

# 钢球表面质量检测系统的数学模型研究

李 杨<sup>1</sup>, 刘润涛<sup>2</sup>, 张佳佳<sup>1</sup>

LI Yang<sup>1</sup>, LIU Run-tao<sup>2</sup>, ZHANG Jia-jia<sup>1</sup>

1. 哈尔滨理工大学 应用科学学院, 哈尔滨 150080

2. 哈尔滨理工大学 信息与科学技术研究所, 哈尔滨 150080

1. School of Application Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China

2. Institution of Information and Scientific Computing, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China

E-mail: yang.li@163.com

**LI Yang, LIU Run-tao, ZHANG Jia-jia. Research on mathematic model of system of detecting steel ball surface quality. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(3): 178-180.**

**Abstract:** The mathematic model for the design of system of detecting the steel ball surface quality by image treatment is given. Firstly, according to the rotation law of the steel ball, the moving trajectory on the ball surface is proposed by the view point of relative movement. Then the theoretical basis that can prove whether these images observed at different times can cover the entire steel ball surface or not is given.

**Key words:** steel ball surface quality; rotation; ball crown; coverage; mathematic model

**摘 要:** 针对基于图像处理的钢球表面质量检测系统的设计, 给出了其相应的数学模型。首先根据钢球的转动规律, 以相对运动的观点, 给出了观察点在钢球表面相应的运动轨迹。然后, 给出了验证观察点在不同时刻观察到的图像能否将整个钢球表面覆盖的理论依据。

**关键词:** 钢球表面质量; 转动; 球冠; 覆盖; 数学模型

**DOI:** 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.03.053 **文章编号:** 1002-8331(2009)03-0178-03 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391

## 1 引言

随着数字处理与模式识别技术的不断发展和经济效益要求的逐步提高, 数字图像处理技术已成为钢球表面质量自动检测<sup>[1]</sup>的有效方法之一。基于图像处理的钢球表面质量检测系统<sup>[2]</sup>, 便是利用摄像机和计算机图像处理技术对钢球表面进行自动检测的实验装置, 它具有非接触、精度高、抗干扰性强、效率高和检测结果可靠等特点。

李春颖在基于图像处理的钢球外观检测系统<sup>[3]</sup>和潘洪平在钢球表面质量评价系统<sup>[4]</sup>中, 分别提出了各自基于图像处理的钢球表面质量检测系统的设计和装置的工作原理, 但都没有给出确定拍摄位置和是否存在死区的数学依据, 针对基于图像技术的钢球表面质量检测系统<sup>[2]</sup>的工作原理, 先给出钢球检测中的运动<sup>[5]</sup>轨迹的数学模型, 然后给出了判断是否存在死区的理论依据。

基于图像处理的钢球表面质量检测的过程, 是让钢球以固定的球心转动, 以固定的观察点对钢球表面进行拍照, 从获得

的图像分析出钢球表面的质量如何。由于拍摄的图像只是钢球表面的一部分(实际是一个球冠面), 必须进行多次拍摄, 才可能将钢球的表面全部检测到, 这样问题也随之产生了: (1) 钢球转动时不同时间拍摄到的图像是钢球表面的哪个区域。(2) 获得的图像是不是能把钢球表面全部覆盖到, 即判断是否存在死区。

## 2 以相对运动的观点建立观察点在钢球表面形成的相应轨迹

在一固定的观察点观察一个钢球以恒定的球心转动时, 所观察到球体表面区域实际是一个球冠面(以后称球冠), 如图1,  $P$ 点是所拍摄到钢球表面的球冠区域的中心, 由于钢球大小固定, 从而在不同时刻观察到的球冠是等大的, 我们只要确定球冠中心就可以确定所观察的区域。当钢球转动时, 球冠中心在球体表面形成相应的轨迹。确定了这个轨迹便可以根据时间确定不同时间拍到的球冠对应钢球表面的哪个区域。从相对运动的角度, 可以视钢球是静止的, 而观察到的区域的中心即球冠

**基金项目:** 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10571037); 黑龙江省教育厅资助项目(the Educational Office Foundation of Heilongjiang under Grant No.11511027)。

**作者简介:** 李杨(1982-), 男, 硕士研究生, 主要研究领域为计算几何、计算机辅助设计; 刘润涛(1961-), 男, 教授, 主要研究领域: 计算几何、空间数据库; 张佳佳(1983-), 女, 硕士研究生, 主要研究领域: 空间数据库、计算几何。

**收稿日期:** 2008-01-04 **修回日期:** 2008-04-10

中心是动的,这样球冠中心在球体表面运动形成的轨迹与钢球转动时,球冠中心在球体表面形成轨迹是一致的。这样就将钢球的转动问题转化为质点在球体表面的运动的问题。

这个动点在球体表面的运动是由竖直和水平两个方向的运动的合成。如图2,根据钢球表面质量检测系统的设计原理,知道球冠中心在竖直方向是以速度为 $v_{竖}$ 的匀速运动, $v_{竖}$ 与钢球表面沿经线方向转动的线度的方向相反大小相等。水平方向是以速度为 $v_{横}$ 间断性匀速运动, $v_{横}$ 与钢球表面沿纬线方向转动的线速度的方向相反大小相等。

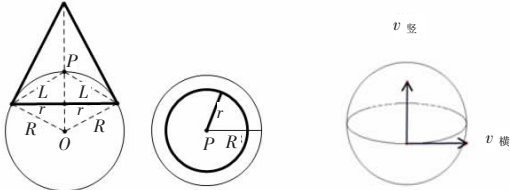


图1 摄像点与钢球位置示意图 图2 速度合成示意图

球冠中心在水平方向位移为 $v_{横}t$ ,设 $S_{横}=v_{横}t$ 。球冠中心在竖直方向位移 $v_{竖}t$ ,设 $S_{竖}=v_{竖}t$ 。两个表达式中 $t$ 是钢球转动的时间。

下面将水平方向位移和竖直方向位移分别转化为在球体表面沿纬度方向和经度方向的弧长。利用弧长公式 $S_{弧长}=\alpha R$ ,得到 $\alpha=\frac{S_{弧长}}{R}$ ,其中 $\alpha$ 是圆心角, $R$ 是钢球的半径。

水平方向:如图3,钢球水平方向转角 $\theta$ 是 $XOY$ 面上与 $X$ 正半轴成,球冠中心在钢球表面沿水平方向运动的弧长:

$$\widehat{CD}=S_{横}=\theta R=v_{横}t, \theta=\frac{v_{横}t}{R}$$

竖直方向:如图4,钢球竖直方向转角 $\varphi$ 是 $XOZ$ 面上与 $X$ 正半轴成角,球冠中心在钢球表面沿竖直方向运动的弧长:

$$\widehat{AB}=S_{竖}=\varphi R=v_{竖}t, \varphi=\frac{v_{竖}t}{R}$$

下面要研究的动点 $P(\theta, \varphi)$ 在钢球表面的位置。如图5, $\theta$ 是 $OP$ 在 $XOY$ 面内射影与 $X$ 正半轴的成角, $\varphi$ 是 $OP$ 在 $XOZ$ 面内射影与 $X$ 正半轴的成角。

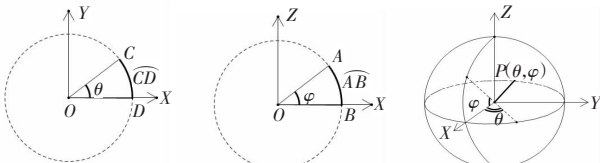


图3 水平方向转角示意图 图4 竖直方向转角示意图 图5 观察点在钢球表面位置示意图

利用球面<sup>[6]</sup>的表达式:

$$p(\alpha, \beta)=\begin{cases} x=R \cos \alpha \cos \beta \\ y=R \sin \alpha \cos \beta \\ z=R \sin \beta \end{cases}, \alpha \in (0, 2\pi), \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

当式(1)中 $R$ 是定值时,此方程表示球面。

球面动点:

$$p(\theta, \varphi)=\begin{cases} x=R \cos \theta \cos \varphi \\ y=R \sin \theta \cos \varphi \\ z=R \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

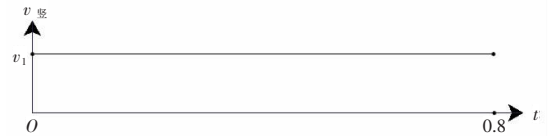
将 $\theta=\frac{v_{横}t}{R}$ , $\varphi=\frac{v_{竖}t}{R}$ 代入式(2)中,就得到了球面动点 $P$

关于运动时间 $t$ 的表达式:

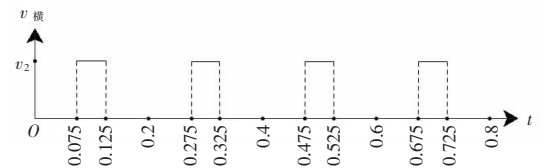
$$p(t)=\begin{cases} x=R \cos \frac{v_{横}t}{R} \cos \frac{v_{竖}t}{R} \\ y=R \sin \frac{v_{横}t}{R} \cos \frac{v_{竖}t}{R} \\ z=R \sin \frac{v_{竖}t}{R} \end{cases} \quad (3)$$

当式(3)中的 $v_{横}$ 、 $v_{竖}$ 、 $R$ 确定后,就可以确定观察点在钢球表面形成的轨迹,从而可以得到不同时刻拍照时观察点在钢球表面的相应位置,这样也就确定了拍摄到的是钢球表面的哪个区域。

检测系统设计中观察点在钢球表面沿竖直和水平方向速度随时间的变化规律,如图6所示。



(a) 竖直方向速度与时间图像



(b) 水平方向速度与时间图像

图6 水平和竖直方向速度函数图像

下面给出一个模拟实例。假设 $R=1; v_1=12; v_2=10; t \in (0, 0.8)$ 在Matlab中以精度为0.01作 $P(t)$ 图像<sup>[7]</sup>。

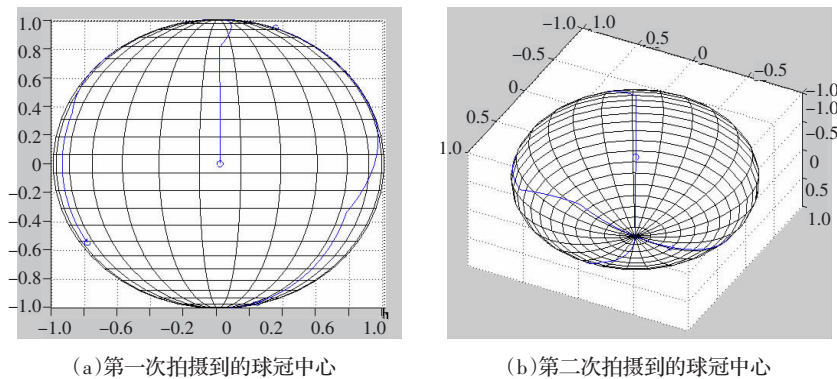
在图7中各图像中的蓝色曲线是观察点在钢球表面的运动轨迹,圆圈标记处是拍照时观察点在钢球表面的位置,这样就得到了在相对运动的条件下,观察点在钢球表面的运动的仿真轨迹和不同时刻拍照时观察点在钢球表面的位置。

观察点的位置确定后,便可确定在此观察点拍摄到的钢球表面的区域(也就是前面说的球冠)的图像。下面的问题就是验证在这些位置上拍摄到的图像能否将整个钢球表面覆盖到。

### 3 验证获得的图像能否把钢球表面全部覆盖的理论依据

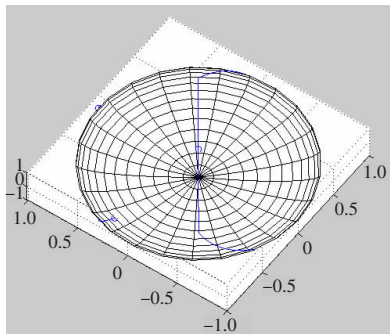
由于获得图像中的球冠是等大的,所以,验证获得的图像能否把钢球表面全部覆盖,实际就是验证所拍摄到的若干个等大的球冠能否将钢球表面全部覆盖。

下面以平面内三角形为例,如图8,研究如何用以三角形三个顶点为圆心,等半径的三个圆将三角形内部覆盖。

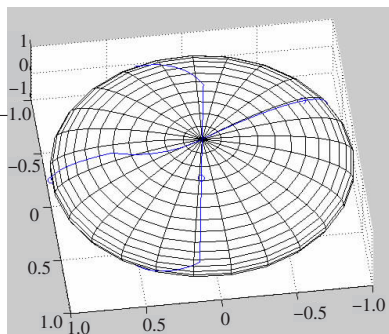


(a)第一次拍摄到的球冠中心

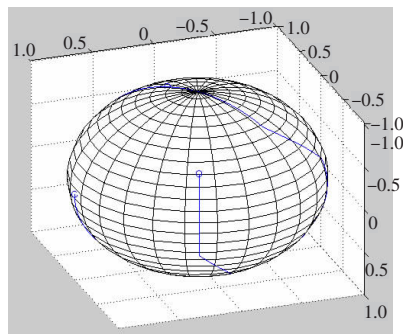
(b)第二次拍摄到的球冠中心



(c)第三次拍摄到的球冠中心

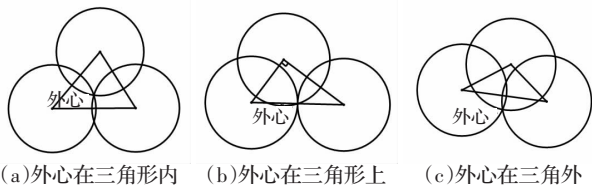


(d)第四次拍摄到的球冠中心



(e)第五次拍摄到的球冠中心

图7 Matlab 中观察点在钢球表面运动仿真图像



(a)外心在三角形内 (b)外心在三角形上 (c)外心在三角外

图8 平面三角形圆面覆盖示意图

对以上三种情况分析,可以得出结论:以三角形三个顶点为圆心,半径大于等于三角形外接圆的半径的三个圆可以将三角形内部覆盖。

下面将这个平面问题推广到球面上以球外一点为观察点观察球体,所观察到的区域是以观察点和圆心连线与球体表面交点  $P$  为中心的球冠。(下以  $P$  点代替观察点)在图 9 中  $R$  是小球半径,  $r$  是观察半径,  $L$  是球冠中心点到边缘的距离(以后称  $L$  为球冠半径)。

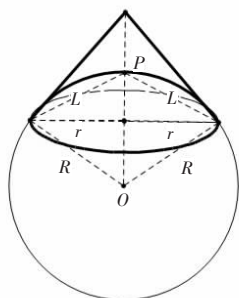


图9 拍摄到钢球表面球冠区域示意图

下面研究在球面上取多少个观察点可以将整个球面全部观察到。

在球体表面取三个点,如何用以这三个点为中心,大小相

等的三个球冠将由面  $OP_1P_2$ , 面  $OP_2P_3$ , 面  $OP_3P_1$  截得的球面部分  $P_1P_2P_3$  (以后用球面  $P_1P_2P_3$  表示截得的楔形  $P_1P_2P_3$  的球面部分)覆盖?

对平面三角形的覆盖问题的分析,得到启示:连接圆心  $O$  和三角形  $P_1P_2P_3$  的外心  $A$ , 延长  $OP$  交球面于  $B$ , 如图 10(a)。由此图可以知道  $\triangle OP_1B \cong \triangle OP_2B \cong \triangle OP_3B$ ,  $P_1B = P_2B = P_3B$ , 从而点  $B$  是球面  $P_1P_2P_3$  的中心。设  $P_1B = P_2B = P_3B = L$ 。

通过图 10 得出结论:用半径大于  $L$ , 以球体表面的三个顶点为中心的球冠可以将球面  $P_1P_2P_3$  覆盖。这说明球面上三点和球心形成的楔形的球面部分可以用半径大于  $L$  的三个球冠覆盖。

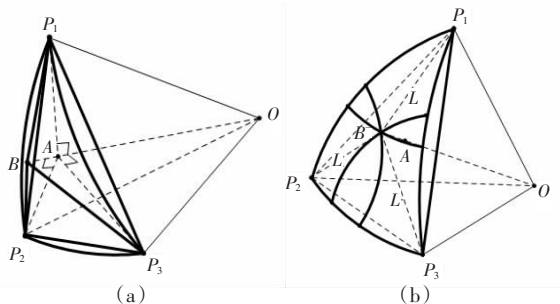


图10 楔形球面部分覆盖示意图

由此可知:在球体表面取  $n$  个点,这  $n$  个点和球心可以将球体分割为若干个楔形,如果每个楔形的球面部分都可以被三个等大的球冠覆盖,则整个球体的表面可以被  $n$  个等大的球冠覆盖。

这样就得到了验证所获得的图像能否将整个钢球表面覆

(下转 186 页)