

# 基于 MATLAB 的阵列信号处理模型构建和仿真方法

曾浩, 庞宇, 冯文江

ZENG Hao, PANG Yu, FENG Weng-jiang

重庆大学 通信工程学院, 重庆 400030

Department of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China

E-mail: haoz@cqu.edu.cn

ZENG Hao, PANG Yu, FENG Weng-jiang. Array signal processing model and simulation based on MATLAB. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(9): 168-171.

**Abstract:** MATLAB is used to develop the system model of array signal processing. How to simulate the covariance matrix estimation of forward-backward smoothing, signal's DOA (Direction Of Arrival) estimation of subspace, the weight of minimum power beamformer and some basic system parameters are present in detail. All the other complicated simulation can be completed according to them.

**Key words:** array signal; covariance matrix; DOA; beamforming

**摘要:** 文章介绍如何使用 MATLAB 构建阵列信号处理系统模型, 实现前向平滑的协方差矩阵产生方法, 波达方向估计的子空间方法, 最小功率波束合成器的权值求解算法和基本系统参数的仿真。各种复杂的阵列信号处理仿真都可以在此基础上完成。

**关键词:** 阵列信号; 协方差矩阵; 波达方向; 波束合成

**文章编号:** 1002-8331(2008)09-0168-04 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391.9

## 1 引言

阵列信号处理源于 20 世纪 60 年代相控阵天线技术。相控阵通过校正阵元接收信号相位, 达到主瓣对准期望目的, 但早期实现是通过模拟方式<sup>[1]</sup>。后来, 出现了自适应阵列技术, 使用数字方式对阵元信号幅度和相位同时校正, 不仅可以使主瓣对准期望, 同时零陷对准干扰<sup>[2]</sup>。目前, 阵列信号处理研究, 主要包括 DOA 估计和自适应波束合成两个方面<sup>[3-5]</sup>。不论是各种算法研究, 还是系统性能分析, 都是在一定数学模型基础上, 利用理论进行推演, 并通过仿真技术验证。工具软件 MATLAB 由于其固有的矩阵处理优势, 是阵列信号处理中的重要仿真工具, 但如何使用 MATLAB 建立模型, 进行仿真, 研究却较少涉及。而这对于阵列研究者, 非常重要。

## 2 阵列信号处理的信号模型

阵列信号处理不论是应用于雷达、通信、声纳、超声波等等, 其接收信号模型是相同或者相似的。对于一个远场窄带均值的入射信号, 其阵列如图 1 所示。如果用单位方向矢量  $\mathbf{a}$  表示信号来向, 矢量  $\mathbf{p}_i$  表示阵元坐标, 则第  $i$  个阵元接收信号相对于原点信号的时间延迟为

$$\tau_i = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{p}_i}{c} \quad (1)$$

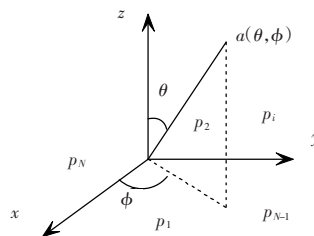


图 1 阵列结构示意图

其中,  $c$  是光速, 而

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (3)$$

如果原点位置接收信号的复数表示为

$$\tilde{x}_0(t) = x_0(t) e^{j\omega_0 t} \quad (4)$$

则由于信号是窄带的, 可以不考虑包络延时, 阵列接收信号矢量可以表示为

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60672097); 重庆大学自然科学基金(No.2007CD056)。

作者简介: 曾浩(1977-), 男, 博士学位, 讲师, 主要研究领域为阵列信号处理; 庞宇(1982-), 男, 硕士研究生, 主要研究领域为阵列信号处理; 冯文江(1957-), 男, 教授, 主要研究领域为移动通信。

收稿日期: 2007-07-16 修回日期: 2007-10-09

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0(t)e^{j\omega_0 t} \begin{bmatrix} e^{-j\tau_1} \\ \vdots \\ e^{-j\tau_N} \end{bmatrix} \quad (5)$$

定义波数矢量

$$\mathbf{k} = -\frac{2\pi}{\lambda} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

由此可以表示方向矢量

$$\mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_1} \\ \vdots \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_N} \end{bmatrix} \quad (7)$$

考虑阵列信号处理一般是在基带进行, 信号中已经没有载波分量, 接收信号可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = x_0(t)\mathbf{v}(k) \quad (8)$$

由此可见, 阵列接收信号的确定, 一方面决定于信号的复基带表达式, 另一方面则决定于方向矢量, 而方向矢量又是由信号 DOA 和阵列几何结构确定的。

### 3 阵列协方差矩阵

阵列接收信号包括三个部分, 一部分是期望信号, 一部分是干扰信号, 一部分是热噪声。期望信号只有一个, 干扰可以多个, 而这些信号均值都是零。在阵列信号处理中, 通常的算法都是对信号的协方差矩阵的处理, 比如各种子空间的 DOA 估计算法, 各种非盲的自适应波束合成算法等等。所以, 在仿真过程中, 如何得到协方差矩阵, 是关键步骤。

#### 3.1 协方差矩阵的公式法

在均值为零, 信号和干扰相互独立前提下, 阵列的接收信号协方差矩阵也就是自相关矩阵, 其表达式为

$$\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \sigma_s^2 \mathbf{v}(k_s)\mathbf{v}^H(k_s) + \sum_{j=1}^J \sigma_{ij}^2 \mathbf{v}(k_j)\mathbf{v}^H(k_j) + \sigma_n^2 \mathbf{I} = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_n \quad (9)$$

这个协方差矩阵表达式是一个没有估计误差的表达式,  $\sigma_s^2, \sigma_{ij}^2, \sigma_n^2$  分别是期望信号, 第  $j$  个干扰信号和热噪声的方差。MATLAB 中的协方差矩阵确定, 有两种方法, 一种是直接使用式(9), 得到无估计误差的协方差矩阵。

比如, 对于一个  $N$  阵元的标准线阵, 假设空间期望信号  $u_s = \cos\theta_s$ , 信噪比  $SNR = p$  dB, 存在干扰信号  $u_i = \cos\theta_i$ , 干扰噪声比为  $INR = q$  dB, 对于热噪声, 通常假设  $\sigma_n^2 = 1$ 。则 MATLAB 中采用式(9)可以得到协方差矩阵, 其程序为

```
n=[-(N-1)/2:(N-1)/2];
Vs=exp(-j*pi*p_i*u_s*n);
Vi=exp(-j*pi*p_i*u_i*n);
SNR=10^(p/10);
INR=10^(q/10);
Rx=SNR*Vs*Vs'+INR*Vi*Vi'+eye(N);
```

#### 3.2 协方差矩阵的估计法

在实际的系统中, 协方差矩阵只可能通过估计得到, 即用有限的  $K$  个快拍进行平滑估计。通常采用前向平滑的估计算法, 这也就是最大似然法。

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k) = \frac{1}{K} \mathbf{X}\mathbf{X}^H \quad (10)$$

其中, 数据矩阵

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(K)] = \mathbf{X}_s + \sum_{j=1}^J \mathbf{X}_{ij} + \mathbf{X}_n = \mathbf{v}(k_s)[s_0(1), \dots, s_0(K)] + \sum_{j=1}^J \mathbf{v}(k_{ij})[i_{0j}(1), \dots, i_{0j}(K)] + \mathbf{X}_n \quad (11)$$

阵列接收的信号由于是由三个部分组成, 数据矩阵也可以分解为三个部分。不论期望信号, 干扰, 还是热噪声, 都假设是高斯分布的复数信号, 则可以用 randn() 函数模拟产生这些信号。

同样采用 3.1 中的假设条件, 只是此时使用前向平滑进行协方差矩阵估计, 此时 MATLAB 程序为

```
s0=sqrt(SNR/2)*randn(1,K)+j*sqrt(SNR/2)*rand(1,K);
i0j=sqrt(INR/2)*randn(1,K)+j*sqrt(INR/2)*rand(1,K);
Xn=sqrt(1/2)*randn(N,K)+j*sqrt(1/2)*rand(N,K);
Xs=Vs*s0;
Xi=Vi*i0j;
X=Xs+Xi+Xn;
Rx=X*X'/K;
```

### 4 二维 DOA 估计的 MUSIC 算法

阵列信号处理中的一个重要内容就是信号的 DOA 估计, 这在雷达、通信中都应用广泛。DOA 估计的算法通常可以分为三种, 传统方法, 子空间算法, 以及最大似然法。虽然最大似然法被认为性能最好, 但实现复杂。而子空间算法可以突破瑞利极限, 是超分辨估计, 运算量也适中, 被广泛应用。

MUSIC 算法是典型的子空间算法, 其对协方差矩阵进行特征分解, 通过噪声空间投影构造谱函数<sup>[6]</sup>。假设空间具有  $J$  个信号, 他们的方差分别是  $\sigma_j^2$ , 其中  $j=1, \dots, J$ , 而热噪声的方差为  $\sigma_n^2$ , 那么, 协方差矩阵  $\mathbf{R}_x$  的  $N$  个特征值分别为

$$\lambda_i = \begin{cases} \sigma_j^2 + \sigma_n^2 & i=1, \dots, J \\ \sigma_n^2 & i=J+1, \dots, N \end{cases} \quad (12)$$

对于  $J$  个较大特征值, 其对应特征矢量为  $J$  个正交矢量, 他们张成的空间成为信号子空间。

$$\text{span}\{\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_J\} \quad (13)$$

而对于  $N-J$  个较小特征值, 其对应特征矢量也是  $N-J$  个正交矢量, 而他们张成的空间就是噪声子空间。

$$\text{span}\{\boldsymbol{\varphi}_{J+1}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_N\} \quad (14)$$

由于接收信号是位于信号子空间的, 而信号子空间又是和噪声子空间正交的, 所以, 通过把接收信号方向矢量向噪声子空间投影, 其值应该为零, 即空间谱函数  $P(\mathbf{k})$  具有最大值。

$$P(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{v}(\mathbf{k})\mathbf{I}\mathbf{v}^H(\mathbf{k})} \quad (15)$$

其中投影算子

$$\mathbf{I} = [\boldsymbol{\varphi}_{J+1}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_N] \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \quad (16)$$

从空间谱表达式(15)中可以看出, 进行谱峰搜索的主要问题在于方向矢量表示和协方差矩阵的特征分解。根据方向矢量的定义式(7), 其决定于信号波数和阵元坐标。阵元坐标是固定的, 而谱峰搜索过程就是对波数中的 DOA 进行扫描过程, DOA 是空间谱函数的自变量。对于噪声空间投影, 虽然定义非常清

楚,但在工程实现过程中,计算量却很大。对于 MATLAB 而言,特征值和对应特征矢量的求解相对较为简单,只需调用函数  $eigs()$  就可以直接得到,但前提是信号个数  $J$  要是已知量。

对于一个均匀园阵,假设阵元  $N=8$ ,阵列位于  $x-y$  平面,圆心位于原点,半径  $r$  为半波长,第  $i$  个阵元坐标可以表示为

$$P_i = \begin{bmatrix} r \cos \frac{2\pi}{N} (i-1) \\ r \sin \frac{2\pi}{N} (i-1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

同时结合式(6),可以得到方向矢量。

$$v(k) = \begin{bmatrix} e^{jms \sin \theta \cos(\phi - \frac{2\pi}{N}(1-1))} \\ \dots \\ e^{jms \sin \theta \cos(\phi - \frac{2\pi}{N}(N-1))} \end{bmatrix} \quad (18)$$

假设空间具有三个信号,其 DOA 来向分别为  $(260^\circ, 20^\circ)$ 、 $(180^\circ, 40^\circ)$ 、 $(80^\circ, 60^\circ)$ ,信噪比均为 10 dB,则 MATLAB 程序首先应该得到协方差矩阵  $R_x$ , 然后进行特征分解,最后是谱峰搜索。主要程序为

```
f=2*pi*p/N*[0:1:N-1]';
[F,D]=eigs(Rx,N-3,'SM');
xa=[0:2:360]*p/180;
ya=[0:1:90]*p/180;
for k=1:length(ya)
    for m=1:length(xa)
        Va=exp(j*pi*xi*sin(ya(k))*cos(xa(m)-fi));
        P(k,m)=1/(Va'*F'*F'*Va);
    end
end
mesh(x,y,10*log10(P));
```

相应仿真结果如图 2 所示。图的上部分为三维空间谱,下部分是空间谱的投影图。

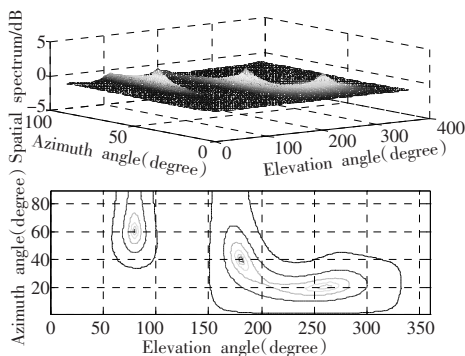


图2 二维 MUSIC 谱

## 5 自适应波束合成技术

自适应波束合成技术,就是通过各种自适应算法得到阵列的最优权矢量解。对于不同的准则,比如最小方差,最小功率,最大信噪比等等,这个权矢量的表达式是不相同的,但是,他们都统一为维纳解。而自适应算法则可以分为盲算法和非盲算法两种。非盲算法需要参考信号,这个参考信号可以是时间参考信号,即一个训练序列,也可以是空间参考信号,即信号 DOA 参数。而盲算法则不需要参考信号,利用信号的特殊物理特性和统计特性,进行自适应权值求解。这些特性包括了恒模特性,

高阶统计特性,循环平稳特性等。阵列通过自适应算法得到权矢量后,其阵列整体的方向图就可以使主瓣对准期望信号,而零陷对准干扰信号,从而大大提高系统的增益。而阵列方向图和系统增益是两个重要参数。

### 5.1 阵列方向图

阵列方向图是阵因子和阵元因子乘积,通常自适应波束合成信号处理算法中不考虑阵元因子,故阵列方向图阵因子为

$$B = w^H v(k) \quad (19)$$

式中,权是确定值,而方向矢量中的角度是自变量。比如,对于最小功率准则的波束合成器,其最优权矢量表达式为<sup>[7]</sup>

$$w_{MP} = \mu R_x^{-1} v(k_s) \quad (20)$$

$$\mu = \frac{1}{v^H(k_s) R_x^{-1} v(k_s)} \quad (21)$$

可见,权矢量决定于期望信号方向矢量和阵列接收信号的协方差矩阵。系数  $\mu$  是常数,其意义在于保证主瓣期望信号方向上的增益为单位增益。

假设空间均匀线阵  $N=8$ ,空间期望信号为  $u_s=0$ ,  $SNR=20$  dB,两个干扰信号  $u_1=0.4$ ,  $u_2=-0.6$ ,  $INR_1=10$  dB,  $INR_2=20$  dB,则方向图的仿真首先是求解协方差矩阵,然后是权值表达式,最后用式(19)描绘出方向图。

```
w=inv(Rx)*Vj/(Vj'*inv(Rx)*Vj);
u=-1:1/1000:1;
beam=20*log10(w'*exp(j*n*pi*u));
plot(u,beam);
```

仿真结果如图 3 所示。图 3 中,实线表示采用公式法得到协方差矩阵,进而求解方向图。此时,主瓣方向和零陷都正常。而虚线表示在不同快拍数估计协方差矩阵时的方向图。图中可以看出,当快拍数较少,协方差矩阵误差较大,一是旁瓣电平较高,二是零陷深度较低,三是可以对期望信号也产生零陷,这就是“自零陷”效应。

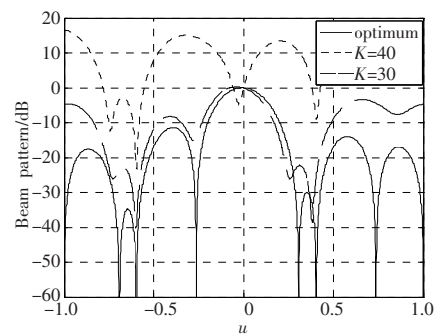


图3 阵列方向图

### 5.2 阵列增益

阵列增益是研究阵列性能的重要参数,其定义为阵列输出信干噪比和输入信干噪比之比<sup>[8]</sup>。

$$G = \frac{SINR_{out}}{SINR_{in}} \quad (22)$$

式中,根据假设条件

$$SINR_{in} = \frac{\sigma_s^2}{\sum_{j=1}^J \sigma_{ij}^2 + \sigma_n^2} \quad (23)$$

$$SINR_{out} = \frac{w^H R_s w}{w^H (R_i + R_n) w} \quad (24)$$

可见, 阵列增益表示中, 需要确定各个量的方差, 信号协方差矩阵, 以及权矢量, 而这些量通过前文分析, 都有各自实现方法。最小功率准则阵列增益程序为

$$\begin{aligned} R_s &= SNR * V_s * V_s'; \\ R_i &= INR * V_i * V_i'; \\ R_n &= eye(N); \\ R_s &= R_s + R_i + R_n; \\ w &= inv(R_s) * V_s / (V_s' * inv(R_s) * V_s); \\ SINR_{in} &= SNR / (INR + 1); \\ SINR_{out} &= w' * R_s * w / (w' * (R_i + R_n) * w); \\ G &= 10 * \log_{10}(SINR_{in} / SINR_{out}); \end{aligned}$$

同样假设一个均匀线阵, 空间期望信号  $u_s=0$ ,  $SNR=20$  dB, 同时一个干扰信号,  $u_i=0.4$ , 考察不同  $INR$  下阵列增益同阵元数关系, 如图 4 所示。图中可以看出, 阵元数越多, 干扰功率越小, 增益越大。

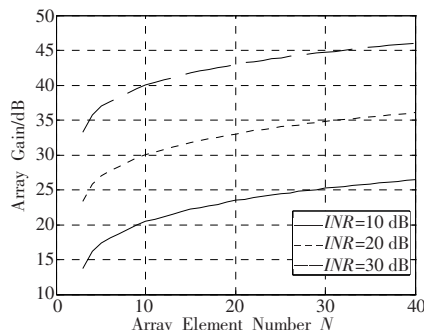


图 4 阵元数同阵列增益

## 6 结束语

阵列信号处理的内容非常丰富, MATLAB 是用于阵列信号

处理研究的重要工具。文章虽然只介绍了 MATLAB 用于协方差矩阵, 基本 DOA 估计和简单自适应阵列参数的模型构建和仿真方法, 但对于各种复杂的阵列信号处理算法, 都是建立在这些基础之上的。掌握了基础模型建立和仿真方法, 复杂问题自然迎刃而解。

## 参考文献:

- [1] Chose R N. Electronically adaptive antenna systems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1964-03: 161-169.
- [2] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996-07: 67-94.
- [3] Nordebo S, Gustatsson M, Lundback J. Fundamental limitations for DOA and polarization estimation with applications in array signal processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(10): 4055-4061.
- [4] Abdel-Samad A, Davidson T N, Gershman A B. Robust transmit eigen beamforming based on imperfect channel state information[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(5): 1596-1609.
- [5] Yuan Q, Chen Q, Sawaya K. Accurate DOA estimation using array antenna with arbitrary geometry[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2005, 53(4): 1352-1357.
- [6] Schmid R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, AP-34(3): 276-280.
- [7] Van Trees H L. Optimum array processing[M]. U S A: John Wiley & Son, 2002: 451-452.
- [8] 张贤达, 保铮. 通信信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002: 320-325.

(上接 138 页)

挖掘 XML 文档中最大频繁路径和最大频繁子树, 在此基础上, 本文提出一种凝聚的层次聚类算法 XMLCluster, 分别以最大频繁路径和最大频繁子树作为 XML 文档的特征, 对文档进行聚类, 最后通过实验表明, 提出的 FrePathMiner 和 FreTreeMiner 聚类方法, 与传统的 ASPMiner 聚类方法相比, 其聚类效果具有更大的优越性。

## 参考文献:

- [1] Bray T, Paoli J, Sperberg-McQueen C M, et al. Extensible Markup Language (XML) 1.0 (Fourth Edition) [EB/OL]. (2006-09-29). <http://www.w3.org/TR/2006/REC-xml-20060816/>.
- [2] Leung Ho-pong, Chung Fu-lai, Chan C F, et al. XML document clustering using common xpath[C]//Proceedings of the 2005 International Workshop on Challenges in Web Information Retrieval and Integration (WIRI'05), 2005.
- [3] Raffei D. Finding syntactic similarities between XML documents[C]//Proc 17th Int Conf on Database and Expert Systems Applications (DEXA'06), 2006.

- [4] Lee Jung-Won, Lee Kiho, Kim Won. Preparations for semantics-based XML mining[C]//Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Data Mining (ICDM'01), 2001.
- [5] Leung H P. On the use of hierarchical information in sequential mining-based XML document similarity computation[J]. Knowledge and Information Systems, 2005, 7(4).
- [6] 傅珊珊, 吴扬扬. 一种挖掘 XML 文档频繁子树的方法[J]. 计算机工程与科学, 2007(11).
- [7] Nierman A, Jagadish H V. Evaluating structural similarity in XML documents[C]//Int'l Workshop on the Web and Databases (Web-DB). Madison, 2002: 61-66.
- [8] Lee Mong Li, Yang Liang Huai, Hsu Wynne, et al. XClust: clustering XML schemas for effective integration[C]//CIKM'02, November 4-9, 2002.
- [9] Kotsakis E, Boehm K. XML schema directory: a data structure for XML data processing[C]//Proc 1st Int Conf on Web Information Systems Engineering (WISE'00), 2000.
- [10] NIAGARA experimental data [DB/OL]. <http://www.cs.wisc.edu/niagara/data.html>.