

# 二维目标下分布性与收敛性结合的种群维护策略

李密青, 郑金华, 罗彪, 肖桂霞

LI Mi-qing, ZHENG Jin-hua, LUO Biao, XIAO Gui-xia

湘潭大学 信息工程学院, 湖南 湘潭 411105

Institute of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China

LI Mi-qing, ZHENG Jin-hua, LUO Biao, et al. Population maintenance strategy combining diversity with convergence for 2-objective problem. *Computer Engineering and Applications*, 2008, 44(11): 75-79.

**Abstract:** Population maintenance is an important issue in multi-objective evolutionary algorithms. For the traditional methods only concentrate on the distribution of solutions, a population maintenance strategy with both diversity and convergence considered is proposed. This measure assigns fitness with relative convergent relationship during neighboring individuals, which compensated the "coarseness" of the simple Pareto dominance relation effectively, and controlled crowding degree with an adjustable neighborhood method. Comparing with NSGA-II and SPEA2, this algorithm can maintain diversity of the population effectively, and have a good convergence and running time.

**Key words:** multi-objective evolutionary algorithm; multi-objective optimal problem; population maintenance; convergence; diversity

**摘要:** 种群维护是多目标进化算法的重要组成部分。针对传统方法在维护过程中只考虑分布性的情况, 提出一种分布性与收敛性结合的种群维护策略, 该方法用一种邻近个体间的相对趋近关系来表示其适应值, 弥补了单纯 Pareto 支配关系的“粗糙性”, 并用一种可调邻域的方法对种群的密集程度进行控制。将其与 NSGA-II 和 SPEA2 进行对比, 实验结果表明该算法在有效保持种群分布性的同时, 拥有良好的收敛性和速度。

**关键词:** 多目标进化算法; 多目标优化问题; 种群维护; 收敛性; 分布性

**文章编号:** 1002-8331(2008)11-0075-05 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP18

多目标进化算法(Multi-Objective Evolutionary Algorithms, MOEAs)由于其特有的优势, 现在已成为多目标优化问题的主流解决方法之一。该类算法的特点是不需要人为定义各目标的权重, 而是由算法运行一次找出所有的非劣解(Pareto 前沿)<sup>[1]</sup>, 再由决策者进行权衡选择。

近年来, 进化计算界相继提出了大量多目标进化算法。最有代表性的主要有: 如 Fonseca 和 Fleming 提出的 MOGA(Genetic Algorithm for Multi-objective Optimization)<sup>[2]</sup>; Horn 等提出的 NPGA<sup>[3]</sup>(Niche Pareto Genetic Algorithm), 以及在其基础上提出的 NPGA-II<sup>[4]</sup>; Srinivas 和 Deb 提出的 NSGA<sup>[5]</sup>(Non-dominated Sorting Genetic Algorithm), 以及 Deb 等在其基础上提出了 NSGA-II<sup>[6]</sup>; Zitzler 和 Thiele 提出的 SPEA<sup>[7]</sup>(Strength Pareto Evolutionary Algorithm)和 SPEA2<sup>[8]</sup>, 以及 Kim 等人在其基础上提出的 SPEA2+<sup>[9]</sup>; Come 等提出的 PESA<sup>[10]</sup>(Pareto Envelope-based Selection Algorithm)和 PESA-II<sup>[11]</sup>; Knowles 等提出的 PAES<sup>[12]</sup>(Pareto Archived Evolution Strategy)和 M-PAES<sup>[13]</sup>

(Mimetic PAES); Coello 等提出的 Micro-GA<sup>[14]</sup>(Micro-Genetic Algorithm)和 Micro-GA2<sup>[15]</sup>; Deb 等提出的 MOEA<sup>[16]</sup>。这些算法大多有一些共同的特征<sup>[17, 18]</sup>: 根据个体间的 Pareto 支配关系和密度信息确定个体适应值; 构造外部种群保留算法的非支配个体, 当外部种群的规模超过规定值时, 用适当的方法进行修剪。

多目标进化算法的研究目标主要是使算法种群快速收敛, 并且广泛而均匀分布于问题的非劣最优域。外部种群维护是提高解集分布性的关键因素, 决定着种群的多样性。但几乎所有的维护方法都仅是针对个体分布的均匀性而言的, 并没有考虑个体的收敛程度, 然而, 即使是非支配个体, 其收敛度也有优劣之分, 并且这些方法在维护分布性的同时, 某种程度上会破坏解集的收敛性<sup>[19]</sup>。

为了进一步提高解集的收敛度, 本文提出一种二维目标下分布性与收敛性结合的种群维护策略(CDCPMS)。该方法用一种邻近个体间的相对趋近关系来表示其适应值, 并采用一种可

**基金项目:** 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60773047); 国家高技术研究发展计划(863)(the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant No.2001AA114060); 湖南省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Hunan Province of China under Grant No.05JJ30125); 教育部留学回国人员科研启动基金(The Project-sponsored by SRF for ROCS, SEM 教外司留[2005]546号); 湖南省教育厅重点科研项目(No.06A074)。

**作者简介:** 李密青(1981-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为进化计算; 郑金华(1963-), 教授, 博士生导师, 主要研究方向为进化计算、智能科学等; 罗彪(1984-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为进化计算; 肖桂霞(1983-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为进化计算。

**收稿日期:** 2007-11-05 **修回日期:** 2008-01-02

邻域的方法对种群的密集程度进行控制,使种群剔除那些收敛性与分布性都较差的个体。最后通过与经典的多目标进化算法 NSGA-II 和 SPEA2 比较,表明了该方法在较好地保持了分布性的同时,拥有更好的收敛性和运行效率。

## 1 相关概念

最小化与最大化问题可以相互转化,因此,仅以最小化多目标问题为研究对象。多目标问题(MOP)的一般描述为:

给定决策向量  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 它满足下列约束:

$$g_i(X) \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, k \quad (1)$$

$$h_i(X)=0 \quad i=1, 2, \dots, l \quad (2)$$

设有  $r$  个优化目标, 且这  $r$  个优化目标是相互冲突的, 优化目标可表示为:

$$f(X)=(f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X))$$

寻求  $X^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , 使  $f(X^*)$  在满足约束(1)和(2)的同时达到最小。MOEA 经常用到如下几个基本概念:

**定义 1** (个体的 Pareto 支配关系) 设  $p$  和  $q$  是进化种群 Pop 中的任意两个不同的个体, 称  $p$  支配 (dominate)  $q$ , 则必须满足下列 2 个条件:

(1) 对所有的子目标,  $p$  不比  $q$  差, 即  $f_k(p) \leq f_k(q) (k=1, 2, \dots, r)$ ;

(2) 至少存在一个子目标, 使  $p$  比  $q$  好。即  $\exists l \in \{1, 2, \dots, r\}$  使  $f_l(p) < f_l(q)$ 。

其中  $r$  为子目标的数量。此时称  $p$  为非支配的 (non-dominated),  $q$  为被支配的 (dominated)。表示为  $p > q$ , 其中 “ $>$ ” 是支配关系 (dominate relation)。

**定义 2** (Pareto 最优解) 给定一个多目标优化问题  $\text{Min} f(X)$ , 称  $X^* \in \Omega$  是最优解, 若  $\forall X \in \Omega$ , 满足下列条件:

$$\text{或者 } \bigwedge_{i \in I} (f_i(X) = f_i(X^*));$$

$$\text{或者至少存在一个 } j \in I, I = \{1, 2, \dots, r\}, \text{ 使: } f_j(X) > f_j(X^*).$$

其中  $\Omega$  是满足式(1)和式(2)的可行解集, 即:

$$\Omega = \{X \in R^n | g_i(X) \geq 0, h_i(X) = 0; (i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, l)\}$$

**定义 3** (Pareto 最优面(边界)) 给定一个多目标优化问题  $\text{Min} f(X)$  和它的最优解集  $\{X^*\}$ , 它的 Pareto 最优面定义为:

$$PF^* = \{f(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X)) | X \in \{X^*\}\} \quad (3)$$

**定义 4** (非支配集) 设有解集  $P$ ,  $P$  中的个体  $q$  不被任何其它个体支配, 则  $q$  是  $P$  中的非支配个体;  $P$  的非支配个体构成的子集称为  $P$  的非支配集  $NDset$ 。即  $NDset = \{q | q \in P \text{ 且 } \exists p \in P, \text{ 使 } p > q\}$ 。

## 2 分布性与收敛性结合的种群维护策略

在进化过程中, 种群中的非支配个体数可能大于外部种群的大小, 此时需要对外部种群进行修剪, 通常的做法是根据非支配个体的密度信息移出部分个体。NPGA<sup>[9]</sup>采用了适应度共享 (fitness sharing) 机制来对种群进行修剪, 它根据小生境数目这一参数连续地更新适应度共享函数, 以便获得非支配边界上均匀分布的结果, 但当共享适应度与锦标赛选择相结合时, 算法在执行过程中可能会出现混沌行为; PESA<sup>[10]</sup>采用了一种超网格技术对种群进行维护, 它将目标空间分成若干个 hyper-box, 每个个体就与某个网格相关联, 网格里的个体数目称为挤压因子, 在进入归档集的过程中, 挤压因子大的个体将被清除掉; NSGA-II<sup>[6]</sup>利用个体的聚集距离 (crowding distance) 来对种群进

行维护, 通过计算进化群体中每个个体的聚集距离, 构造了一个偏序集, 对聚集距离较小的个体进行淘汰, 其时间复杂度为  $O(rN \ln N)$ 。但随着维数的增大, 构造的这种聚集距离很难精确的反映个体的密度信息, 并且由于构造方法的静态性, 没有考虑已经移出个体对种群分布情况的影响。算法虽然有很好的时效性, 但分布结果并不理想。SPEA2<sup>[8]</sup>采用剪切方法 (archive truncation procedure) 对外部种群进行维护。一个个体与第  $k$  个距它最近的个体间的距离为该个体的密度值, 然后依据密度值进行删除, 算法时间复杂度为  $O(rN^3)$ 。该方法中个体密度值具有动态性, 每移出一个个体, 外部种群中的部分个体的密度值都会发生变化, 这样算法虽然具有较高的时间复杂度, 但分布性得到了很好的保持。以上的这些方法都仅是针对个体分布性而言的, 并没有考虑个体的收敛程度, 然而, 即使是非支配个体, 其收敛度也有优劣之分, 如图 1 所示。

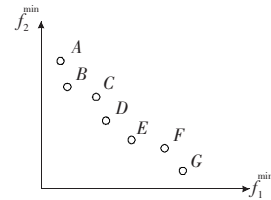


图 1 非支配个体分布实例

图 1 中的 7 个个体是互不支配的, 但容易发现个体  $C, F$  的收敛度较差,  $B, D, E$  的收敛度较好, 但由于 Pareto 的“粗糙性”, 用 Pareto 的概念是无法判断它们的优劣的。下面用一种新的方法来进行适应度赋值。

$$F(i) = \begin{cases} A & i=N \text{ 或 } i=1 \\ S(i)/S(i-1) & i=N-1 \\ S(i)/S(i+1) & i=2 \\ S^2(i)/(S(i-1)S(i+1)) & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

在式(4)中,  $F(i)$  为个体  $i$  的适应度,  $N$  为非支配个体数目,  $A$  为一很大的数。另外, 在适应度赋值前对所有非支配个体按  $f_1$  目标值进行从小到大排序。  $S(i)$  表示个体与其邻近个体的趋近关系, 定义为:

$$S(i) = (f_2(i-1) - f_2(i))(f_1(i) - f_1(i+1)) / ((f_1(i-1) - f_1(i))(f_2(i) - f_2(i+1))) \quad (5)$$

从式(4), (5)中可以看出, 个体的适应度越大, 表示个体相对于周围个体有较好的收敛性, 边界个体的适应度赋予很大的值, 这样它们得以保留, 中间个体的适应度与其周围个体的相对趋近程度有关。下面给出种群维护的具体步骤。

**步骤 1** 若  $|Q| = N > M$ , 对非支配个体集  $Q$  按以上方法进行适应度赋值。其中  $M$  为外部种群大小。

**步骤 2** 对非支配个体按适应值从小到大的顺序排列  $i_1, \dots, i_{j-1}, i_j, i_{j+1}, \dots, i_{|Q|}$ , 初始值  $j=1$ 。

**步骤 3** 若  $j > |Q|$ , 转步骤 5。否则  $i=i_j$ , 对个体  $i$ , 若以  $i$  为圆心, 以  $r$  为半径的区域内存在其它个体, 则淘汰  $i$ ,  $|Q'| = |Q| - 1$ , 并调整相应的个体编号。其中  $r = ((f_1(N) - f_1(1))^2 + (f_2(N) - f_2(1))^2)^{0.5} / N$ 。

**步骤 4** 若  $|Q'| = M$ , 则维护结束, 否则  $j=j+1$ , 转步骤 3。

**步骤 5**  $r = \sqrt{2} r, j=1$ , 转步骤 3。

CDCPMS 用一种可调邻域的方法来维持种群的分布性。对任一个体, 在以  $r$  为半径的邻域内, 若没有其它个体, 则对其进行保留, 如图 2 所示。

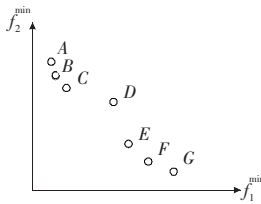


图2 非支配个体分布实例

在图2中,虽然个体D的适应度较差,但其周围个体分布比较稀疏,为了使种群拥有较好的分布性,算法对D进行保留。另外从步骤3.5可以发现,一次循环后,若剔除的个体数少于 $N-M$ ,则调整个体的邻域半径,重新对个体进行选择操作。下面给出整个算法的具体流程。

CDCPMS 借鉴 NSGA-II 采用了分层构造非支配集的方法<sup>[6]</sup>:

**步骤1** 算法参数设定:内部种群 $R$ 规模为 $N$ ,外部种群 $Q$ 的最大规模 $M$ ,中间种群 $P$ 的规模 $M+N$ ,交叉概率 $P_c$ ,变异概率 $P_m$ ,算法搜索的最大代数 $gen_{max}$ ,令进化代数 $gen=1$ 。

**步骤2** 随机产生一个初始种群 $R$ ,同时初始化外部种群 $Q$ ,并使之为空。

**步骤3** 合并 $R_{gen}, Q_{gen}$ 到 $P_{gen}$ ,将 $P_{gen}$ 中的个体按支配的关系逐层加入到 $Q_{gen+1}$ 中。当加入第 $i$ 层非支配集 $S$ 后的总个体数大于 $M$ 时,按上面给出的方法对外部种群进行维护。若 $gen+1=gen_{max}$ ,将 $Q_{gen+1}$ 中的个体作为返回结果,程序结束。

**步骤4** 对 $Q_{gen+1}$ 执行锦标赛选择操作,对选中的个体执行交叉和变异操作。并将结果保存到 $R_{gen+1}$ 中, $gen=gen+1$ ,转步骤(3)。

### 3 实验与讨论

为了检验所提出的 CDCPMS 的有效性,将其与另外两个著名的 MOEAs(SPEA2<sup>[8]</sup>,NSGA-II<sup>[6]</sup>)相比较。实验运行在 1.7 GHz CPU 256 M 内存 Windows XP 环境下。选取了 Deb 提出的 ZDT 系列<sup>[20]</sup>进行测试,如表1所示。在实验中,三种算法都采用实数编码,交叉概率 0.8,变异概率 0.01,种群规模为 100,被评价个体的数目为 20 000,算法的运行代数数为评价个体的数目除以种群规模。每个算法对各个测试函数独立运行 10 次,结果取平均值。

多目标优化的三个基本目标为收敛性,分布性和运行时

表1 实验测试函数

测试问题	目标函数	约束条件及特征
ZDT1	$f_1(x_1)=x_1$	$m=30; 0 \leq x_i \leq 1$ 真实的 Pareto 凸
	$f_2(x)=g(1-\sqrt{(f_1/g)})$ $g(x)=1+9 \sum_{i=2}^m x_i/(m-1)$	
ZDT2	$f_1(x_1)=x_1$	$m=30; 0 \leq x_i \leq 1$ 真实的 Pareto 凹
	$f_2(x)=g(1-(f_1/g)^2)$ $g(x)=1+9 \sum_{i=2}^m x_i/(m-1)$	
ZDT3	$f_1(x_1)=x_1$	$m=30; 0 \leq x_i \leq 1$ 真实的 Pareto 凸且非连续
	$f_2(x)=g(1-\sqrt{f_1/g}-(f_1/g)\sin(10\pi f_1))$ $g(x)=1+9 \sum_{i=2}^m x_i/(m-1)$	
ZDT4	$f_1(x_1)=x_1$	$m=10; 0 \leq x_i \leq 1$ 真实的 Pareto 面 凸
	$f_2(x)=g(1-\sqrt{(f_1/g)})$ $g(x)=1+10(m-1)+\sum_{i=2}^m (x_i^2-10\cos(4\pi x_i))$	
ZDT6	$f_1(x_1)=1-\exp(-4x_1)\sin^6(6\pi x_1)$	$m=10; 0 \leq x_i \leq 1$ 真实的 Pareto 面 凹且非均匀
	$f_2(x)=g(1-(f_1/g)^2)$ $g(x)=1+9((\sum_{i=2}^m x_i/(m-1))^{0.25})$	

间。在这里采用 Generational Distance(GD)<sup>[21]</sup>法来估计算法的最终边界与全局非劣最优区域的趋近程度,计算如下:

$$GD = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}}{n} \quad (6)$$

$n$  是解集中个体的数目, $d_i$  是每个个体到全局非劣最优解的最小欧几里得距离。 $GD$  的值越小就说明解集越靠近全局非劣最优区域,如果 $GD=0$ 就说明算法的解都在全局非劣最优区域上,这是最理想的情况。分布性评价采用 Schott 提出的方法<sup>[22]</sup>,其函数定义如下:

$$SP = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{d}-d_i)^2} \quad (7)$$

$d_i = \min_j (|f_1^i(x) - f_1^j(x)| + |f_2^i(x) - f_2^j(x)|), (i, j=1, 2, \dots, n), \bar{d}$  是所有 $d_i$ 的平均值。当算法获得的非劣解完全均匀地分布在目标空间时, $SP=0$ 。

表2显示了三种算法在5个测试函数上的收敛度,分布

表2 算法性能比较

Test Problem	MOEA	Convergence Distance(GD)		Sparsity(SP)		Time/s	
		Average	Std. Dev	Average	Std. Dev	Average	Std. Dev
ZDT1	NSGA-II	0.000 364 51	0.000 284 17	0.007 264 1	0.009 857 1	2.118 8	0.120 9
	SPEA2	0.000 342 59	2.461e-005	<b>0.003 179 6</b>	0.000 347 1	24.400 2	0.201 3
	CDCPMS	<b>0.000 229 27</b>	6.001e-005	0.008 453 8	0.001 362 0	<b>1.440 8</b>	0.018 2
ZDT2	NSGA-II	0.000 373 54	0.000 286 47	0.008 236 9	0.000 991 5	2.140 6	0.104 1
	SPEA2	<b>9.142e-005</b>	3.326e-005	<b>0.002 965 7</b>	0.000 298 5	24.856 4	0.824 2
	CDCPMS	0.000 108 48	2.426e-006	0.006 869 8	0.002 911 9	<b>1.324 8</b>	0.074 7
ZDT3	NSGA-II	0.000 575 91	8.031e-006	<b>0.008 792 4</b>	0.001 150 1	3.100 2	0.102 7
	SPEA2	0.001 829 73	8.411e-005	0.014 647 8	0.009 053 7	19.303 2	1.248 3
	CDCPMS	<b>0.000 337 74</b>	1.223e-005	0.013 498 2	0.005 255 4	<b>1.455 5</b>	0.119 4
ZDT4	NSGA-II	0.036 124 38	0.009 136 27	0.027 242 7	0.001 479 3	1.834 4	0.059 9
	SPEA2	0.064 639 29	0.029 823 84	<b>0.004 118 4</b>	0.000 455 1	20.106 6	0.980 7
	CDCPMS	<b>0.000 141 52</b>	4.775e-005	0.010 508 6	0.002 504 4	<b>1.168 8</b>	0.030 4
ZDT6	NSGA-II	0.052 445 96	0.018 029 94	0.007 924 8	0.003 241 1	1.831 2	0.046 7
	SPEA2	0.000 551 96	1.352e-005	<b>0.001 844 4</b>	0.000 198 8	23.672 1	0.160 3
	CDCPMS	<b>0.000 433 52</b>	6.798e-005	0.006 811 6	0.001 587 9	<b>1.037 4</b>	0.050 3



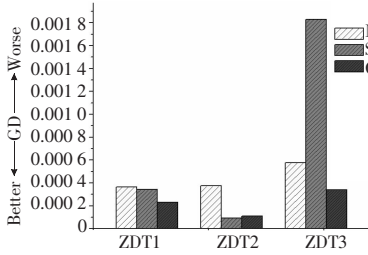


图3 在ZDT1、ZDT2、ZDT3上三种算法收敛度比较

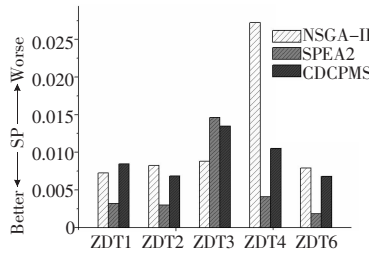


图4 在ZDT系列上,三种算法分布度比较

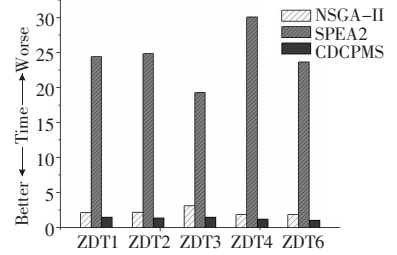


图5 在ZDT系列上,三种算法时间比较

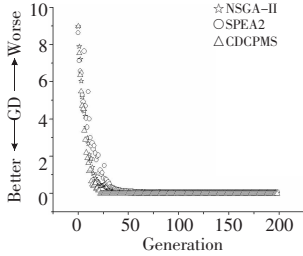


图6 在ZDT4上,三种算法从0~200代的收敛度曲线

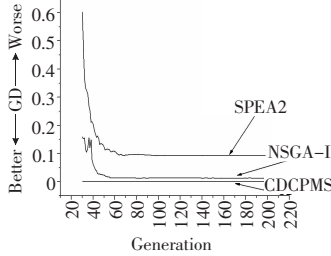


图7 在ZDT4上,三种算法从30~200代的收敛度曲线

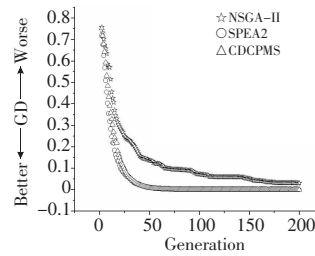


图8 在ZDT6上,三种算法从0~200代的收敛度曲线

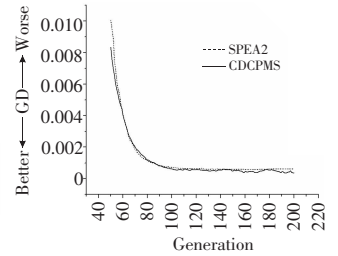


图9 在ZDT6上,CDCPMS与SPEA2在50~200代的收敛度曲线比较

度,运行时间结果。在每个评价指标中,第一列为均值,第二列为标准差,加粗数据为最优值。从表2,图3中可以发现,对较易收敛的测试函数ZDT1、ZDT2、ZDT3,三种算法性能相差不多,在ZDT1、ZDT3上CDCPMS要略优于其它两种算法,在ZDT2上SPEA2拥有最好的收敛度;对较难收敛的测试函数ZDT4和ZDT6,图6~9显示了它们收敛度随代数变化的曲线。从图6,7可以看出,在ZDT4上,CDCPMS不仅具有最好的收敛度,而且有最快的收敛度变化率,CDCPMS在30代时收敛度变化已趋于平稳了,而NSGA-II、SPEA2则分别为50代和70代;从图8,9可以看出,NSGA-II对ZDT6的收敛效果并不理想,CDCPMS和SPEA2对ZDT6具有很好的收敛效果,它们的收敛度变化率相近,CDCPMS略好于SPEA2,但SPEA2的稳定性要略好于CDCPMS。

NSGA-II比较相近,它们要次于SPEA2,在ZDT1、ZDT3上CDCPMS要略逊于NSGA-II,在ZDT2、ZDT4、ZDT6上CDCPMS要略好于NSGA-II,SPEA2除了对ZDT3较难保持分布性外,在其余的函数上都拥有最优值。图10~12为三种算法在几个测试函数上的最终边界分布情况。图5显示了三种算法的运行时间比较,可以发现CDCPMS拥有最快的时间效率,略好于NSGA-II,远好于SPEA2。

通过上面的分析和比较发现:在保持解集的分布性方面,CDCPMS与NSGA-II相当,次于SPEA2;在趋近最优前沿方面和运行效率方面,CDCPMS都要优于其它两种算法,特别是对那些较难收敛的问题,CDCPMS具有更优的结果。

从表2和图4中可以发现,在分布性方面,CDCPMS与

种群维护是多目标进化算法的重要组成部分,大多数维护

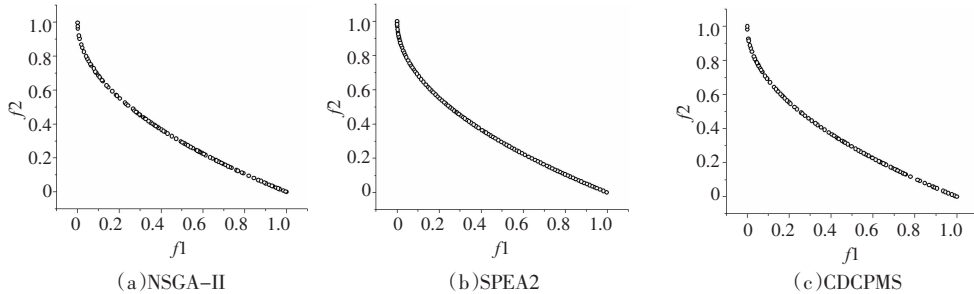


图10 3种算法在ZDT1上的最终边界

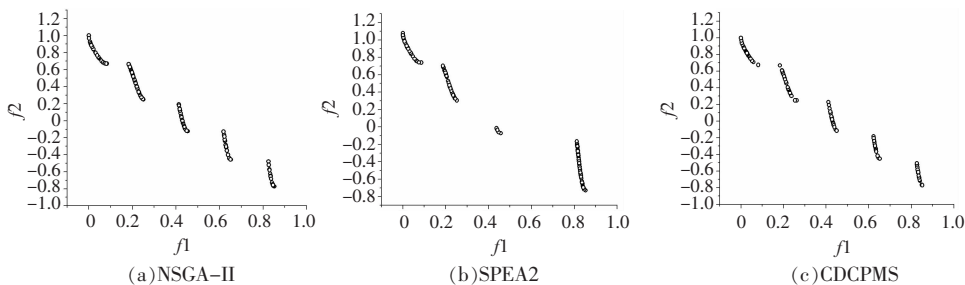


图11 3种算法在ZDT3上的最终边界

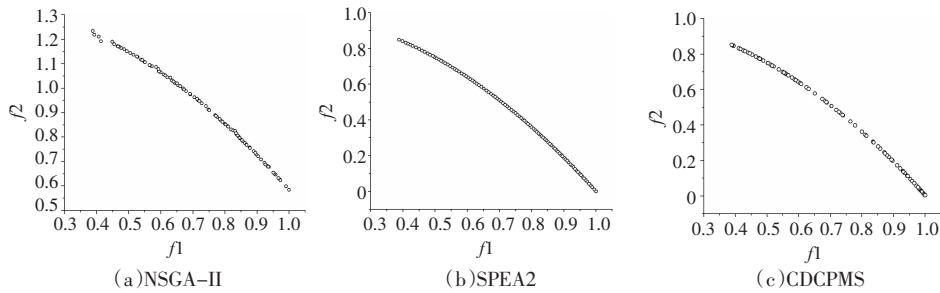


图 12 3种算法在 ZDT6 上的最终边界

方法都仅是针对个体分布的均匀性而言的,并没有考虑个体的收敛程度。本文设计了一种分布性与收敛性结合的种群维护策略 CDCPMS。可以被概括为:在趋近最优前沿方面,用邻近个体间的相对趋近关系赋予个体粒度更细的适应值;在保持解集分布性方面,用一种可调邻域的方法对种群的密集程度进行控制。将其与 NSGA-II, SPEA2 进行比较实验,结果表明 CDCPMS 具有良好的搜索性能。

必须说明的是,本文的算法是针对二维测试函数的,今后的进一步工作是怎样对高维测试函数设计一种分布性与收敛性结合的种群维护策略。

## 参考文献:

- [1] Deb K. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms[M]. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2001.
- [2] Fonseca C M, Fleming P J. Genetic algorithm for multiobjective optimization: formulation, discussion and generalization[C]//Forrest S. Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms. San Mateo: Morgan Kaufmann Publishers, 1993: 416-423.
- [3] Horn J, Nafpliotis N, Goldberg D E. A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization[C]//Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Piscataway, New Jersey, 1994. IEEE Service Center, 1994, 1: 82-87.
- [4] Erickson M, Mayer A, Horn J. The niched pareto genetic algorithm 2 applied to the design of groundwater remediation systems[C]//EMO, 2001: 681-695.
- [5] Srinivas N, Deb K. Multi-objective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms[J]. Evolutionary Computation, 1994, 2(3): 221-248.
- [6] Deb K, Agrawal S, Pratap A, et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II, KanGAL report 200001[R]. Indian Institute of Technology, Kanpur, India.
- [7] Zitzler E, Thiele L. Multi-objective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271.
- [8] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: improving the strength Pareto evolutionary algorithm, TIK-Report 103[R]. 2001.
- [9] Kim M, Hiroyasu T, Miki M, et al. SPEA2+: improving the performance of the strength pareto evolutionary algorithm 2[C]//Lecture Notes in Computer Science 3242: Parallel Problem Solving from Nature PPSN VIII, Birmingham, UK, September 2004. Springer-Verlag, 2004: 742-751.
- [10] Corne D W, Knowles J D, Oates M J. The Pareto envelope-based selection algorithm for multiobjective optimization[C]//Schoenauer M, Deb K, Rudolph G, et al. Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference. New York: Springer, 2000: 839-848.
- [11] Corne D W, Jerram N R, Knowles J D, et al. PESA-II: region-based selection in evolutionary multiobjective optimization[C]//Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2001). Morgan Kaufmann Publishers, 2001: 283-290.
- [12] Knowles J, Corne D. Approximating the non-dominated front using the Pareto archive evolutionary strategy[J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2): 149-172.
- [13] Knowles J, Corne D. M-PAES: a memetic algorithm for multiobjective optimization[C]//2000 Congress on Evolutionary Computation, Piscataway, New Jersey, July 2000. IEEE Service Center, 2000, 1: 325-332.
- [14] Coello C A, Pulido G T. A micro-genetic algorithm for multiobjective optimization[C]//Zitzler E, Kalyanmoy D, Thiele L. LNCS 1993: First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. London, UK: Springer-Verlag, 2001: 126-140.
- [15] Pulido G T, Coello C A C. The micro genetic algorithm 2: Towards online adaptation in evolutionary multiobjective optimization[C]//EMO, 2003: 252-266.
- [16] Deb K, Mohan M, Mishra S. A fast multi-objective evolutionary algorithm for finding well-spread Pareto-optimal solutions, KanGAL Report No.2003002[R]. 2003.
- [17] 崔逊学. 多目标进化算法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006.
- [18] 郑金华. 多目标进化算法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [19] Laumanns M, Thiele L, Deb K, et al. Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2002, 10(3): 263-282.
- [20] Deb K. Multi-objective genetic algorithms: problem difficulties and construction of test problems[J]. Evolutionary Computation, 1999, 7(3): 205-230.
- [21] Van Veldhuizen D A, Lamont G B. Multiobjective evolutionary algorithm test suites[C]//Carroll J. Proceedings of the 1999 ACM Symposium on Applied Computing, 1999: 351-357.
- [22] Fonseca C M, Fleming P J. Multiobjective genetic algorithms made easy: selection, sharing, and mating restriction[C]//Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications, 1995: 42-52.