对称性图像的识别与分类技术。该技术具有很好的噪声(仅讨论加性的白高斯噪声)鲁棒性特点, 甚至在高噪声情况下(例如噪声偏差 $\sigma=70$), 结合修改的脊波变换能实现对噪声图像包含的循环群、二面体群对称性进行识别和分类。

关键词: 循环群; 二面体群; 对称性分类; DoG 小波变换

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.02.002 **文章编号:** 1002-8331(2009)02-0007-03 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391

1 引言

目标的表示和识别技术是模式识别和图像理解领域的核心环节之一, 而对称性是大量人造目标和自然目标的共同属性, 它提供了人类视觉感知目标形状的关键线索。基于物体对称性特征的检测和识别技术是从 20 世纪 60 年代兴起并一直活跃到现在的一个研究领域^[1-9], 它是数学、计算几何、模式识别、感知科学、图像处理等的交叉学科。

现实中最常见的对称是: 平移对称、旋转对称和反射对称。对于一幅有限的二维图像, 一般仅包含旋转对称和反射对称。关于对称性检测的算法一般可进行如下分类: 有的算法为空间域检测算法^[4-6], 而有的算法为 Fourier 频率域检测算法^[7-9]; 一些算法仅强调旋转对称性的检测或者反射对称性的检测^[4-5], 另一些算法同时检测和分类旋转和反射对称性^[6-9]。然而, 很少有算法考虑高噪声条件下的鲁棒性。提出了一种在 DoG 小波域的循环群和二面体群对称性图像的检测和分类算法。假定一幅有限二维图像为循环群对称性或二面体群对称性, 该算法首先把图像包含的对称性转化为小波域的等角度间隔过中心直线, 然后利用脊波技术实现对这些直线的检测, 进而识别和分类图像的对称性。数值实验结果表明, 提出的算法有很好的噪声鲁棒性且能实现自动分类循环群对称性和二面体群对称性图像, 从而很好地拓展并克服了传统 Fourier 域算法^[7-8]高噪声条件下失

效的缺点。

2 循环群、二面体群对称性图像的 DoG 小波域分析

2.1 循环群、二面体群对称性^[10]

定义 1 设 $S(x), x \in \mathbb{R}^2$ 是中心对称性图像, $S(x)$ 被称为具有阶为 N 的旋转对称性, 如果 $S(x) = S(\eta(\alpha_k)x), \alpha_k = n\alpha_0, \alpha_0 = \frac{2\pi}{N}, n=1, 2, \dots, N$ 。其中:

$$\eta(\alpha_n) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_n & -\sin \alpha_n \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n \end{pmatrix}$$

定义 2 设 $S(x), x \in \mathbb{R}^2$ 是中心对称性图像, $S(x)$ 被称为具有关于直线 $y = x \tan \beta$ 的反射对称性, 如果 $f(x) = f(\mu(\beta)x)$ 。其中:

$$\mu(\beta) = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}$$

定义 3 设 $S(x), x \in \mathbb{R}^2$ 是中心对称性图像, $S(x)$ 被称为具有阶为 N 的循环对称性(相应的对称群记为: C_N), 如果 $S(x)$ 具有阶为 N 的旋转对称性, 且不包含反射对称性; $S(x)$ 被称为具有阶为 N 的二面体对称性(相应的对称群记为: D_N), 如果 $S(x)$ 同时具有阶为 N 的旋转对称性和反射对称性。

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60873168); 广东省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Guangdong Province of China under Grant No.2008257); 深圳大学科研启动项目(No.200850, No.200864)。

作者简介: 鲁坚(1979-), 男, 讲师, 博士, 主研方向为图像处理、计算机图形学等; 邹玉茹(1978-), 女, 讲师, 博士, 主研方向为分形几何及其应用。

收稿日期: 2008-09-24 **修回日期:** 2008-11-03

2.2 对称性图像的 DoG 小波域分析

采用的二维连续 DoG 小波为 Gaussian 小波函数的一阶偏导, 即:

$$\varphi(x) = \sqrt{x^T x} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T x\right), x \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

记 $\varphi_a(x)$ 为 $\varphi(x)$ 在尺度因子 a 下的函数, 即:

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x}{a}\right), x \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

对于一幅实值图像 $S(x), x \in \mathbb{R}^2$, 它的二维连续 DoG 小波变换为^[1]:

$$W_a(b) = \int_{\mathbb{R}^2} S(\eta(\alpha_n)x) \varphi_a(b-x) dx \quad (3)$$

性质 1 设 $S(x), x \in \mathbb{R}^2$ 为具有阶为 N 的旋转对称性图像, 则:

$$W_a(b) = W_a(\eta(\alpha_n)b), b \in \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

其中 $\alpha_k = n\alpha_0, \alpha_0 = \frac{2\pi}{N}, n=1, 2, \dots, N$.

证明 注意到 $\eta(\alpha_k)^T = \eta(\alpha_k)^{-1}$, 于是

$$\begin{aligned} W_a(b) &= \int_{\mathbb{R}^2} S(\eta(\alpha_n)x) \varphi_a(b-x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} S(y) \varphi_a(b - \varphi(\alpha_n)^{-1}y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} S(y) \varphi_a(\eta(\alpha_n)b - y) dy = \\ &= W_a(\eta(\alpha_n)b), n=1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

性质 2 设 $S(x), x \in \mathbb{R}^2$ 为关于直线 $y=x \tan \beta$ 的反射对称性图像, 则:

$$W_a(b) = W_a(\mu(\beta)b), b \in \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

性质 1 和性质 2 说明, 对称性图像 $S(x)$ 经二维连续 DoG 小波变换后旋转和反射对称性保持不变。

命题 1 设 $S(x), x \in \mathbb{R}^2$ 是中心在原点阶为 N 的具有循环群对称或二面体群对称性的实值图像, 对应的 DoG 小波变换为 $W_a(b)$ 。若定义 $\Delta_a(b) = W_a(b) - W_a(\mu(v_1)\eta(v_0)b), v_0, v_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

则 $\Delta_a(b)=0$ 的解包含 N 条过原点直线: $b_y = \tan(v_1 - \frac{v_0 + \alpha_n}{2})b_x, n=1, 2, \dots, N$ 。

证明 根据性质 1, $\Delta_a(b) = W_a(b) - W_a(\mu(v_1)\eta(v_0)b) = 0$ 成立意味着

$$W_a(b) = W_a(\mu(v_1)\eta(v_0)b) = W_a(\eta(\alpha_n)b), n=1, 2, \dots, N$$

从而 $\mu(v_1)\eta(v_0)b = \eta(\alpha_n)b$ 的解也是 $\Delta_a(b)=0$ 的解。

$$\mu(v_1)\eta(v_0)b = \eta(\alpha_n)b \Rightarrow \eta(\alpha_n)^{-1}\mu(v_1)\eta(v_0)b = b \Rightarrow$$

$$\mu\left(v_1 - \frac{v_0 + \alpha_n}{2}\right)b = b$$

注意到对应 $\mu\left(v_1 - \frac{v_0 + \alpha_n}{2}\right)$ 的特征值为 $\lambda = \pm 1$, 其中对应 $\lambda =$

1 的特征向量为:

$$\xi_{(\lambda=1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\left(v_1 - \frac{v_0 + \alpha_n}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

这就意味着对应的特征子空间为过原点直线: $b_y = \tan\left(v_1 - \frac{v_0 + \alpha_n}{2}\right)b_x, n=1, 2, \dots, N$ 。

根据命题 1 和性质 1, $\Delta_a(b)=0$ 包含的中心直线数即为图像 $S(x)$ 的阶数。另外, 由于小波的多分辨率特点, 图像 $S(x)$ 经相对大尺度的二维 DoG 小波变换后, 内在奇异信号(包括噪声)被抑制, 且 $\Delta_a(b)=0$ 过中心直线解增加(即直线变粗, 更清晰)。对于无噪图像, 规定小波尺度 $a=4$; 对于噪声图像, 噪声偏差限制 $\sigma \leq 20$, 则 $a = \lceil \sqrt{\pi} \sigma / 10 \rceil^{[2]}$ (其中 $\lceil x \rceil$ 表示取整数 $\geq x$)。例如, 无噪图像图 1 和图 2 的小波尺度为 $a=4$; 图 3 和图 4 的小波尺度为 $a=12.4$; 从图 1(b) 和图 2(b) 的过中心直线数可“看出”图 1(a) 和图 2(a) 的阶均为 4; 同样, 图 3(a) 和图 4(a) 的阶均为 5。

命题 2 设 $S(x), x \in \mathbb{R}^2$ 是中心在原点阶为 N 的具有二面体群对称性的实值图像, 对应的 DoG 小波变换为 $W_a(b)$ 。若定义 $\Delta'_a(b) = W_a(\eta(v_0)b) - W_a(b), v_0, v_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则 $\Delta'_a(b)=0$ 的解包含 N 条过原点直线:

$$b_y = \tan\left(\beta_n - \frac{v_0}{2}\right)b_x, n=0, 1, \dots, N-1$$

证明 $\Delta'_a(b)=0$ 及 $W_a(b)$ 具有阶为 N 的二面体群对称性意味着

$$W_a(b) = W_a(\eta(v_0)b) = W_a(\mu(\beta_n)b), n=0, 1, \dots, N-1$$

由于 $\eta(v_0)b = \mu(\beta_n)b \Rightarrow \eta(v_0)^{-1}\mu(\beta_n)b = b \Rightarrow$

$$\mu\left(\beta_n - \frac{v_0}{2}\right)b = b, n=0, 1, \dots, N-1$$

类似命题 1, 结论成立。

若 $S(x)$ 为阶为 N 的循环群对称性图像, 由于 $W_a(b)$ 包含 N 阶旋转对称, 但不包含反射对称性, $\Delta'_a(b) = W_a(\eta(v_0)b) - W_a(b)$ 意味着: $W_a(\eta(v_0)b) = W_a(\eta(\alpha_n)b), n=1, 2, \dots, N$, 由于

$$\eta(v_0)b = \eta(\alpha_n)b \Rightarrow \eta(\alpha_n)^{-1}\eta(v_0)b = b \Rightarrow \eta(v_0 - \alpha_n)b = b$$

但 $\eta(v_0 - \alpha_n)$ 的特征值为 $\lambda = \pm j$ (虚数)。因此, $\Delta W'_a(b)=0$ 仅关于原点二维旋转不变。命题 2 的结论不成立。

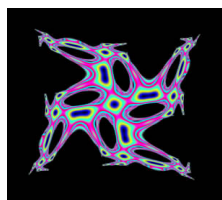
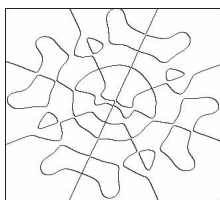
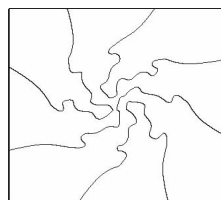
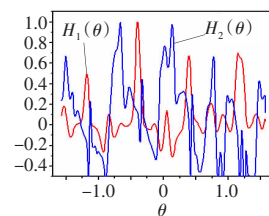
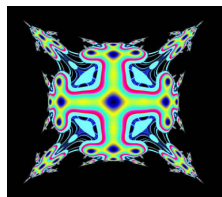
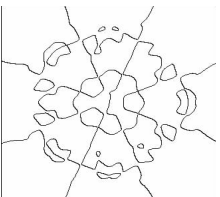
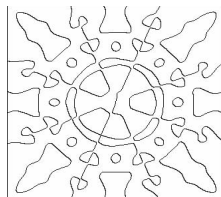
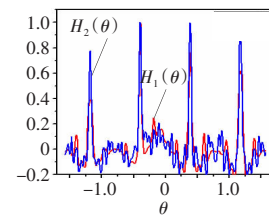
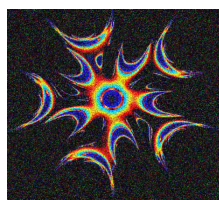
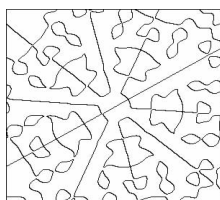
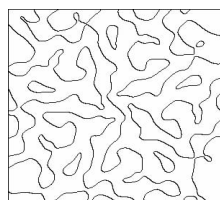
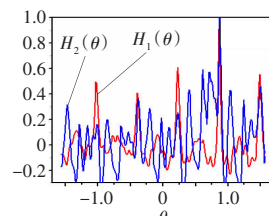
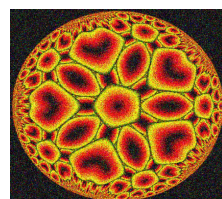
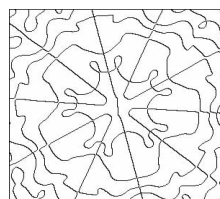
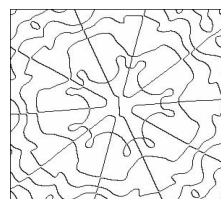
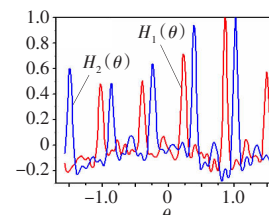
根据命题 2, $\Delta'_a(b)=0$ 中所包含的过中心直线数, 且这些直线的角度间隔是否均匀, 包含直线的数目是否 $\Delta(b)=0$ 与相等(命题 1)可用于区分图像对称性是否为 C_N 或 D_N 。例如, 结合图 1(b) 和图 2(b), 从图 1(c) 和图 3(c) 可“看出”图 1 和图 3 分别为 C_4 和 C_5 对称性; 同样, 从图 2(c) 和图 4(c) 可得图 2 和图 4 分别为 D_4 和 D_5 对称性。

3 脊波技术检测过中心直线实现计算机自动分类

常用的直线检测方法有 Hough 变换和 Radon 变换^[3], 但在噪声条件下, $\Delta_a(b)=0$ (或 $\Delta'_a(b)=0$) 的过中心直线将“扭曲”, 考虑到脊波变换检测直线的优良特性, 采用如下形式的脊波变换^[4]:

$$\kappa(a', b', \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_{a', b'}(t) R(\theta, t) dt \quad (6)$$

其中, $\varphi_{a', b'}(x)$ 为一维 DoG 小波函数, $R(\theta, t)$ 为 $\Delta_a(b)=0$ 的 Radon 变换^[3]。由于仅需检测过原点直线, 式(6)变换过程中固定 $b'=0$, 并限制 $\theta \in (0, \pi]$, 归一化可得曲线 $H_1(\theta)$ 。同样, 对 $\Delta'_a(b)=0$ 可得曲线 $H_2(\theta)$ 。

图 1(a) 原始 C_4 对称性图像图 1(b) $\Delta_a(b)=0$ 图 1(c) $\Delta'_a(b)=0$ 图 1(d) 曲线 $H_1(\theta)$ 和 $H_2(\theta)$ 图 2(a) 原始 D_4 对称性图像图 2(b) $\Delta_a(b)=0$ 图 2(c) $\Delta'_a(b)=0$ 图 2(d) 曲线 $H_1(\theta)$ 和 $H_2(\theta)$ 图 3(a) 噪声 C_3 对称性图像($\sigma=70$)图 3(b) $\Delta_a(b)=0$ 图 3(c) $\Delta'_a(b)=0$ 图 3(d) 曲线 $H_1(\theta)$ 和 $H_2(\theta)$ 图 4(a) 噪声 D_3 对称性图像($\sigma=70$)图 4(b) $\Delta_a(b)=0$ 图 4(c) $\Delta'_a(b)=0$ 图 4(d) 曲线 $H_1(\theta)$ 和 $H_2(\theta)$

显然, 曲线 $H_1(\theta)$ 和 $H_2(\theta)$ 中的等间隔波峰即分别对应 $\Delta_a(b)=0$ 和 $\Delta'_a(b)=0$ 中的过中心直线, 于是, 通过计算机简单算法 (例如设定阈值 $\lambda = \frac{1}{3}$) 搜索曲线 $H_1(\theta)$ 中的大于设定阈值等间隔波峰数即确定图像的阶, 并搜索曲线 $H_2(\theta)$, 判断是否与 $H_1(\theta)$ 存在同样等间隔波峰数确定图像为循环群对称性或二面体群对称性。例如, 图 1(d) 和图 2(d) 的曲线 $H_1(\theta)$ 的 4 个等间隔波峰分别对应图 1(b) 和图 2(b) 的 4 条过中心直线, 由于图 1(c) 没有过中心直线, 图 1(d) 中的曲线 $H_2(\theta)$ 出现不规则的非等间隔伪波峰, 于是可断定图 1 为 C_4 对称性; 图 2(d) 中的曲线 $H_2(\theta)$ 同样存在 4 个等间隔波峰, 于是断定图 2 为 D_4 对称性。图 3 和图 4 也可用同样方法得出相应结论。

参考文献:

- [1] 卢春雨, 张长水, 闻芳, 等. 基于主元分析的对称性检测[J]. 电子学报, 1999, 27(5): 25-28.
- [2] 肖志涛, 侯正信, 郭迎春. 基于局部能量得对称性检测算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(1): 54-58.
- [3] 吴刚, 杨敬安, 李道伦, 等. 平面图像的对称性检测方法研究[J]. 计算机科学, 2001, 28(5): 101-106.
- [4] Leou J J, Tsai W H. Automatic rotational symmetry determination for shape analysis[J]. Pattern Recognition, 1987, 20(6): 571-582.
- [5] Marola G. On the detection of the axes of symmetry of symmetric and almost symmetric planar images[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(1): 104-108.
- [6] Shen D, Ip H H S, Cheung K K T, et al. Symmetry detection by generalized complex (GC) moments: a close-form solution[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(5): 466-576.
- [7] Keller Y, Shkolnisky Y Y. A signal processing approach to symmetry detection[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(8): 2198-2207.
- [8] Lucchese L. Frequency domain classification of cyclic and dihedral symmetries of finite 2-D patterns[J]. Pattern Recognition, 2004, 37(12): 2263-2280.
- [9] Derrode S, Ghorbel F. Shape analysis and symmetry detection in gray-level objects using the analytical Fourier-Mellin representation[J]. Signal Processing, 2004, 84(1): 25-39.
- [10] Miller W. Symmetry groups and their applications[M]. New York: Academic Press, 1972.
- [11] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1992, 38(2): 617-643.
- [12] Goswami J C, Chan A K. 小波分析理论、算法及其应用[M]. 许天周, 黄春光, 译. 北京: 国防工业出版社, 2007.