基于 QPSO-SA 混合算法的多目标投资组合优化

江家宝,郑尚志
JIANG Jia-bao,ZHENG Shang-zhi

巢湖学院 计算机系,安徽 巢湖 238000
Department of Computer Science & Technology,Chaohu College,Chaohu,Anhui 238000,China
E-mail:jiangjiabao8798@163.com

JIANG Jia-bao,ZHENG Shang-zhi. Multi-objective portfolio optimization utilizing hybrid QPSO-SA algorithm. Computer Engineering and Applications,2008,44(14):231-234.

Abstract:Multi-objective portfolio optimization is decides the percentage of the overall portfolio value allocated to each portfolio component with specified risk and return and exchanging expense characteristics to make total investment risk and exchanging expense least,at the same time,make total investment return most and so on. The problem of multi-objective portfolio optimization is a problem of NP_hard. Ordinary methods are hard to be at the holistic best point. In this paper the authors study how to use Quantum-Behaved Partical Swarm Optimization(QPSO) combined Simulated Annealing(SA) algorithm to solve the problem of multi-objective portfolio optimization, and also compare performance of single QPSO with performance of QPSO-SA. Many experiments that optimize the allocation of various stocks in the market of USA using QPSO-SA algorithm and the analyse of experiment result indicate that the QPSO-SA is a kind of efficient and reliable optimization algorithm and it has determinate applied value in the field of multi-objective portfolio optimization.
Key words:multi-objective;portfolio;optimization;quantum;simulated annealing

摘 要:多目标投资组合优化就是决定每个具有特定风险、回报、交易费用等特征的资产在总投资价值中的投资比例,即选择那些资产投资以及寻找每个投资资产的最佳投资比例,使得总投资的风险最小、交易费用最小、回报最大等等。该问题是典型的 NP 难解问题,通常方法很难达到全局最优。研究如何把基于量子行为的微粒群优化算法(QPSO 算法)和模拟退火算法(SA 算法)结合起来解决多目标投资组合优化问题。利用美国标准普尔指数 100 的股票历史数据进行验证,纯 QPSO 算法与 QPSO-SA 混合算法的运行结果比较表明在解决多目标投资组优化问题中,QPSO-SA 混合算法是一种高效的、可靠的优化算法,具有一定的实用价值。
关键词:多目标;投资组合;最优化;量子;模拟退火
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2008.14.066 **文章编号**:1002-8331(2008)14-0231-04 **文献标识码**:A **中图分类号**:TP39

与单一资产投资相比,投资组合的显著优点就是:如果资产选择合适,每个资产被指定的权重正确,则投资的总期望回报保持不变,而投资风险被分散到各个投资的资产中去从而使得投资风险多样化。对于大的货币资金管理公司,每年需要把大量的货币资金投资到各种投资资产中去,比如:养老基金、银行保险、股票等金融资产。选择适当的投资组合即选择何种资产、每个资产赋予多大的权重(即:各资产的投资比例多少)是这些金融公司投资时第一个至关重要的事情。虽然这些决定大多数遵循定性标准,但是现今出现了基于定量方法的投资决策,这是典型的组合优化问题,也是典型的 NP 难解问题。投资时,投资者感兴趣的是最大化各种投资收益,同时最小化各种投资风险和投资费用等等。这显然是具有多个目标函数的多目标规划问题:一类是最大化问题,一类是最小化问题。文章研究如何把 QPSO 算法和 SA 算法结合起来解决多目标投资组合优化问题。

1 多目标投资组合优化模型

1.1 多目标问题

多目标问题在工程优化领域非常普遍,本文是优化属于不同问题特征的一组目标函数。下面简要介绍多目标优化问题的数学描述:令:

$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 表示问题的 n 个变量的向量;

$f_1,f_2,\cdots,f_m$ 表示优化的 m 个目标函数;

寻找:

$$\text{Min}:f_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),\cdots,f_m(X_1,X_2,\cdots,X_n) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}g_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant b_1\\ g_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant b_2\\ \cdots\\ g_r(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant b_r\end{cases} \tag{2}$$

实际问题常常是不存在满足约束(2)的点 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,$

作者简介:江家宝(1968-),男,讲师,主要研究方向:模式识别与智能控制、嵌入式操作系统;郑尚志(1963-),男,高级试验师,主要研究方向:操作系统理论、计算机图形学。
收稿日期:2007-08-27 **修回日期**:2007-12-17

X_n)使得$f_1,f_2,\cdots,f_m$同时达到最小。目前求解多目标规划问题没有最佳方法,最常用的方法是评价函数法,它的基本思想是借助几何或应用中的直观背景,构造所谓的评价函数,从而将多目标优化问题转化为单目标优化问题,然后利用成熟的单目标求解方法求出最优解,并把这种最优解当作多目标规划的最优解。在模拟退火过程中认为满足下式的投资方案X^*比投资方案X优越:

$$\forall i \quad f_i(X^*) \leqslant f_i(X)$$
$$\text{且 } \exists j \in 1,\cdots,m; f_j(X^*) < f_j(X) \tag{3}$$

在遗传算法的进化过程中采用最优点法来构造资产投资问题的评价函数,方法是首先求出每个目标函数的当前最优点即当前最小值$f_1^*,f_2^*,\cdots,f_m^*$然后构造如下评价函数:

$$\text{Min } F(X) = [\sum_{i=1}^{m}(f_i(X) - f_i^*)^2]^{1/2} \tag{4}$$

1.2 多目标投资组合优化数学建模

投资组合的收益和风险种类很多,为了简化问题仅仅根据历史数据用下列相应的公式计算出相关各量。令:

M:投资者现有资金总量;N:可选资产总数;K:投资的资产数($K \leqslant N$);p_i:资产i交易费率;b_i:资产i的购买额不超过给定值;r_i:资产i的期望回报率均值;n_i:资产i的最小投资比例;m_i:资产i的最大投资比例;w_i:资产i的实际投资比例;z_i:表示是否投资资产$i(z_i \in \{0,1\})$;$c(w_i)$:资产i交易费用;$R(w_i)$:资产i净收益;σ_{ij}:资产i与j之间的协方差。

$$c(w_i) = \begin{cases} 0, w_i = 0 \\ p_i \times b_i, 0 < w_i \leqslant (1+p_i)\dfrac{b_i}{M} \\ \dfrac{p_i \times M \times w_i}{1+p_i}, (1+p_i)\dfrac{b_i}{M} < w_i \end{cases} \tag{5}$$

$$R(w_i) = r_i \times M \times w_i - c(w_i) \times (1+r_i) \tag{6}$$

优化问题可由下式表示:

$$\text{Min } Q = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{7}$$

$$\text{Min } R = -\sum_{i=1}^{N} R(w_i) \tag{8}$$

$$\text{Min } G = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \frac{R(w_i) * R(w_j)}{\sigma_{ij}} \tag{9}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \text{ 且 } \sum_{i=1}^{N} z_i = K \\ \forall i \quad n_i \times z_i \leqslant w_i \leqslant m_i \times z_i \end{cases} \tag{10}$$

2 算法简介

2.1 模拟退火

模拟退火可追溯到19世纪80年代中期的统计物理学,其物理基础是固体的退火,过程是先使固体达到很高的温度,然后慢慢降冷却以至于其构成粒子寻找最低能量的位置。

模拟退火过程可以将优化问题考虑为:一个粒子结构就是一个问题的解决方案;一个最小能量结构对应于一个最优解决方案,一个结构的能量就是目标函数值,终温与初温就是搜寻的控制参数。它利用一个基于麦克斯韦-玻尔兹曼分布的概率函数进行搜索,最初,温度高其概率大,随着迭代概率趋于0。在其限度内,算法的行为表现为一个局部搜索,仅仅接受改进当前解决方案的那些解决方案,如果搜索到的方案比当前方案优则替代当前方案。为了应用此技术,设计如下退火方案即定义一些列退火参数和相关符号:

chain:同样固定温度的当前迭代次数;

chain_m:同样固定温度的迭代次数最大值;

aleat:[0,1]之间的随机数;

T_k:第k次迭代时的温度值;

H:温度T_k的更新参数;

Ω:问题的搜寻空间;

e:问题的某一解决方案;

$Q(e)$:根据公式(7)计算的方案e总体风险;

$R(e)$:根据公式(8)计算的方案e总体收益;

$V(e)$:方案e的临近方案集;

模拟退火算法基本思想可描述为如下伪代码:

```
e0 ∈ Ω
for(loops=0;loops<D;loops++){
 for(chain=0;chain<chain_m;chain++){
    Choose a solution e∈V(e0)
    x=Q(e0)-Q(e);y=R(e0)-R(e);
    if((x>0 && y≥0) or (x≥0 && y>0))
       replace e0 by e;
    else
    {choose aleat∈[0,1];
     a=x/Tk;b=y/Tk;m=e^-a;n=e^-b;
     if(y<0 && aleat<m) or (x<0 && aleat<n)
      replace e0 by e;
    }
    若V(e0)全被选择过,则重新产生V(e0);
  }
  Tk+1=H*Tk;
 }
 return(e0);
```

方案e的临近方案集$V(e)$产生方法伪代码如下:

```
e∈Ω
inc=0;
从e中寻找风险最大的两个资产a和b;
if(Ra(wa)<Rb(wb))  worst=a;
else  worst=b;
v=e;   c=wworst/N;
for(neighbors=0;neighbors<N;neighbors++)
    inc=inc+c;
    if((wworst-inc)≥nwors)
      从v中选择一非worst资产k
      if((inc+wk)<mk)
          wk=wk+inc;wworst=wworst-inc
      else
          wk=mk;wworst=wworst-mk+wk
    修改最优点Q*、R*和G*并把v加入V(e)中去
else
    从所有可选资产中选择一非v资产k
    wk=wwors;wworst=0;
    while(wk<nk)
        在v中随机选择非k资产m
        x=(wm-nm)*aleat
        if((x+wk)<mk)
```

$w_k = w_k + x; w_m = w_m - x$;

else

$w_{mt} = w_m - m_k + w_k; w_k = m_k$;

修改最优点 $Q*$、$R*$ 和 $G*$;并把 v 加入 $V(e)$ 中去;

2.2 QPSO 算法

粒子群算法(PSO 算法)是在 1995 年由美国社会心理学家 James Kennedy 和电气工程师 Russell Eberhart 共同提出的,基本思想是模拟鸟类群体行为,并利用了生物学家的生物群体模型,与其它进化类算法相类似,也是用"群体"与"进化"的概念,同样也是依据个体(微粒)的目标函数值大小进行操作。区别在于,微粒群算法将每个个体看作是在 N 维搜索空间中的一个无重量无体积的微粒,并在搜索空间中以一定的速度飞行,飞行速度由个体的飞行经验和群体的飞行经验进行动态调整,假设:

(1) $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in})$ 为微粒 i 的当前位置。

(2) $V_i = (V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{in})$ 为微粒 i 当前飞行速度。

(3) $P_i = (P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{in})$ 为微粒 i 所经历的当前最佳位置(即经历过的具有最好适应值的位置)。设 $f(X)$ 为最优化的目标函数,则微粒 i 所经历的当前最佳位置由下式确定:

$$P_i(t+1) = \begin{cases} P_i(t); \text{若} f(X_i(t+1)) \leqslant f(P_i(t)) \\ X_i(t+1) \text{若} f(X_i(t+1)) > f(P_i(t)) \end{cases} \quad (11)$$

设群体中的微粒数为 N,群体中所有微粒所经历过的最佳位置 $P_g(t)$,称为全局最佳位置。则:

$$P_g(t) \in \{P_0(t), P_1(t), \cdots, P_s(t)\} \mid f(P_g(t)) = \max\{f(P_0(t)), f(P_1(t)), \cdots, f(P_N(t))\} \quad (12)$$

算法的进化方程可描述如下:

$$V_{i,j}(t+1) = w * V_{i,j}(t) + c_1 * r_{1j}(t) * (P_{i,j}(t) - X_{i,j}(t)) + c_2 * r_{2j}(t) * (P_{g,j}(t) - X_{i,j}(t)) \quad (13)$$

$$X_{i,j}(t+1) = X_{i,j}(t) + V_{i,j}(t+1) \quad (14)$$

QPSO 算法改进了 PSO 的进化方程,具体如下:

$$mbest = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P_i = \left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P_{i1}, \cdots, \frac{1}{M} P_{ij}\right) \quad (15)$$

$$PP_{ij} = f * P_{ij} + (1-f) * P_{gj}; f = \text{rand} \quad (16)$$

$$x_{ij} = PP_{ij} \pm a * |mbest_j - x_{ij}| * \ln(1/u), u = rand \quad (17)$$

这里 $mbest$ 是粒子群 $pbest$ 的中间位置,PP_{ij} 为 P_{ij} 和 P_{gj} 之间的随机点。a 为 QPSO 的收缩扩张系数,它是 QPSO 收敛的一个重要的参数,第 T 次迭代时一般可取 $a = 0.1 + 0.8 * (MAXTIME - T)/MAXTIME$($a$ 的取值视情况而定),其中 $MAXITER$ 是迭代次数最大值。

3 多目标投资组合优化设计

在多目标投资组合优化过程中优化目标如式(7)~式(9)所示,这样每个个体(即每种投资组合)评价函数可定义为:

$$\text{Min}: F(e) = [(Q(e) - Q^*)^2 + (R(e) - R^*)^2 + (G(e) - G^*]^{1/2} \quad (18)$$

QPSO_模拟退火混合算法的实现过程如下:

输入:粒子的维数(即选择的资产数),粒子个数,初始总投资价值,金融历史数据。

输出:最佳评价函数值、投资资产号与资产量、总交易费用、各资产的期望财富、总体投资风险值。

步骤 1 随机初始化 $Popsize$ 个粒子,初始化粒子各维权重、资产号、最优点的方法如下述伪代码所示:

```
for(i=0;i<Popsize;i++)
    随机选择 K 个资产 a_i 构成一种投资资产子集@;
    对资产子集@ 中每个资产 a_i 随机初始化投资权重 w_i 满足
    n_ai ≤ w_ai ≤ m_ai
    计算: S = 1 - Σ_{i=1}^{K} w_ai
    if(S! =0)
      for each a_i ∈@
          if (S>0) f_ai = m_ai - w_ai;
          else  f_ai = w_ai - n_ai;
      for each a_i ∈@
          w_ai = w_ai + S × f_ai / Σ_{i=1}^{K} f_ai ;
```

这样构成一个父代个体。然后利用式(7)~式(9)求出 Q_i、R_i、G_i,并求出其最优点 $Q*$、$R*$ 和 $G*$;

初始化粒子局部最优位置为其当前位置、初始化全局最优位置为当前所有粒子的最佳位置。

步骤 2 根据公式(15)计算 $mbest$。

步骤 3 先根据公式(16)计算每个粒子随机点 $PP_{i,j}$,然后根据公式(17)(以一定的概率取加或减))更新每个粒子的新位置(粒子的各维坐标表示相应资产的权重)。

步骤 4 依据公式(10)对每一新个体 $new[i]$ 按照如下伪代码进行修正:

```
检查 new[i] 中是否存在重复的资产号,若有,随机选择新资产替换重复者;
对 new[i] 的每维投资权重 w_aj 作如下操作:
      if(w_aj < n_ai)   w_aj = n_ai
      if(w_aj > m_ai)   w_aj = m_ai
对 new[i] 的投资权重 w_aj 作归一化操作;
least=0; most=0;
for(j=0;j<K;j++)
 if (w_aj < n_ai)
   以概率 p = (n_aj - w_aj)/n_aj 选择新资产 bj;
   if (w_bj < n_bi)
     least = least + n_bi - w_bj;   w_bj = n_bi;
   if (w_aj > m_ai)
     most = most + w_aj - m_ai;   w_aj = m_ai;
 least = least - most;
While(least>0)
    从 new[i] 中随机选择一个 w_j > n_i 的资产 cj
    x = aleat × (wc_j - n_ci)
    if((least - x) ≥0)
      least = least - x; w_cj = w_cj - x;
While (least<0)
    从 new[i] 中随机选择一个 w_j 与 n_i 差距相对较小的资产 cj
    x = aleat × (m_ci - w_cj);
    if((least + x) ≤0)
      least = least + x; w_cj = w_cj + x;
修改最优点 Q*、R* 和 G*;
```

步骤 5 对每个粒子产生临近方案集 $V(e)$,然后进行模拟退火。

步骤 6 利用公式(18)计算各粒子局部最优位置评价函数值,若局部最优位置评价函数值小于粒子当前评价函数值,则用粒子当前所有信息取代其局部最优位置所有信息。

步骤 7 利用公式(18)计算全局最优位置评价函数值,若所有粒子局部最优位置评价函数值最小者小于全局最优位置评价函数值,则用其所有信息取代全局最优位置所有信息。

步骤 8 若终止条件不满足,返回到步骤 2,否则算法结束并返回最佳结果。

4 实证结果

(1)为了验证算法,以美国标准普尔指数 100 的 86 只成分股票自 1999 年 12 月 5 日至 2005 年 12 月 5 日 6 年间的每周开盘价和收盘价以及市场指数为原始数据进行测试。首先基于这些历史数据根据标准的资产定价模型:

$$CAPM\ r_i = 0.05 + 0.06 \times d_i$$

公式中 0.05 表示期望的安全回报率为 5%,0.06 表示期望的市场风险回报率为 6%,d_i 系数来源于资产 i 的历史回报均值。

计算出每种股票的期望回报 $r_i(i=1,2,\cdots,N)$,同时计算用于估计风险的协方差 $V_{ij}(i,j=1,2,\cdots,N)$。

(2)QPSO 与模拟退火混合算法参数设定如下:QPSO 参数:$c_1=1.6$,$c_2=2$,w 随着迭代线性地从 0.9 递减到 0.1,同样固定温度迭代次数最大值:$chain\_m=150$,初始温度:$T_0=100$,温度 T_k 的更新参数:$H=0.95$,模拟退火迭代次数:$D=1\ 000$。

(3)函数运行 50 次取其结果构造有效前沿得到结果如下,选择 5 个资产程序运行结果如图 1,图 2 及表 1 。

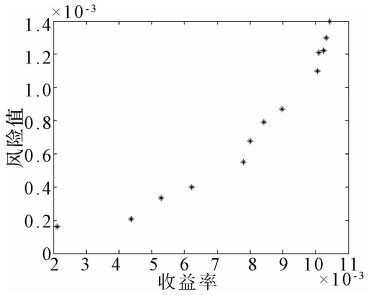

图 1 选择 5 个资产的 QPSO 有效前沿

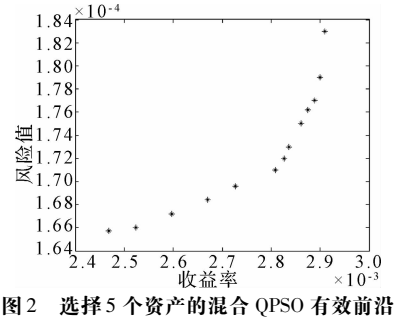

图 2 选择 5 个资产的混合 QPSO 有效前沿

表 1 两种算法运行结果比较(5 个资产)

算法	特征	最小值	最大值
QPSO 算法	风险	0.000 163 0	0.001 400
	收益率	0.002 123 0	0.010 420
混合算法	风险	0.000 165 7	0.000 183
	收益率	0.002 469 0	0.002 910

选择 10 个资产程序运行结果图 3,图 4 及表 2。

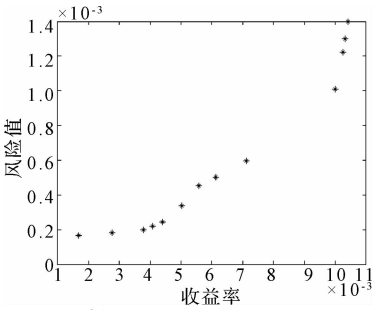

图 3 选择 10 个资产的 QPSO 有效前沿

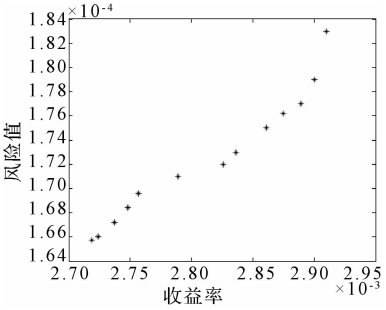

图 4 选择 10 个资产的混合 QPSO 有效前沿

表 2 两种算法运行结果比较(10 个资产)

算法	特征	最小值	最大值
QPSO 算法	风险	0.000 164 0	0.001 400
	收益率	0.001 681 0	0.010 420
混合算法	风险	0.000 165 7	0.000 183
	收益率	0.002 742 0	0.002 910

通过上述数据和图形不难看出 QPSO 算法与模拟退火混合算法的结果比单纯的 QPSO 算法优越。

5 结论

这篇论文阐述了基于量子行为的微粒群优化算法(QPSO)和模拟退火算法,以及如何把模拟退火算法与 QPSO 算法结合起来用于制定多目标投资决策,同时比较了单纯 QPSO 算法与 QPSO-模拟退火混合算法的运行结果,通过以上运行结果的对比和分析可以得出如下结论;利用 QPSO 算法的全局搜索能力比模拟退火强和模拟退火的局部搜索能力比 QPSO 算法强的特征,把两种算法结合起来形成的 QPSO-SA 混合算法的搜索能力更强,能够很好地收敛于全局最优点,在解决多目标投资组合优化问题中,QPSO-SA 混合算法的优化性能比 QPSO 以及 PSO 算法更优越,说明 QPSO-SA 火混合算法在多目标投资组合优化领域具有很高的实际应用价值。

参考文献:

[1] 刘国平. 多目标最优化的粒子群算法[J]. 杭州师范学院学报:自然科学版,2005,4(1).

[2] 曾建潮,介婧,崔志华. 微粒群算法[M]. 北京:科学出版社,2004.

[3] Sun J,Xu W B. A global search strategy of quantum-behaved particle swarm optimization[C]//Proceedings of IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems,2004:111-116.

[4] Sun J,Feng B,Xu W B. Particle swarm optimization with particles having quantum behavior[C]//Proceedings of 2004 Congress on Evolutionary Computation,2004:325-331.

(下转 241 页)