◎研究、探讨◎

分块响应面法研究

潘　雷，谷良贤
PAN Lei，GU Liang-xian

西北工业大学 航天学院，西安 710072
College of Astronautics，Northwestern Polytechnical University，Xi'an 710072，China
E-mail：dongeast007@qq.com

PAN Lei，Gu Liang-xian.Research on Improved Response Surface Method（IRSM）.Computer Engineering and Application. Computer Engineering and Applications，2009，45（19）：37-39.

Abstract：When constructing an approximation surface with Response Surface Method（RSM），the approximation surface usually covers the whole interpolating space.Because of the cost of computation，the order of the approximation surface usually is below four.However，when constructing an approximation surface for a nonlinear surface in large space with low order response surface，the accuracy of approximation will be absolutely very low.Actually，it's easily concluded from the Taylor theory that the response surface can only have good accuracy in small space.The Improved RSM（IRSM）raised in this paper divides the interpolating space into several small subspaces，which will reduce the scale of the space that the RSM has to cover，and improves the accuracy of RSM.The result proves that the accuracy of IRSM is never below the RSM no matter what the number of sample point is.If the number of sample points is large，the approximating accuracy of IRSM is much higher than the RSM，which makes the IRSM is more suitable for the MDO.

Key words：Improved Response Surface Method（IRSM）；approximation model；multidisciplinary design optimization

摘　要：在对采样点构建插值曲面时，响应面法（Response Surface Method，RSM）通常是对整个曲面进行插值近似，由于计算量的原因，采用的近似曲面阶数通常不超过四阶。但是，对于高度非线性的曲面，使用低阶响应面在较大范围内近似毫无疑问会降低响应面的近似精度。分块响应面法采用一定的策略对近似空间进行合理分块，缩小响应面的近似范围，从而提高了响应面在该空间的近似精度。测试结果表明，在样本数量和样本空间变化时，分块响应面法的近似精度不低于响应面法，尤其是当样本数量较多时，分块响应面法的近似精度要远高于响应面法。这就使得分块响应面法能够有效地应用于多学科设计优化。

关键词：分块响应面法；近似模型；多学科优化
DOI：10.3778/j.issn.1002-8331.2009.19.010　**文章编号**：1002-8331（2009）19-0037-03　**文献标识码**：A　**中图分类号**：TU451；TP311

在复杂的多学科设计问题中，为了提高其计算效率，通常采用响应面近似模型替代复杂的计算模型。基于多项式的响应面法计算简单，且在一定的范围内计算精度较高，因此得到了较多的应用。文献[1]比较了不同响应面法的计算精度，指出多项式响应面法在大范围内计算精度通常较低。文献[2]通过实验设计方法提高了响应面的近似精度，文献[3]采用优化方法对高阶响应面的耦合项进行选取，从而构建了高阶响应面；文献[4]采用响应面方法建立了飞行器的气动外形模型；文献[5]通过优化试验点的方法在小范围内构建重复响应面，从而提高了响应面的计算精度；文献[6]通过优化实验点的方法建立了二次响应面。

上述改进响应面的方法大都是通过优化响应面的某一部分来提高其近似精度，并未能解决响应面法在大样本点数目情况下的近似精度问题。而复杂的多学科设计问题通常要求近似曲面的近似精度要随着样本容量的增多而提高。提出的分块响应面法首先对目标空间进行分块，然后再对每个分块空间进行响应面近似，有效地提高了响应面的近似精度，并且随着样本容量增大，其近似性能迅速提高。

1　RSM 近似技术

基于多项式的响应面法通常采用的函数关系为高阶多项式，根据多项式阶数的不同形成了不同的响应面，其中最常用的是二阶响应面，也称二次响应面。

若将二次响应面模型的响应量用 η 表示，则具有 n 个变量的二次响应面的函数模型可表述为：

$$\eta=\bar{\beta}_0+\sum_{i=1}^{n}\bar{\beta}_i x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{\beta}_{ii} x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\bar{\beta}_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}\in R^n$，$\bar{\beta}_0$、$\bar{\beta}_i$、$\bar{\beta}_{ii}$、$\bar{\beta}_{ij}$ 为待定系数。当给定一组已知数据时，则可对上式利用最小二乘法进行求解了。

对于具有 n 个变量的 m 阶响应面，其待定系数个数为 $\sum_{i=1}^{m}C_n^i+1$，随着响应面阶数的增加，所需要待定系数的数目急剧

作者简介：潘雷（1982-），男，博士生，主要从事飞行器总体方面的研究。
收稿日期：2008-04-18　**修回日期**：2008-07-21

增加。因此,通常响应面的阶数不超过四阶。四阶以上响应面的计算量迅速增加,而计算精度却并没有太大的提高。

随着样本容量的增大,响应面法不能有效地提高近似精度的这一缺点,大大限制了其在复杂多学科设计问题中的应用,因而采取某种改进措施来弥补响应面法这一缺陷就显得非常必要。分块响应面法通过合理划分原响应面的近似空间,能够有效地提高响应面在大样本容量时的近似精度。

2 分块响应面技术

多项式 RSM 近似技术的主要思想仍可归结为 Taylor 展开的思想。对于函数 $y=f(\boldsymbol{x})$,其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,将其在 $\boldsymbol{x}_0$ 点展开,可得:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})=\nabla f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}(\Delta x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\Delta x+o(\|\boldsymbol{x}\|^3) \tag{2}$$

其中 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ 为函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的梯度与 $\Delta\boldsymbol{x}$ 的点积,$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 为函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的 Hessian 矩阵。

对比式(2)与式(1)可知,二阶多项式响应面实质是根据已知的数据采用最小二乘法计算函数 f 在一个区间内的梯度及 Hessian 矩阵,因而其近似精度为 $o(\|\boldsymbol{x}\|^3)$。当多项式最高阶数为 n 时,易知近似结果的精度为 $o(\|\boldsymbol{x}\|^{n+1})$。因而,提高响应面阶数有助于提高其近似精度,但是,由式(2)容易看出,当响应面阶数较高时,待定系数的个数增大得很快。

Taylor 展开式成立的前提是 $\Delta\boldsymbol{x}$ 较小,当 $\Delta\boldsymbol{x}$ 大于一定值时,高次项将不能忽略。因此,响应面法通常只能在一个较小范围内对目标曲面进行近似拟合,而当需要拟合的目标曲面较大时,响应面法的误差可能大得无法接受。

为了使响应面法在较大样本空间内仍然有效,分块响应面法根据一定策略对原曲面空间进行划分,在每一个空间内形成独立的响应面,然后按照 Taylor 方法的思想进行响应面近似。其计算步骤如下:

(1)对给定的样本点,根据一定的空间划分策略 S 对需要拟合的空间 $\boldsymbol{W}$ 进行划分,得到子空间 $\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_n$;

(2)对于给定的插值点 $\boldsymbol{x}_i$,查找其所属的子空间 $\boldsymbol{W}_i$。初次使用 $\boldsymbol{W}_i$ 时,查找 $\boldsymbol{W}_i$ 空间的 k 个样本点,并构建 $\boldsymbol{W}_i$ 的响应曲面;

(3)利用 $\boldsymbol{W}_i$ 的响应曲面对 $\boldsymbol{x}_i$ 进行近似计算。

空间划分的策略 S 有多种,可以采用使划分后的子空间大小相等的等空间法,也可按照样本点的分布情况划分。下面给出一种按最近点方式进行空间划分的具体步骤:

(1)对于给定的插值点,查找样本点中距其距离满足条件 C 的点,设点的数目为 n 个;

(2)对样本点中的 n 个点构建 RSM 插值曲面;

(3)利用此 RSM 曲面进行插值点计算。

对于条件 C,建议选取以下两种方法:

①距离插值点的距离满足 $R<r$,其中 r 为给定的距离;

②距离插值点最近的 n 个点,其中 n 为一合适正整数。建议 n 取构建 m 阶响应面所需要点的个数 n。

由于分块响应面法是在较小的范围内对目标曲面进行响应面拟合,因而它更容易满足式(2),从而能较好地控制响应面的近似误差。而且随着样本容量的增大,可以将空间划分得更细,从而进一步提高了分块响应面法的近似精度。

图 1 为采用第 2 种样本点选取条件的分块相应面法计算流程。

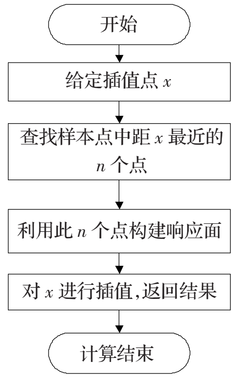


图 1 分块响应面法计算流程

3 算例

下面用两个算例来比较分块响应面法和多项式响应面法的近似性能。算例 1 是一个具有峰值的一元函数,算例 2 是多学科设计优化常用的一个算例。使用方差作为两种方法的精度衡量标准,即:

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i'-x_i)^2 \tag{3}$$

其中 x_i 为第 i 个点的解析计算结果,即实际值。x_i' 为第 i 个点的近似计算结果。很显然,σ^2 既反映了整体对目标点的偏离程度,也反映了个体对目标点的偏离情况,因而,σ^2 可以有效地反映各种方法的近似结果。

3.1 一元函数近似性能比较

取函数:

$$f(x)=\frac{\lg\left(\frac{1}{30}x^3+\frac{1}{5}x^2+2x+35\right)}{\sqrt{x^2+7x+13}}+\frac{1}{(x+12)^2} \tag{4}$$

该函数在 $x=-3.4867$ 处取得极大值 3.903 4。分别采用 RSM 和 IRSM 对其在区间[−10 10]内进行近似。RSM 采用四阶多项式响应面,IRSM 采用最近点方式划分空间,选取距离插值点最近的 5 个点生成二阶响应面,并采用二阶多项式响应面对每个子空间进行近似。

图 2 给出样本容量分别为 5、10、25 和 50 时,RSM 和 IRSM 的近似结果。比较图 2 可以看出,当样本容量较小时,IRSM 和 RSM 具有大致相同的计算精度,而当样本容量增大时,IRSM 的计算精度显然高于 RSM。从图 2(a)中也可以看出,当将 IRSM 方法的近似范围取为整个样本空间时,IRSM 方法即退化为 RSM 方法。

表 1 给出了几个典型样本容量下的误差方差比较。

表 1 不同样本容量下的计算方差比较

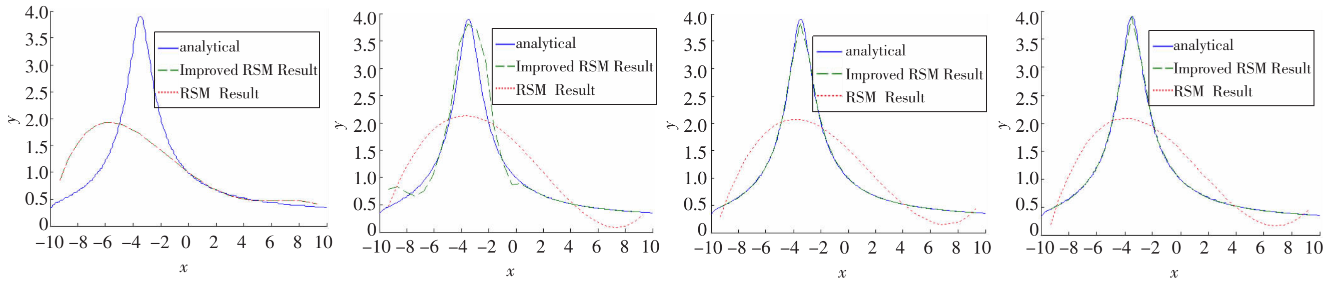
样本容量	5	10	25	50
RSM 方差	13.86	9.84	9.16	8.95
IRSM 方差	13.86	1.53	0.003 9	0.000 1

由表 1 可以看出,随着样本容量的增大,IRSM 的计算方差迅速降低,近似精度迅速提高。而 RSM 的近似精度略有提高,但并不明显。图 3 给出了不同样本容量情况下两种方法对 30 个点的计算误差方差变化图。从图中可以明显看出,IRSM 比 RSM 的计算误差方差小得多。

3.2 多元函数近似性能比较

取优化模型

$$\min\ f=f(X,Y)=x_2^2+x_3+y_1+e^{-y_2}$$



（a）样本容量为5　（b）样本容量为10　（c）样本容量为25　（d）样本容量为50

图2　不同样本容量下的两种方法近似性能比较

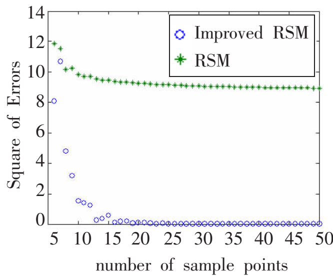
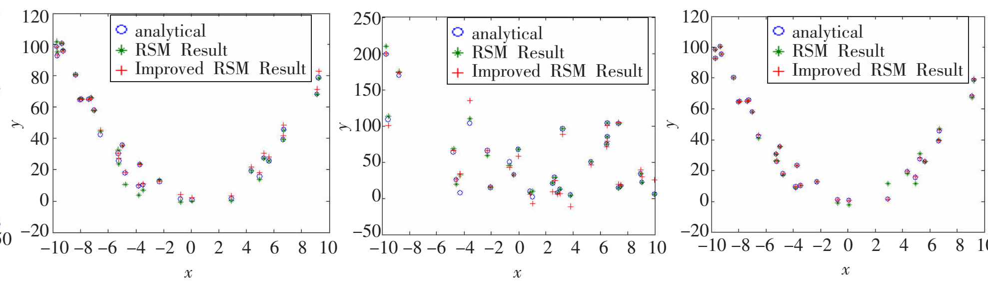


图3　不同样本容量的计算误差方差变化



（a）样本容量为15时的近似结果　（b）样本容量为50时的近似结果　（c）样本容量为200时的近似结果

图4　不同样本容量时学科 a 对自变量 x_1 的响应拟合

$$\text{s.t.}\ \ y_1=x_1^2+x_2+x_3-0.2y_2 \tag{5}$$

$$y_2=\sqrt{y_1}+x_1+x_3 \tag{6}$$

其中 x_1、x_2 和 x_3 为设计变量。y_1 和 y_2 为学科响应。

该算例为NASA提出的CSSO算法测试模型，它曾在多篇文献中被引用。由于不同学科间存在严重耦合，在利用CSSO算法求解该模型时，通常把式（5）和式（6）视为两个子学科式（5）和式（6），对两个子学科分别进行近似。对于具有三个设计变量的函数，欲构建其二阶响应面，需要至少10个样本点。下面分别采用RSM和IRSM对其进行近似，IRSM选取距插值点最近的12个样本点构建二阶响应面。

图4给出样本容量从15~200过程中学科 a 随着设计变量 x_1 变化的图像。

由图4可以得到同样的结论：随着样本容量的增大，IRSM的近似精度迅速提高。

图5给出了几个典型样本容量下学科 a 的误差图像。由图5也可看出，随着样本容量的增大，IRSM可以迅速地提高近似精度，减小计算误差。

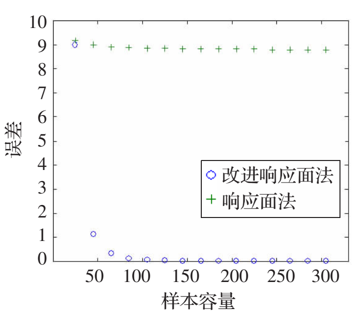


图5　样本容量-误差图像

综合上述研究可以看出，无论是具有多个极值的多元函数还是单个极值的一元函数，分块响应面法都具有较高的近似精度。分块响应面法最显著的特点是随着样本容量的增大可迅速有效地提高近似精度，这一点在多学科设计优化中很有用。而当其划分的子空间为整个近似空间时，分块响应面法即退化为响应面法。

4　结论

通过对响应面近似空间进行合理划分，并对每一个近似空间采取响应面近似的方法形成了分块响应面法。实例计算表明：

（1）分块响应面法继承了响应面法的连续性，能够在较大范围内对目标曲面进行近似，并且计算简单方便；

（2）当样本容量增大时，分块响应面法可迅速提高其近似精度，且改进后方法的计算精度远高于响应面法的计算精度。

高效精确的近似技术是解决复杂多学科设计优化问题的一个重要手段，提出的分块响应面近似技术可以随着样本容量的增大迅速地提高模型的近似精度，在多学科复杂设计优化问题中具有很好的应用前景。

参考文献：

[1] Krishnamurthy T.Comparison of response surface construction methods for derivative estimation using moving least squares,kriging and Radial Basis functions[C]//AIAA,2005.

[2] Skillen M D,Crossley W A.Developing response surface basedwing weight equations for conceptual morphing aircraft sizing[C]//AIAA,2005.

[3] Fujita K,Kounoe Y.High-order polynomial response surface with optimal selection of interaction terms[C]//AIAA,2006.

[4] Landman D,Simpson J,Vicroy D,et al.Efficient methods for complex aircraft configuration aerodynamic characterization using response surface methodologies[C]//AIAA,2006.

[5] Jeon K S,Lee J W,Byun Y H.Development of repetitive response surface enhancement technique for the multidisciplinary system optimization[C]//AIAA,2006.

[6] Lee Y B,Jung S H,Choi D H.Progressive quadratic response surface modeling using inherited latin-hypercube design[C]//AIAA,2006.