



## 岩石的临界状态非关联弹塑性本构模型

周维垣 孙卫军

(清华大学水利系 100084)

### 提 要

当前岩石的弹塑性本构模型还缺乏实用性强,又比较符合实际的模型。本文作者引用非关联流动规则和弹塑性本构理论中的临界状态理论,研究了一个岩体的非关联弹塑性本构模型,此模型可适用于低应力水平下的岩体力学模型,及统一处理硬化和软化材料的力学关系,本文给出了应用此模型的石英试件分析结果。

### 一、前 言

在岩石结构的有限元分析中,岩石介质的本构模型问题是其关键。但是,目前仍然缺乏实用性强,又比较符合实际的岩石弹塑性本构模型。在本构模型的研究中,一般存在如下问题:其一,在低应力水平下,本构模型的剪胀过大,不符合岩石实验资料。如广泛使用的莫尔-库仑模型、德鲁克-普拉格(Drucker-Prager)模型等就是这样;其二,在同一本构模型中,对岩石的应变硬化和应变软化不易作统一处理。缺少适于先硬化后软化岩石材料的本构模型;其三,本构模型使用的屈服准则对岩石的实验资料拟合性较差,这使得模型不能很好地描述岩石材料的强度特性。在本文里,作者通过引用非关联流动规则和弹塑性本构理论中的临界状态理论,建立了一个新的岩石弹塑性本构模型,可以在一定程度上克服以上不足。作者根据该本构模型,编制了三维非线性有限元程序,并于文末给出了一个应力应变全曲线算例。

建立一个弹性本构模型,需要具备三部分基本内容:屈服准则、流动规则和硬(软)化定律。下面分别讨论。

## 二、临界状态屈服准则

屈服准则控制着塑性变形的发生和发展。它在主应力空间中表现为一个曲面，所以又叫它屈服面。如果岩石承受的应力状态位于屈服面以内，则岩石处于弹性变形阶段。如果应力变化趋向于越过屈服面，则岩石进入塑性屈服阶段。塑性屈服阶段又可分为两段，应变硬化段和应变软化段。岩石在塑性屈服后，首先是应变硬化，此时屈服面随着应力水平的提高连续地扩大，岩石强度随之提高，直至达到岩石的峰值强度。相应岩石峰值强度的屈服面，也叫作破坏面。达到破坏面后，岩石变形继续增大，应力水平却逐渐下降，屈服面不断收缩，其最后的收缩位置就是残余破坏面，它对应着岩石的残余强度。这就是岩石的应变软化段。

对于各向同性岩石，应力座标轴的旋转对屈服没有影响。因此，屈服准则一般可以用应力不变量、主应力或广义应力写出如下：

$$\begin{aligned} f(I_1, I_2, I_3, \bar{H}) &= 0 \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \bar{H}) &= 0 \\ f(p, q, \theta_\sigma, \bar{H}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

式中， $I_1, I_2, I_3$  分别是第一、第二、第三应力不变量； $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  分别是第一、第二、第三主应力； $p, q, \theta_\sigma$  则分别是平均应力、广义剪应力和应力洛德角，它们的定义式为：

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$\theta_\sigma = \text{tg}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right) \quad (4)$$

而  $\bar{H}$  是硬（软）化定律，它是决定一定的应力增量能引起多少塑性应变增量的一个函数。通常，它是塑性功  $w^p$ 、塑性体积应变  $\epsilon_v^p$ 、广义塑性剪应变  $\gamma_p$  等内变量的函数，具体形成由试验确定。

屈服准则  $f$  的可能性为：

$$df < 0; \text{弹性状态,}$$

$$df = 0; \text{塑性状态.}$$

由于岩石材料的屈服点不甚明显，直接寻找屈服面的形状很不容易。但相应岩石峰值强度的破坏点则是明显的，所以一般获得的是破坏面。如莫尔-库仑破坏面、德鲁克-普拉格破坏面等。因此，我们建议确定屈服面、破坏面的方法及步骤如下：

假定屈服面的普遍形状与破坏面是相似的。在岩石的应变硬化段，屈服面连续扩大，其扩大的极限位置是相应岩石峰值强度的破坏面。

我们通过一组岩石常规三轴压缩应力应变全曲线来确定破坏面的形状。图1是一组围压不同的应力应变全曲线<sup>[1]</sup>，将其峰值强度点和残余强度点点绘于图2所示的  $p$ - $q$  平面（相应的  $p, q$  值按（2）、（3）式计算），可以看出峰值强度点理想地密集于一条  $p$ - $q$  曲线上，而残余强度点则可以用莫尔-库仑直线拟合。类似的整理成果还可参见文献<sup>[2~6]</sup>。

图2中这条  $p$ - $q$  曲线大致上显示出了破坏面的形状，但要最终确定破坏面和屈服面的形态，

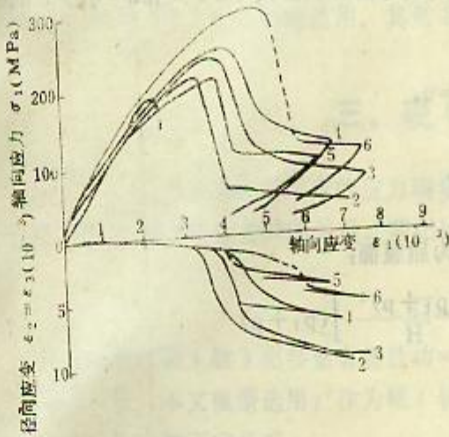


图1 由一整块粘土石英岩制备的一组试件，在不同旧压下的完全轴向应力-应变和径向应变-轴向应变曲线。

Fig.1 The axial stress strain curves and radial axial strain curves under triaxial compression tests for an intact clay quartzite sample.

单轴压缩：曲线1，三轴压缩：曲线2， $\sigma_2 = \sigma_3 = 3.45$ 兆帕；  
3， $\sigma_2 = \sigma_3 = 6.9$ ；4， $\sigma_2 = \sigma_3 = 13.8$ ；5， $\sigma_2 = \sigma_3 = 27.6$ 。  
裂缝试件：6， $\sigma_2 = \sigma_3 = 27.6$

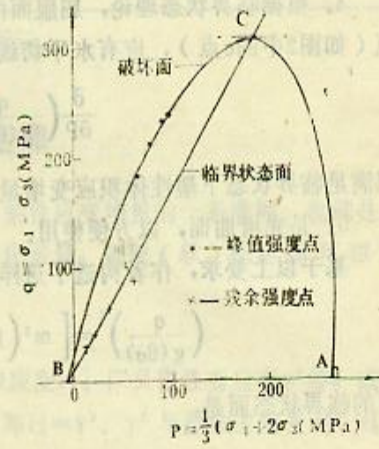


图2 粘土石英岩三轴强度试验 ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ )

Fig.2 Clay quartzite strength tests ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ )

还必须考虑岩石的其他基本力学性质和借助理论推断。作者建议使用弹塑性本构理论中的临界状态理论的基本方法<sup>[2,3]</sup>。使用这个理论建立的弹塑性本构模型也叫作临界状态模型。

临界状态的概念由Roscoe、Schofield和Wroth提出<sup>[7,8]</sup>，被作为描述土的力学行为的理论基础。现在，这个概念被引入岩体力学<sup>[2-4,9,10]</sup>。在岩体力学中，对临界状态的理解是：岩石经历塑性硬化（或软化）之后达到类似理想塑性时的一种状态<sup>[4,10]</sup>。在此状态下，岩石塑性变形的发展将不再伴有应变硬化（或软化）特性以及塑性体积变形。也就是说，临界状态就是岩石的塑性体积应变增量为零的状态。关于临界状态的系统原理，在有关文献中有详略论述，<sup>[2,3,7-10]</sup>限于篇幅，这里不再重复。

上述常规三轴压缩试验成果，首先对临界状态模型提出了如下要求：

1. 相应峰值强度的屈服面，也即破坏面，必须能够较好地拟合如图2所示那样的试验成果，以便使模型能正确模拟岩石的强度特性。

2. 临界状态面可以采用相应残余强度的莫尔-库仑准则（参见图2）：

$$q/g(\theta_\sigma) = mp + q_0 \tag{6}$$

式中， $m$ 、 $q_0$ 为材料常数。 $g(\theta_\sigma)$ 是形状函数，这是个重要函数，后面还要专门讨论，其他符号意义同前。

除了以上两个要求外，我们还希望模型能够满足下面几点。

3. 与 $p$ 轴有正、负（或零）两个交点（如图2中的A、B点），以体现岩石的压，拉屈服性质。

4. 根据临界状态理论, 屈服面的子午线  $p$ - $q$  曲线与临界状态线 (b) 式在  $q=q_c \neq 0$  的交点 (如图2中的c点), 应有水平切线, 也即:

$$\left. \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{q}{g(\theta_\sigma)} \right) \right|_{q=q_c} = 0,$$

以满足临界状态下塑性体积应变增量为零的性质。

5. 是光滑曲面, 以方便使用。

基于以上要求, 作者构造了这样一个函数作为屈服面:

$$\left( \frac{q}{g(\theta_\sigma)} \right)^2 = \left[ m^2 \left( 1 + \frac{z}{\alpha} \right) - \frac{(p_1 + p)^2}{H} \right] (p_1 + p) \quad (7)$$

它的临界状态面是:

$$\frac{q}{g(\theta_\sigma)} = m(p_1 + p) \quad (8)$$

式中,  $m$ 、 $P_1$ 、 $\alpha$  是材料常数, 可以通过一组常规三轴压缩试验确定;  $H$  是硬(软)化定律。考察上式的几何性质不难发现, 它基本上满足了以上五项要求。图2中的  $p$ - $q$  曲线就是根据 (7) 式拟合的。

要保证 (7) 式很好地满足条件5, 式中的形状函数  $g(\theta_\sigma)$  还起着重要的作用。它决定着 (7) 式在  $\pi$  平面上轨迹的几何形状。根据岩石塑性理论, 形状函数应具有如下性质:

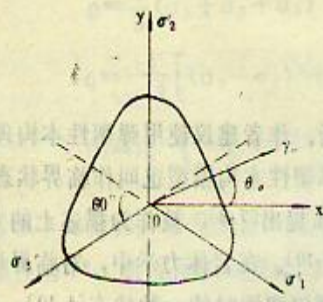


图3 形状函数的基本性质

Fig.3 The basic character of shape function

1. 在  $\pi$  平面上是一条封闭的凸曲线, 以满足 Drucker 公设 (参见图3)。

2. 由于材料是各向同性的, 故它应对称于  $\pi$  平面的三个坐标轴  $\sigma_1'$ 、 $\sigma_2'$ 、 $\sigma_3'$ 。因此, 轨迹在六个  $60^\circ$  扇形域内有相同的形状。

3. 它应满足如下边界条件:

$$g(\theta_\sigma) = \begin{cases} 1 & \theta_\sigma = -30^\circ \\ k & \theta_\sigma = 30^\circ \end{cases}$$

以便使模型反映岩石在拉、压应力状态下强度不同的特性。上式中,  $k$  是不大于1的材料常数。

上述性质是任何一个正确的岩石屈服准则的形状函数首先应具备的基本条件。此外, 为了增加模型的实用性, 我们还希望  $g(\theta_\sigma)$  能够满足下面条件。

4. 它是一条光滑的闭曲线。即满足如下边界条件:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta_\sigma} [g(\theta_\sigma)] \right|_{\theta_\sigma = \pm 30^\circ} = 0.$$

对于以上四个条件, 现有的各种形状函数多数都不能完全满足。比如米赛斯准则的园和莫尔-库仑准则的不等角六边形等。作者建议如下形状函数:

$$g(\theta_\sigma) = \left[ \frac{2k^n}{(1+k^n) + (1-k^n)\sin 3\theta_\sigma} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (9)$$

不难考察, 该式满足以上各项条件, 其外凸性是通过适当选择幂指数  $n$  来保证的, 这个式子

对多数岩石类脆硬性材料都能适用. 其基本形状如图3所示.

### 三、硬(软)化定律

硬(软)化定律是决定一定的应力增量能引起多少塑性应变增量的一条准则. 也就是屈服强度改变与塑性应变之间的关系. 若记 $\bar{H}$ 为硬(软)化参量, 则硬(软)化定律可以写成:

$$\bar{H} = \bar{H}(\gamma^p)$$

一般常用的硬(软)化参量有塑性功 $w^p$ 、塑性体积应变 $\epsilon_v^p$ 、广义塑性剪应变 $\gamma^p$ 等, 或者是它们的组合. 本文模型选用 $\gamma^p$ 作为硬(软)化参量, 即 $H = \gamma^p$ .  $\gamma^p$ 与塑性主应变 $\epsilon_1^p$ 、 $\epsilon_2^p$ 、 $\epsilon_3^p$ 之间的关系用如下定义式:

$$\gamma^p = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\epsilon_1^p - \epsilon_2^p)^2 + (\epsilon_2^p - \epsilon_3^p)^2 + (\epsilon_3^p - \epsilon_1^p)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

针对屈服准则(7)式, 硬(软)化定律 $\bar{H}(\gamma^p)$ 应具有如下性质:

1. 记 $\bar{H}_0$ 对应初始屈服, 应有 $\bar{H}(0) = \bar{H}_0$ .

2. 记 $\gamma_p^0$ 为岩石达到峰值强度时的广义塑性剪应变, 则在区间 $0 \leq \gamma^p \leq \gamma_p^0$ ,  $\bar{H}$ 应为单调增函数, 以反映在硬化阶段, 屈服面随 $\gamma^p$ 增加而扩大的性质; 在区间 $\gamma^p > \gamma_p^0$ ,  $\bar{H}$ 应为单调减函数以反映软化阶段, 屈服面随 $\gamma^p$ 增加而收缩的性质. 即:

$$\frac{d\bar{H}}{d\gamma^p} = \begin{cases} > 0 & 0 < \gamma^p < \gamma_p^0 \\ < 0 & \gamma^p > \gamma_p^0 \end{cases}$$

3. 当 $\gamma^p$ 很大时,  $\bar{H}$ 应趋于常数 $\bar{H}_\infty$ , 以反映岩石进入残余破坏状态后, 屈服强度不再随 $\gamma^p$ 而变化, 进入理想塑性流动状态的性质. 即:

$$\lim_{\gamma^p \rightarrow \infty} \bar{H}(\gamma^p) = \bar{H}_\infty$$

上述性质反映在 $\bar{H}-\gamma^p$ 坐标系中就如图4所示. 对于这种形状的曲线, 作者使用插值函数拟合, 函数式(11)式过图中A、B、C、D、E五点, 可以完全满足条件1和条件2, 并通过适当选择D、E点, 近似满足条件3.

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + a(\gamma^p - \gamma_p^0)^2 + b\gamma_p^0(\gamma^p - \gamma_p^0)^2 + c\gamma_p^0(\gamma^p - \gamma_p^0)^2$$

$$+ d\gamma_p^0(\gamma^p - \gamma_p^0)^2 + (\gamma^p - \gamma_p^0)^2 \quad (11)$$

式中:

$$a = (\bar{H}_0 - \bar{H}_p) / (\gamma_p^0)^2$$

$$b = \left[ \frac{\bar{H}_1 - \bar{H}_p}{(\gamma_1^p - \gamma_p^0)^2} - a \right] / \gamma_1^p$$

$$c = \left[ \frac{\bar{H}_2 - \bar{H}_p}{(\gamma_2^p - \gamma_p^0)^2} - a - b\gamma_2^p \right] / \gamma_2^p(\gamma_2^p - \gamma_1^p)$$

$$d = \frac{\bar{H}_3 - \bar{H}_p}{(\gamma_3^p - \gamma_p^0)^2} - a - b\gamma_3^p - c\gamma_3^p(\gamma_3^p - \gamma_1^p)$$

其它符号意义见图4.

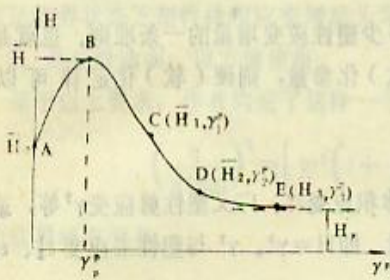


图4 硬(软)化定律 $H(\gamma^p)$ 的基本性质  
Fig.4 The basic character of strain  
hardening (softening) phenomena

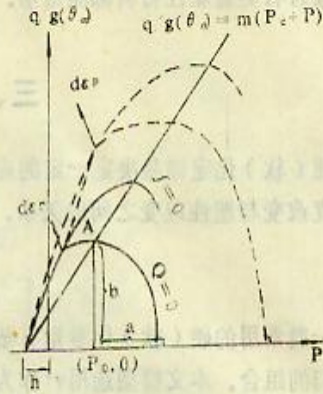


图5 塑性势与屈服面  
Fig.5 Plastic potential and  
Failure surface

#### 四、流动规则与塑性势

流动规则是塑性应变增量与应力两者相对大小之间关系的定律。它控制着塑性范围内的变形。它是从塑性应变增量的方向与塑性势面正交的条件导出的,所以也叫塑性势正交流动规则。若记函数

$$Q = Q(p, q, \theta, \sigma)$$

是塑性变形场内的塑性势,则塑性位势理论认为有如下正交流动规则:

$$\{d\epsilon^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (12)$$

式中,  $\{d\epsilon^p\}$  是塑性应变矢量增量;  $\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}$  是塑性势函数对各应力分量的偏导数;  $\lambda$  是一个非负标量因子。如果假定塑性势 $Q$ 与屈服准则 $f$ 相等,即 $Q=f$ ,称为相关联流动规则。如果 $Q \neq f$ ,则称为非关联流动规则。

在金属材料中,一般使用相关联流动规则,而在岩石中,作者研究认为,为避免过去的剪胀速率,必须使用非关联流动规则,否则一般不能吻合实验。本文所用的塑性势函数为椭圆型:

$$\theta = \frac{[q/g(\theta, \sigma)]^2}{b^2} + \frac{(p_0 - p)^2}{a^2} - 1 \quad (13)$$

式中各参数意义见图5。

塑性势(13)式有如下特点:

1.  $Q$ 在与临界状态线的交点A处有水平切线,即:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{q}{g(\theta, \sigma)} \right]_{P=P_0} = 0$$

满足材料在临界状态时,塑性体积应变增量为零的条件。于是我们有:

$$b = m(p_1 + p_0) \quad (14)$$

2. 两个半轴a与b之比值 $\eta$ 对塑性应变增量的方向有重要影响:

$$\eta = a/b \quad (15)$$

3. 半轴b的大小也影响着塑性应变增量的方向, b是随应力状态变化而变化的, 它使得塑性势面Q随着屈服面的膨胀和缩小而膨胀和缩小. 设当前应力状态是 $(p, q)$ , 将其以及(14)式代入(13)式得:

$$\eta^2 \left[ \frac{q}{g(\theta_\sigma)} \right]^2 + \left[ \frac{b}{m} - p_1 + p \right]^2 = \eta^2 b^2$$

这个方程的正根就是Q的半轴b随屈服面胀缩的关系式:

$$b = \left[ \frac{p_1 + p}{m} - \eta \sqrt{\left( \eta^2 - \frac{1}{m^2} \right) \left[ \frac{q}{g(\theta_\sigma)} \right]^2 + (p_1 + p)^2} \right] / \left( \frac{1}{m^2} - \eta^2 \right) \quad (16)$$

## 五、弹塑性非关联本构方程与加载准则

经过上面的讨论, 作者建议的模型具备了建立一个弹塑性本构关系所需的三部分基本内容. 从而可以具体推导本文模型的弹塑性本构方程式了.

对于一个增量的屈服过程, 应变增量 $\{de\}$ 可以看作弹性部分 $\{de^e\}$ 和塑性部分 $\{de^p\}$ 组成:

$$\{de\} = \{de^e\} + \{de^p\} \quad (17)$$

其中, 弹性应变增量 $\{de^e\}$ 与应力增量 $\{d\sigma\}$ 有关系:

$$\{d\sigma\} = [De] \{de^e\}$$

$[De]$  是材料的弹性矩阵. 再注意到流动规则(12)式, 由(17)式可得:

$$\{de\} = [De]^{-1} \{d\sigma\} + \lambda \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\}$$

或:

$$[De] \{de\} = \{d\sigma\} + \lambda [De] \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\} \quad (18)$$

在加载时, (18)式中的因子 $\lambda$ 大于零. 其大小可以由屈服准则f的一致性条件 $df = 0$ 确定:

$$\begin{aligned} df &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial H} \left\{ \frac{\partial H}{\partial e^p} \right\}^T \{de^p\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial H} \left\{ \frac{\partial H}{\partial e^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\} \lambda = 0 \end{aligned}$$

将(18)式两边同乘以 $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T$ , 并利用(19)式得:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [De] \{de\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [De] \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\} \lambda \\ &= \frac{\partial f}{\partial H} \left\{ \frac{\partial H}{\partial e^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\} \lambda + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [De] \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\} \lambda \end{aligned}$$

从中解出:

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \{d\varepsilon\}}{\left( \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] - \frac{\partial f}{\partial H} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \right) \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\}}$$

将此式代入(18)式整理得:

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}] \{d\varepsilon\} \quad (20)$$

其中:

$$[D_{ep}] = [D_e] - [D_p]$$

$$[D_p] = \frac{[D_e] \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e]}{\left( \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] - \frac{\partial f}{\partial H} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \right) \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right\}}$$

通常,我们称 $[D_{ep}]$ 为弹性矩阵,  $[D_p]$ 为塑性矩阵.

在卸载和中性变载时,  $\lambda=0$ , 材料呈纯弹性变形. 本构方程为:

$$\{d\sigma\} = [D_e] \{d\varepsilon\} \quad (21)$$

引入阶梯函数:

$$h(l) = \begin{cases} 1 & l > 0 \\ 0 & l \leq 0 \end{cases}$$

可以将加载、中性变载和卸载的本构方程式(20)式和(21)式统一写作:

$$\{d\sigma\} = ([D_e] - h(l) [D_p]) \{d\varepsilon\} \quad (22)$$

$$l = \begin{cases} > 0 & \text{加载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (23)$$

(22)式就是弹塑性本构方程的一般表达式。(23)式是由Ильющин公设导出的加载准则<sup>[11]</sup>。它们对先硬化后软化的一般材料都是适用的。只需将本文的屈服准则 $f$ 和塑性势 $Q$ 的具体表达式(7)和(13)式代入, 就可以得到本文建议模型的弹塑性本构方程的具体形式。

至此, 本文建议的弹塑性本构模型讨论完了。可以看到, 它适用于先硬化后软化的一般脆硬性材料, 如岩石、混凝土等。可以分析计算岩石应力应变全曲线。通过采用新的子午曲线和形状函数, 该模型的屈服准则较现有模型来说, 对试验资料具有更好的拟合性。从而能更准确地描述材料的强度特性; 引用非关联流动规则, 则使本模型克服了一般模型剪脉过大的缺点, 能较好地模拟材料的塑性变形性质。此外, 该模型使用了除等向拉伸应力状态点以外, 处处光滑的屈服函数, 对于方便程序编制、加速计算都起到良好的作用。

## 六、应力应变全曲线算例

我们使用前述弹性本构模型编制了一个三维弹塑性有限元程序。为说明该本构模型在描述岩石硬(软)化特性上的有效性, 本节根据文献<sup>[12]</sup>中的一组粘土石英岩常规三轴压缩试验



资料(图1)，作了一组应力应变全曲线有限元计算。

有限元计算试件是一个 $4 \times 4 \times 8\text{cm}^2$ 的长方体。单元划分、约束状态及加载情况如图6所示。为了能计算出应力应变曲线的软化段，竖向荷载模拟刚性压力机的位移控制加载法加载。屈服函数、塑性势函数的参数，以及弹性参数列在表1。硬(软)化函数 $H(\gamma^p)$ 如图7所示。

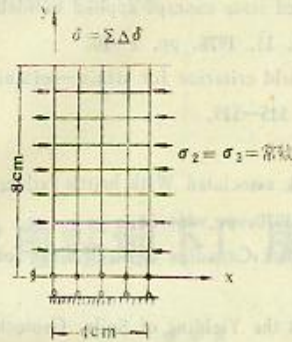


图6 有限元网格

Fig.6 Mesh for F.E.M.

表1 弹塑性计算参数

Tab.1 Parameters for elasto-plastic analysis

| 弹性模量<br>$E \times 10^9 \text{MPa}$ | 泊松比<br>$\gamma$ | 屈服、塑性势函数参数 |     |      |       |          |      |
|------------------------------------|-----------------|------------|-----|------|-------|----------|------|
|                                    |                 |            | R   | n    | m     | $\alpha$ | Pl   |
| 88.0                               | 0.21            | 0.68       | 3.0 | 2.25 | 1.966 | 0.0      | 1.70 |

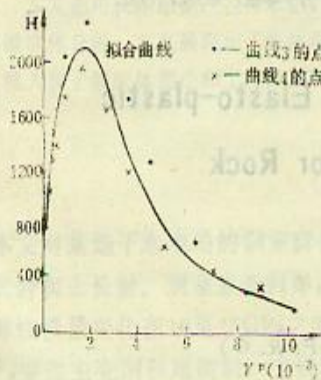


图7 硬(软)化函数 $H(\gamma^p)$

Fig.7 Strain hardening (softening) function  $H(\gamma^p)$

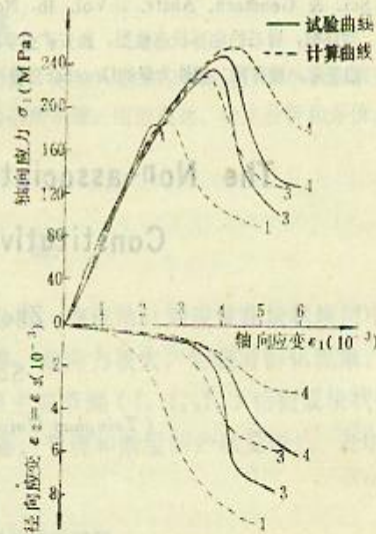


图8 粘土石英岩常规三轴实验及计算曲线

Fig.8 Clay quartzite conventional triaxial test and computing curve

单轴曲线: 曲线1; 三轴曲线: 曲线3,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 6.9\text{MPa}$ ; 曲线4:  $\sigma_2 = \sigma_3 = 13.8\text{MPa}$ ;

我们计算了三种不同围压的情况。所得轴向应力应变全曲线，及其径向应变-轴向应变曲线如图8中虚线所示。图中实线是相应的实验曲线；对比两者可见，本文建议的弹塑性本构模型，基本上反映出了岩石的应变硬化和应变软化性质。

该弹塑性本构模型还综合其他力学模型，在大型地下洞室、拱坎坎肩变形及稳定性分析等大型有限元课题中作过应用。具体内容将另文介绍。

## 参 考 文 献

- (1) J. C. Jaeger, N. G. W. Cook, Fundamentals of rock mechanics, Third Edition, Chapman and Hall, London, 1979.
- (2) N. G. Gerogiannopoulos, E. T. Brown, The crited state concept applied to rock, Int. J. of Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 15, 1978, pp. 1-10.
- (3) E. T. Brown, P. N. Michelis, A critical state yield criterion for strain-softening rock, 19th U. S. Rock. Mechanics Symp. Nevada, 1978, pp. 515-519.
- (4) 陶震宇, 岩石的屈服模型, 岩土工程学报, 1983; 5(3)
- (5) B. Ladanyi, Nguyen Den, Study of strains in rock associated With brittle failure, Proc. of the 6th Canadian Rock Mechanics Symp., Montreal, 1970, pp. 46-64.
- (6) P. Michelis, E. T. Brown, A yield equation for rock, Canadian Geotechnical Journal Vol. 23, No. 1, 1986, pp. 9-16.
- (7) K. H. Roscoe, A. N. Schofield, C. P. worth, on the Yielding of Soils, Geotechnique, Vol. 8, No. 1, pp. 22-53, 1958.
- (8) A. N. Schofield, C. P. Wroth, critical state soil mechanics, McGraw Hill, London, 1958.
- (9) A. M. Price, L. W. Farmer, Application of yield modds to rock, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 16, No. 2, pp. 157-159, 1979.
- (10) 刘怀恒, 岩石的临界状态模型, 西安矿业学院学报, 第1期, 1982.
- (11) 曲圣年, 殷有泉, 塑性力学的Drucker公设和Ильющин公设, 力学学报, 第5期, 1981.

## The Non-associate Critical Elasto-plastic Constitutive Model for Rock

Zhou Wei yuan

Sun Wei Jun

(Tsinghua University Beijing, P. R. C)

### Abstract

The practical and easier applicable constitutive models are needed for rock mass involving elasto-plasticity. In this paper, the authors propose an elasto-plastic non-associate constitutive model for rock mass, based on the non-associate flow rule of plasticity, and critical state phenomena. This model is better fitted for rock mass under low-stresses. This model is apt to treat the softening and hardening behaviours of rock mass in one model, in other words, in one method. This paper presents the results of quartzite samples and compare them with those from computation. They agree very well.