

# 差分进化算法在双指数拟合中的应用

陈 华, 邓少贵, 李智强, 范宜仁

CHEN Hua, DENG Shao-gui, LI Zhi-qiang, FAN Yi-ren

中国石油大学(华东), 山东 东营 257061

University of Petroleum China, Dongying, Shandong 257061, China

E-mail: delaunay@163.com

CHEN Hua, DENG Shao-gui, LI Zhi-qiang, et al. Application of differential evolutionary algorithm in double exponential fitting. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(16): 231-232.

**Abstract:** It preferably settles the fitting problem of one element four parameter double exponential functions and two element three parameter double exponential functions by using differential evolutionary algorithm. Compared with the traditional optimization algorithm, it is not affected by initial value, and has global convergence. Compared with PSO algorithm, it has fast convergence speed. So it is all effective way for nonlinear constrained optimization problems.

**Key words:** optimization problem; differential evolutionary algorithm; double exponential fitting

**摘 要:** 利用差分进化算法较好地解决了一元四参数双指数和二元三参数双指数拟合问题。与传统优化算法相比, 不受初值的影响, 并具有全局收敛性, 与 PSO 算法相比, 收敛速度快, 是一种求解非线性约束优化问题的有效方法。

**关键词:** 优化问题; 差分进化算法; 双指数拟合

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.16.071 文章编号: 1002-8331(2008)16-0231-02 文献标识码: A 中图分类号: TP18; O241.5

## 1 引言

双指数函数模型可有效描述光滑雷电全波波形的<sup>[1]</sup>、高空核电磁脉冲典型波形<sup>[2]</sup>等物理过程, 并在其它领域也有较好的应用, 比如边明远<sup>[3]</sup>提出了一种一元三参数双指数形式的纵向道路附着系数计算模型, 能够较好地描述纵向附着系数随车轮滑移率及其他因素非线性变化的规律。对双指数函数进行拟合的方法一般采用高斯牛顿法、共扼梯度法、阻尼最小二乘法等方法, 但这些算法都依赖于初值的选取, 难以获得全局最优解, 收敛速度也会很慢, 甚至发散。朱仁仁<sup>[4]</sup>充分利用观测值, 采用了一些处理技巧, 应用循环搜索法确定了参数初始值并成功地验证了 Meyer&Roth 给出的二元三参数双指数模型<sup>[5]</sup>。陈华<sup>[6]</sup>采用同伦交替迭代法, 有效降低了对初值的依赖性, 扩大了收敛范围, 但仍然存在对初值的依赖, 同时又增加了计算量。差分进化(Differential Evolution, DE)算法<sup>[7,8]</sup>是由 Rainer Store 和 Kenneth Price 于 1996 年共同提出的一种采用浮点矢量编码在连续空间中进行随机搜索的优化算法, 由于其原理简单, 受控参数少, 无需设置初值和进行导数计算, 且易于理解和实现, 是一种比较有发展前途的算法<sup>[9-11]</sup>。因此, 可采用差分进化算法进行双指数拟合。

## 2 问题的提出

双指数函数模型根据自变量个数可分为一元和二元两种

形式, 在一元模型中常见的是四参数模型, 而在二元模型中常见的是三参数模型, 下面分别讨论这两种模型。

### 2.1 一元四参数双指数模型

已知数据集 $\{(x_i, y_i) | i=1, \dots, n\}$ , 试拟合数学模型  $y=ae^{-bx}+ce^{-dx}$  中的系数  $a, b, c, d$ 。该问题可转化为无约束非线性优化问题:

$$\min \sum_{i=1}^n (ae^{-bx_i} + ce^{-dx_i} - y_i)^2 \quad (1)$$

在一些实际工程中, 系数  $a, b, c, d$  要求为非负值, 这时可转化为有约束非线性优化问题:

$$\min \sum_{i=1}^n (ae^{-bx_i} + ce^{-dx_i} - y_i)^2 \quad (2)$$

s.t.  $a, b, c, d \geq 0$

### 2.2 二元三参数双指数模型

已知数据集 $\{(x_i, y_i, z_i) | i=1, \dots, n\}$ , 试拟合数学模型  $z=a(e^{-bx}+e^{-cy})$  中的系数  $a, b, c$ 。该问题同样可转化为无约束非线性优化问题:

$$\min \sum_{i=1}^n (ae^{-bx_i} + ae^{-cy_i} - z_i)^2 \quad (3)$$

系数  $a, b, c$  若有非负值要求时, 同样可转化为有约束非线性优化问题:

$$\min \sum_{i=1}^n (ae^{-bx_i} + ae^{-cy_i} - z_i)^2 \quad (4)$$

s.t.  $a, b, c \geq 0$

基金项目: 中国石油天然气集团公司石油科技中青年创新基金项目(No.06E1020); 中国石油大学优秀博士学位论文培育基金(No.B2007-05)。

作者简介: 陈华(1972-), 男, 博士生, 讲师, 主要研究方向为工业应用数学; 邓少贵(1970-), 博士, 副教授, 主要研究方向为应用地球物理; 李智强, (1982-), 男, 博士生, 主要研究方向为应用地球物理; 范宜仁(1962-), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为应用地球物理。

收稿日期: 2007-08-28

修回日期: 2007-10-15

### 3 差分进化算法

差分进化算法整体结构十分类似于遗传算法,基本操作包括变异、交叉和选择三种操作。但与遗传算法主要有两点不同<sup>[10]</sup>:一是在遗传算法中,通过两个父代个体的交叉产生两个子个体,而在微分进化算法中是通过把种群中两个父代个体的向量差加权后,按一定的规则与第三个父代个体求和来产生一个子个体;二是在遗传算法中子个体以一定的概率取代其父代个体,而在微分进化算法中新产生的一个子个体只有当它比种群中的个体优良时才替换种群中个体。因此,其基本思想为:对于种群中的每个个体,通过从当前种群中随机选择三个点,以其中一个点为基础、另两个点为参照作一个扰动,所得点与该个体交叉后进行“自然选择”,保留较优者,实现种群的合理进化。

设待求优化问题为  $\min f(x)$ ,则标准差分进化算法描述为:

(1)初始化。输入进化参数:种群规模  $N$ ,交叉概率  $P_c$ ,交叉因子  $F \in (0, 1)$ ,进化代数  $t=0$ ,自变量的下界  $lb$  和上界  $ub$ ,随机生成初始种群:  $\bar{X}(0)=\{X_1(0), \dots, X_N(0)\}$ ,其中  $X_i(0)=(x_1^{(i)}(0), \dots, x_n^{(i)}(0))$ ;

(2)个体评价。计算每个个体  $X_i(t)$  的适应值  $f(X_i(t))$ ;

(3)繁殖。对种群中的每个个体  $X_i(t)$ ,随机生成 3 个互不相同的随机整数  $r_1, r_2, r_3 \in \{1, 2, \dots, N\}$  和随机整数  $j_{rand} \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,变异和交叉操作采用下面公式:

$$x_j^{(i)'}(t) = \begin{cases} x_j^{(r_1)}(t) + F(x_j^{(r_2)}(t) - x_j^{(r_3)}(t)) & \text{if } \text{rand}[0, 1] < P_c \text{ or } j = j_{rand} \\ x_j^{(i)}(t) & \text{else} \end{cases}$$

(4)选择。根据适应值的情况选取最优者:

$$X_i(t+1) = \begin{cases} x_j^{(i)'}(t) & \text{if } f(x_j^{(i)'}(t)) < f(x_j^{(i)}(t)) \\ x_j^{(i)}(t) & \text{else} \end{cases}$$

(5)终止检验。如果种群  $X_i(t+1)$  满足终止准则,则输出  $X_i(t+1)$  中具有最小适应值的个体作为最优解;否则转(2)。

差分进化算法中主要的控制参数是种群规模  $N$ ,交叉概率  $P_c$ ,交叉因子  $F$ ,据文献[7, 8, 11],  $N$  通常取  $5n \sim 10n$ ,其中  $n$  为变量的个数,  $P_c$  通常取 0.1,  $F$  通常取 0.5。

## 4 应用

### 4.1 一元四参数双指数模型<sup>[6]</sup>

利用所测的部分数据,见数据表 1,拟合公式  $y = ae^{-bx} + ce^{-dx}$ 。

表 1 测试数据 1

$x_i$	0	0.100 0	0.200 0	0.300 0	0.400 0	0.500 0	0.600 0
$y_i$	5.895 5	3.563 9	2.517 3	1.979 9	1.899 0	1.393 8	1.135 9
$x_i$	0.700 0	0.800 0	0.900 0	1.000 0	1.100 0	1.200 0	1.300 0
$y_i$	1.009 6	1.034 3	0.843 5	0.685 6	0.610 0	0.539 2	0.394 6
$x_i$	1.400 0	1.500 0	1.600 0	1.700 0	1.800 0	1.900 0	2.000 0
$y_i$	0.390 3	0.547 4	0.345 9	0.137 0	0.221 1	0.170 4	0.263 6

建立适应值函数:

$$f(a, b, c, d) = \sum_{i=1}^n (ae^{-bx_i} + ce^{-dx_i} - y_i)^2 \quad (5)$$

由数据表 1 知公式(5)中的  $n$  为 21。另外,  $N$  取 40,  $P_c$  取 0.2,  $F$  取 0.5, 变量的搜索范围为  $[0, 1.000]$ , 经计算所得的系数值带入拟合公式绘制拟合图 1, 与文献[6]中利用同伦交替迭代法所得图形无异。另外,本次计算中迭代次数也仅为 8 次,计算

速度不比迭代法慢。

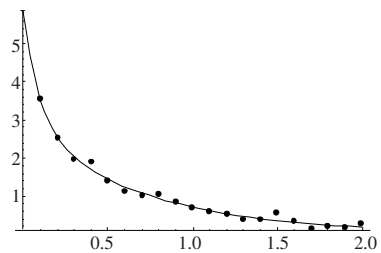


图 1 差分进化算法拟合效果图

### 4.2 两元三参数双指数模型<sup>[4,5]</sup>

Meyer 与 Roth 于 1972 年提出了一个典型的多指数(双指数)函数,成为一个著名的难题:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^m [f(t_i, x) - y_i]^2 \quad (6)$$

其中,  $t_i, x$  均为向量,  $f(t_i, x) = x_3[\exp(-x_1 t_{1i}) + \exp(-x_2 t_{2i})]$ ,  $y_i$  的值由  $(t_i, x)$  算出,而  $t_{1i}, t_{2i}$  的值由表 2 给出( $i=1, 2, \dots, 23$ )。

表 2 测试数据 2

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{1i}$	0	0.6	0.6	1.4	2.6	3.2	0.8	1.6	2.6	4.0	1.2	2.0
$t_{2i}$	0	0.4	1.0	1.4	1.4	1.6	2.0	2.2	2.2	2.2	2.6	2.6
$i$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
$t_{1i}$	4.6	3.2	1.6	4.2	2.0	3.2	2.8	4.2	5.4	5.6	3.2	
$t_{2i}$	2.8	3.0	3.2	3.4	3.8	3.8	4.2	4.2	4.4	4.8	5.0	

曲面图如图 2,由于梯度变化较快,用传统优化算法会遇到很大困难。

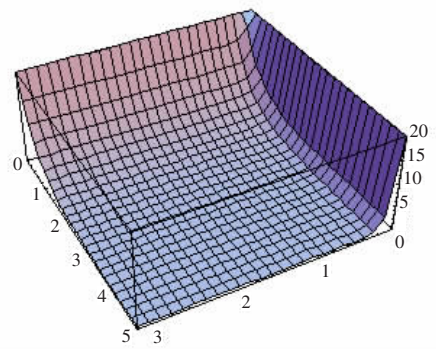


图 2 两元三参数双指数曲面图

取适应值函数为公式(6),根据数据表 2 可知  $m=23$ 。另外,  $N$  取 120,  $P_c$  取 0.2,  $F$  取 0.5, 变量的搜索范围为  $[-100, 100]$ , 迭代 7 次之后得到的结果为:  $(14.299 7, 1.5, 20.1)^T$ , 适应值为:  $1.633 32e-12$ 。而采用  $w$  线性自适应的 PSO 算法,取 25 个微粒,变量的搜索范围为  $[-50, 50]$ ,最大速度 0.2。迭代 30 次之后得到的结果为:  $x=(13.534 1, 1.500 22, 12.099 9)^T$ ,适应值为:  $1.857 03e-6$ 。从计算结果来看,DE 算法在计算速度和收敛精度上都优于  $w$  线性自适应的 PSO 算法。

## 5 结论

本文利用差分进化算法成功的解决了一元四参数双指数和两元三参数双指数拟合问题。通过两个实例可以看出,差分进化算法作为一种全局优化算法,不受初值的影响,不需要计

(下转 235 页)