◎博士论坛◎

# 基于准线性变换消元法的有理参数曲面逆映射

王 彦,马利庄,杭鲁滨,褚 娜
WANG Yan,MA Li-zhuang,HANG Lu-bin,CHU Na

上海交通大学,上海 200030
Shanghai Jiaotong University,Shanghai 200030,China
E-mail:wangyan8383@sjtu.edu.cn

**WANG Yan,MA Li-zhuang,HANG Lu-bin,et al.Inverse mapping of rational parameter surface based on the pseudo linear transformation method.Computer Engineering and Applications,2007,43(5):1-2.**

**Abstract**: The paper puts forward pseudo linear transformation method for solving nonlinear algebraic equations.Based on the new method,the paper discusses an inverse mapping of rational parameter surface,also,the implicit equation of the parametric equation is obtained.The presented method provides a new way for solving the problem involving nonlinear algebraic equation in many fields such as geometric theorem machine proven,CAD,forward and inverse kinematics of robots.
**Key words**: pseudo linear transformation method;implicit equation;rational parameter sueface

**摘 要**:作为非线性代数方程组消元的一种探索,提出了基于准线性的变换消元法。用该方法对基于有理参数曲面的逆映射进行了一些探讨,并得到参数曲面的隐式方程。所提出的准线性变换消元法可应用于涉及非线性代数方程组求解的几何定理机器证明、计算机辅助设计、机器人等多个领域,具有十分重要的理论意义与实用价值。
**关键词**:准线性变换法;隐函数方程;有理参数曲面
**文章编号**:1002-8331(2007)05-0001-02 **文献标识码**:A **中图分类号**:TP391

## 1 介绍

在计算机图形的几何造型方面,几何形状多采用参数曲面的形式来表示,虽然参数形式在几何造型方面有许多优点,但是几何造型的隐函数形式表示在某些场合,如复杂几何形式的描述和修改、求解两个参数曲面的交,判断给定点是否在此参数曲面上等应用中,更具优势,而且其几何与仿射不变性使之成为实体重构的最有利的工具。

参数曲面的隐函数表示,参数曲面的逆映射等问题涉及多项式方程组的求解。非线性代数方程组符号求解方法主要有吴法、Groebner 基法、聚筛法、Dixon 法、Sylvester 法等方法。其中 Groebner 基法、吴法是系统、完善,且数学理论上严密的优秀方法,但吴法“对于准三角型的多项式方程组十分有效,而对于对称性较强的多项式方程组,吴法整序算法效果较差”;Groebner 基法对较复杂的多项式方程组,效率甚低,甚至在消元过程中因多项式迅速膨胀导致运算中途夭折。非线性代数方程组的求解是极其复杂的困难问题,很可能需要综合多种方法的长处,根据具体遇到的问题灵活采取对策,才能得到满意的解决方案。

作为多项式方程组消元的一种探索,本文提出准线性变换法,用该方法探讨了参数曲面逆映射问题,同时得到参数曲面的隐式方程;所提出的准线性消元法可应用于涉及非线性方程组求解几何定理证明、计算机辅助设计、机器人正逆解等问题。

## 2 基于准线性变换消元法

### 2.1 基于准线性变换消元法的基本思想

对于一般多项式方程组 PS(原方程组)的求解,总是力图将其转化为与之同解的三角型方程组 TS,用什么方法达到这一目的是问题的关键,也是各种不同消元法的主要原则。

基于准线性变换消元法的基本思想是:从给定的原方程组 PS 构造出一个具有足够多个方程的导出方程组 DPS;再将原方程组 PS 与导出方程组 DPS 联立为{PS+DPS},视{PS+DPS}为诸未知变元不同幂积组成的线性方程组。对之施行不带分式的高斯消元法,从而得到一个阶梯形方程组。一般地总能从这一阶梯形方程组中选取符合要求的三角型方程组 TS,再判定 TS 是否含有 PS 的增根。期望两者同解,否则需排除增根。

由描述的基本思想可知,该法有几个关键点:

(1)如何构造 DPS?

(2)构造多少个导出方程?且构造 DPS 的方法能否构造这么多方程?

(3)如何判定 TS 是否含有增根?

(4)如何使 TS 与 PS 同解,即 Zero(PS)=Zero(TS)。

### 2.2 基本原理

#### 2.2.1 构造导出方程组的主要方法

(1)乘幂积项法

**基金项目**:国家重点基础研究发展规划(973)(the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2006CB504801);国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60521002)。
**作者简介**:王彦(1971-),女,讲师,博士研究生,研究方向为:计算机图形,图像处理;马利庄,男,教授,博士生导师;杭鲁滨,男,副教授,研究生导师;褚娜,女,博士研究生,研究方向:人工智能,计算机图形学。

对原方程组乘以由其变元组成的幂积项(诸如:$x,y,xy,x^2,y^2,x^2y,\cdots$),以扩展出多个线性无关方程,即所谓的导出方程组DPS。特别应使保留变元(即不重要的变元)的次数逐渐升高,而其他变元的方次尽量较低。理论上讲,乘幂积项法构造导出方程组可以无限制进行下去,但应考虑到TS与PS同解的需求以及计算效率问题。

(2)Dixon 方法

(3)Groebner 法

Groebner 基法中主幂乘积不同的两种多项式生成的S-多项式,亦可视为构造DPS的方法。

(4)吴氏消元法

吴氏消元法中,原方程组PS对基列求余得到的各级余式,亦可视为构造DPS的方法。对上述构造DPS方程的诸方法,经常要综合使用,才能高效地得到与原方程组同解的三角型方程TS。

### 2.2.2 构造DPS的终止判据

设原方程组(PS)与导出方程组(DPS)构成联立方程组{PS+DPS},其含有方程数为$N$。联立方程组{PS+DPS}的总幂积项数为$M$。

当$\{N=M\}_{\min}$则构造导出方程组终止。

式中,$\{N=M\}_{\min}$表示构造DPS过程中以最小的$N$与$M$为准。因无限制构造下去会出现$N=M$。

### 2.2.3 TS含有增根判据

对已满足上式的联立方程组{PS+DPS}进行不带分式的高斯消元,一般可构造出一个三角型方程组TS,且其各主项系数为不为零常数。

若PS对TS的余式集合RS为空集($RS=\{\emptyset\}$),则$Zero(PS)=Zero(TS)$。即PS 与TS同解,TS不含增根。

若$RS\neq\{\emptyset\}$,则$Zero(PS)\subset Zero(TS)$,即TS含有增根,表明构造DPS数目过多或不适当,且含纯保留变元的次数过高。应该改进构造的DPS。

由此可知,构造DPS应以含纯保留变元的次数最低,且满足$\{N=M\}_{\min}$的目标去构造。

## 2.3 求解的主要步骤

(1)对原方程组PS预处理。包括未知变元的排序;对原方程组进行线性消元,使其各式的主幂积项不同。

(2)构造导出方程组DPS

构造方法应视原方程组的结构特点,并联合运用前节所述四种方法实现之。

(3)对已满足$\{N=M\}_{\min}$的联立方程组{PS+DPS}进行不带分式的高斯消元法(LU分解),得到阶梯形(或三角型)方程组。

(4)选取完整三角型方程组TS,即含有所有变元,且各式主项皆为非零常数的三角型方程组TS。

(5)判定TS是否含有PS的增根:

若$Remd(PS/TS)=RS=\{\emptyset\}$,则$Zero(PS)=Zero(TS)$;

若$Remd(PS/TS)=RS\neq\{\emptyset\}$,则$Zero(PS)\subset Zero(TS)$;

当$RS\neq\{\emptyset\}$时,应重新构造DPS。

# 3 算例

**例1** 原方程组为:

$$\begin{cases} equ1=x^2y^2+3x^2y+3xy^2+2x^2+9xy+2y^2+6x+6y+4=0 \\ equ2=x^2y^2+7x^2y+7xy^2+12x^2+49xy+12y^2+84x+84y+144=0 \\ equ3=x^2y^2+13x^2y+6xy^2+42x^2+78xy+5y^2+252x+65y+210=0 \end{cases}$$

导出方程组为原方程组分别乘以$x,y,xy,x^2,y^2,x^2y,xy^2$七项得到21个导出方程与原始方程组构成24个方程。变元为24个不同幂项:

$[x^4y^3,x^3y^4,x^4y^2,x^3y^3,x^2y^4,x^4y,x^3y^2,x^2y^3,xy^4,x^4,x^3y,x^2y^2,xy^3,y^4,x^3,x^2y,xy^2,y^3,x^2,xy,y^2,x,y,1]$

将原方程组和导出方程写成矩阵形式:

$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{X}=0$

式中:

$\boldsymbol{X}=[x^4y^3,x^3y^4,x^4y^2,x^3y^3,x^2y^4,x^4y,x^3y^2,x^2y^3,xy^4,x^4,x^3y,x^2y^2,xy^3,y^4,x^3,x^2y,xy^2,y^3,x^2,xy,y^2,x,y,1]^{\mathrm{T}}$

本例$\boldsymbol{D}$矩阵的阶为24,秩为22,方程组为2解:

$\{x=-1,y=-4\},\{x=-1,y=-3\}$

**例2** 给定参数曲面

$$(x,y,z)=\left(\frac{s^2t-t-s^2-1}{s^2+s^2t},\frac{s^2t-t+s}{s^2+s^2t},\frac{2s^2t-2t-2}{s^2+s^2t}\right),$$

计算其逆映射。

这个参数曲面可用多项式方程组表示为:

$$\begin{cases} p_1(s,t)=(s^2+s^2t)x-s^2t+t+s^2+1=0 \\ p_2(s,t)=(s^2+s^2t)y-s^2t-s+t=0 \\ p_3(s,t)=(s^2+s^2t)z-2s^2t-2t+2=0 \end{cases}$$

要求用$x,y,z$来表示$s,t$。

将原方程组分别乘以$s,t,st$三项得到9个导出方程,导出方程组与原始方程组构成含12方程的联立方程组,其变元12个不同幂积项 $\{s^3t^2,s^3t,s^2t^2,s^3,s^2t,st^2,s^2,st,s,t^2,t,1\}$ 可视为$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,将联立方程组写成矩阵形式为:

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{X}=0 \tag{1}$$

式中

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&x-1&0&x+1&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&y-1&0&y&0&0&-1&1&0 \\ 0&0&0&0&z&0&z-2&0&0&0&2&2 \\ 0&x-1&0&x+1&0&0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&y-1&0&y&0&0&-1&1&0&0&0&0 \\ 0&z&0&z-2&0&0&0&2&0&2&0&0 \\ 0&0&x-1&0&x+1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&y-1&0&y&0&0&-1&1&0&0&0 \\ 0&0&z&0&z-2&0&0&0&2&0&2&0 \\ x-1&x+1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0 \\ y-1&y&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0 \\ z&z-2&0&0&0&2&0&2&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

对$\boldsymbol{D}$矩阵进行LU分解得到上三角矩阵为:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} k_{11}&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots \\ \vdots&&&&\vdots \\ 0&0&k_{n-2,n-2}&k_{n-2,n-1}&k_{n-2,n} \\ \cdots&\cdots&\cdots&k_{n-2,n-1}&k_{n-2,n-1} \\ 0&0&0&0&k_{nn} \end{bmatrix}$$

如不是矛盾方程组,显然应有

$$det(\boldsymbol{D})=0 \tag{2}$$

并有方程组:

(下转6页)