

# 基于退火的蚁群算法在连续空间优化中的应用

李向丽, 杨慧中, 魏丽霞

LI Xiang-li, YANG Hui-zhong, WEI Li-xia

江南大学 控制科学与工程研究中心, 江苏 无锡 214122

Research Center of Control Science and Control Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi, Jiangsu 214122, China

E-mail: lixianglilxl@yahoo.com.cn

**LI Xiang-li, YANG Hui-zhong, WEI Li-xia. Application of ant colony algorithm based on simulated annealing to continuous space optimization. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(23): 74-76.**

**Abstract:** An ant colony algorithm applied to continuous problems is proposed. This algorithm is defined by modifying both the "trail remaining" and the transfer rules. Based on the processes that ants exchange information through antennas, a novel study strategy "direct communication" is presented, which enhances the ants' ability to search the continuous space. In the meantime, a strategy of simulated annealing is embedded in the algorithm to improve the optimization performance and prevent "premature" phenomena during the local searching. In order to avoid the large residual information, the new information increment function is applied. Experimental results show that the proposed algorithm is effective.

**Key words:** ant colony algorithm; continuous space optimization; study strategy; simulated annealing

**摘要:**研究了蚁群算法在连续空间的函数寻优问题。通过修改蚂蚁信息素的留存方式和行走规则,定义了一个连续空间的蚁群算法。模拟蚂蚁用触角交流信息的过程提出了直接通信的学习机制,增强了蚂蚁的搜索能力。为了防止出现“早熟”现象,在局部搜索过程中嵌入了模拟退火的思想。同时为避免过大的残留信息,选择了新的信息增量计算函数。实例运算证明了算法的有效性。

**关键词:**蚁群算法;连续空间寻优;学习机制;模拟退火

文章编号:1002-8331(2007)23-0074-03 文献标识码:A 中图分类号:TP301.6

## 1 引言

蚁群算法是模拟自然界中蚂蚁寻找从巢穴到食物源的最短路径而形成的一种模拟进化算法<sup>[1]</sup>。它是一种全局性邻域搜索算法,具有分布式计算、信息正反馈和启发式搜索的特征,易于与其他方法相结合。该算法得到了具有 NP 难度的旅行商问题<sup>[2]</sup>的最优解,同时还被应用于求解 Job-shop 调度问题、二次指派问题等,表现出良好的性能。

但是,目前将蚁群算法引入连续空间的寻优还有一些问题有待解决:(1)蚁群信息量的留存方式问题。在基本蚁群算法中,残留信息的存储是有限的。在连续空间中,要将残留信息的存储与蚂蚁路径联系起来是不现实的。(2)蚁群在解空间中的寻优方式和行进策略问题。在基本蚁群算法中,选择概率是基于离散和有限的情况。同样的概率函数应用于连续空间是不可能的。所以在连续空间中,如何使每一个蚂蚁根据残留的信息选择下一步移动,或者说构造连续选择概率也是要解决的一个问题。

解决上述问题目前有两种比较有效的算法。一种是将传统蚁群算法中的“信息量留存”过程拓展为连续空间中的“信息量

分布函数”,并定义相应的求解算法<sup>[3]</sup>。另一种算法改进了信息素的存留方式,并在局部搜索过程中嵌入确定性搜索,以改善寻优性能<sup>[4]</sup>。但是上述算法仍然存在搜索能力不强,易陷入局部最优的缺点。本文根据连续空间的特点对基本蚁群模型在信息素的留存方式和行走规则上进行了改进和扩展,并模拟蚂蚁用触角交流信息的方式提出了直接通信的学习机制,增强了蚂蚁的搜索能力。为了克服搜索时间长和易于停滞的问题,在局部搜索过程中嵌入了模拟退火的思想。提出了基于模拟退火的蚁群优化算法(Ant Colony Optimization algorithm based on the Simulated Annealing theory)简称为 ACOSA。同时为避免过大的残留信息导致过大的信息移动增量,本文选择了新的信息增量计算函数。新函数能够保证蚂蚁的移动产生正确的正反馈,并使残留信息增量的值为 1 左右。

## 2 基本蚁群优化算法(AS 算法)

以  $n$  个城市的 TSP 问题为例对 AS 算法<sup>[5]</sup>进行简要介绍。首先作如下定义: $d_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) 表示城市  $i$  和城市  $j$  之间的距离,  $\tau_{ij}(t)$  表示  $t$  时刻在城市  $i, j$  连线上残留的信息量。用参数

**基金项目:**国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60674092);江苏省高新技术研究项目(the High-Tech Research Program of Jiangsu Province of China under Grant No.BG2006010)。

**作者简介:**李向丽(1978-),女,硕士研究生,主要研究方向为数据挖掘和智能控制;杨慧中,女,教授,博士生导师,主要从事复杂系统的建模与控制研究。

$\rho(0 \leq \rho < 1)$  表示信息的持久性, 蚂蚁完成一次循环以后各路径上的信息量要根据式(1)作调整:

$$\tau_{ij}(t+n) = \rho\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij} \quad (1)$$

$$\Delta\tau_{ij} = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k \quad (2)$$

其中,  $\Delta\tau_{ij}^k$  表示本次循环中路径  $ij$  上的信息量的增量,  $\Delta\tau_{ij}^k$  表示第  $k$  只蚂蚁在本次循环中留在路径  $ij$  上的信息量, 它由式(3)表示:

$$\Delta\tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{当蚂蚁 } k \text{ 走过城市 } ij \text{ 时} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $Q$  为常数,  $L_k$  表示第  $k$  只蚂蚁在本次循环中所走过路径的长度。

设  $\eta_{ij}$  为边路径  $(i, j)$  的能见度, 一般取为  $1/d_{ij}$ , 路径能见度的相对重要性为  $\beta(\beta \geq 0)$ , 路径轨迹的相对重要性为  $\alpha(\alpha \geq 0)$ 。运动过程中, 根据各条路径上的信息量决定转移方向。 $p_{ij}^k(t)$  表示在  $t$  时刻蚂蚁  $k$  由城市  $i$  转移到城市  $j$  的概率:

$$p_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t)}{\sum_{r \in \text{tabu}_k} \tau_{ir}^\alpha(t) \eta_{ir}^\beta(t)} & \text{if } j \notin \text{tabu}_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

### 3 连续空间蚁群算法的构造(ACOSA 模型)

#### 3.1 初始分布及信息素的初始化

首先根据问题定义域的大小确定蚁群的规模。本文采用均匀分布。假设对于二维系统, 使用蚁群规模为  $m=N^2$  个, 即以  $N$  个蚂蚁为一组, 分别在  $x$  轴和  $y$  轴方向上作均匀分布。每只蚂蚁带有一个随自己坐标位置变化的移动子区间, 局部搜索时蚂蚁在自己的子区间内移动。完成局部搜索后, 每只蚂蚁根据信息素强度和启发式函数进行全局搜索。完成一次循环后, 则进行信息素强度的更新计算。

根据蚂蚁当前的位置分布情况及寻优问题类别的不同, 可以确定蚂蚁在  $i$  处初始信息素的大小。

$$\tau_i(0) = k \cdot a^{-f(x_i)} \quad (5)$$

其中  $a, k$  为大于 0 的常数。若为最小值寻优问题, 取  $a > 1$ , 这样目标函数值  $f(x_i)$  越小, 则  $x_i$  所在的位置留下的信息素就越多; 对于最大值优化问题, 取  $0 < a < 1$ , 目标函数值  $f(x_i)$  越大, 则  $x_i$  所在的位置留下的信息素越多。为了避免初始信息素值过大,  $a, k$  的选择应根据函数值的情况而定。

以一个最大值寻优问题为例来说明 ACOSA 算法。对于无约束的  $n$  维优化问题, 设其目标函数为:  $\text{Max } Z=f(x)$ 。

#### 3.2 局部搜索

为了防止算法过早收敛于非最优解, 本文在局部搜索中嵌入了模拟退火的思想。模拟退火算法<sup>[6]</sup>是从一给定解开始, 在邻域中随机产生另一个解, 接受准则允许目标函数在有限范围内变坏, 以一定条件接受新的解。

在局部搜索中嵌入基本模拟退火思想的蚁群算法(ACOSA1): 设新的位置点为  $x'$ , 以概率式(6)的方式接受该新解为当前最优解。为了加快搜索速度, 邻域范围随着迭代次数的增加而减少。由  $x$  转移到  $x'$  的概率<sup>[6]</sup>:

$$P(x \rightarrow x') = \begin{cases} 1 & f(x') \geq f(x) \\ \exp\left(\frac{f(x) - f(x')}{t}\right) & f(x') < f(x) \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $t$  为控制参数。在控制参数  $t$  趋于 0 时, 最终求得每个蚂蚁在自己邻域内的最优解。

但是随着温度的降低, 接受概率变得很小, 算法的收敛速度也就变得很慢。这就使整个蚁群算法的时间代价过大(下文表 1 中的仿真结果也说明了这一问题), 所以本文对基本模拟退火公式进行了改进, 提出了 ACOSA2 算法。

ACOSA2 算法: 设新的位置点为  $x'$ , 按式(7)的方式接受该新解为当前最优解。

$$P(x \rightarrow x') = \begin{cases} 1 & f(x') - f(x) > -\varepsilon \\ 0 & f(x') - f(x) \leq -\varepsilon \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $\varepsilon$  为允许目标函数变坏的范围, 可以根据实际情况确定。一般可以取  $\varepsilon = (0.2 \sim 0.4) \cdot f(x)$ 。

#### 3.3 全局搜索

在每只蚂蚁都经过一次局部搜索后, 所有的蚂蚁进行全局搜索。本算法在一次循环后找出上次循环中的最优解, 获得最好解的蚂蚁(设为  $j$ )在一个确定的邻域内按照局部搜索规则进行搜索, 以便找到更好的解。而在上一次循环中没有找到最好解的蚂蚁则按照规则(8)进行全局搜索<sup>[4]</sup>。

$$j = \begin{cases} \text{选择信息素值最大的城市} & f(x_i) < f_{avg} \cap q < q_0 \\ S & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $0 < q_0 < 1$ , 是初始设定的参数,  $q$  是一个随机数,  $q \in [0, 1]$ ,  $f_{avg}$  为  $m$  只蚂蚁的目标函数平均值,  $p_{ij}^k$  表示蚂蚁  $k$  由城市  $i$  转移到城市  $j$  的概率。S 按转移规则(9)选择动作如下:

$$p_{ij}^k = \begin{cases} \frac{[\tau(j)]^\alpha e^{-\beta d_{ij}}}{\sum [\tau(j)]^\alpha e^{-\beta d_{ij}}} & (d_{ij} < 0 \cap i \neq j) \cup (d_{ij} = 0 \cap i = j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $d_{ij} = f(x_i) - f(x_j)$ , 系数  $\alpha, \beta$  分别表明了节点上的信息量受重视程度和启发式信息受重视的程度。式(9)保证了第  $i$  只蚂蚁按概率向其他目标函数值更大的蚂蚁  $j$  的邻域移动, 或者选择停留在原地。

#### 3.4 信息素强度更新规则

全局搜索后, 要对信息素强度进行更新。如果有  $n$  只蚂蚁向蚂蚁  $j$  处移动, 则  $j$  的更新规则为:

$$\tau(j) = \rho\tau(j) + \sum_{k=1}^n \Delta\tau_k \quad (10)$$

其中,  $\Delta\tau_k \propto 1/f(x_k)$ , 这样才能使算法通过残留信息对蚂蚁施加正确的正反馈。同时为避免过大的残留信息导致过大的信息移动增量, 最好将残留信息的增量取值在 1 左右。因此, 本文取式(11)作为信息增量计算函数:

$$\Delta\tau_k = \frac{C_f - f(x_k)}{10C_f} + 1 \quad (11)$$

其中,  $0 < \rho < 1$  表示信息持久性。  $C_f$  为优化域内目标函数的一个上界值。这样, 可以保证残留信息增量的值为 1 左右, 同时又能对蚂蚁的移动产生正确的正反馈。

为了增强蚂蚁的搜索能力, 文中除了让全局或者局部最优蚂蚁  $j$  得到信息素更新, 也让其他的蚂蚁通过直接通信学习机制有机会得到信息素更新。直接通信学习机制是模拟真实的蚂

蚁王国中,蚂蚁利用彼此的触角进行信息交流的过程。直接通信学习机制的信息更新规则:

$$\tau(i)=\rho\tau(i)+\eta\tau(j) \quad (12)$$

其中,蚂蚁  $i(i \neq j)$  是随机选择的。每次全局搜索后除了获得最优解的蚂蚁  $j$  外,仅有一个随机选择的蚂蚁  $i$  有机会进行信息素更新。 $\eta(0 < \eta < 1)$  是学习系数,表示蚂蚁  $i$  向最优蚂蚁  $j$  学习的能力。 $0 < \rho < 1$  表示信息的持久性。

#### 4 实例运算及性能分析

为了考察算法的性能,本文进行了实例运算。以下列考核函数为例来进行性能分析运算,在没有特别说明的情况下选取如下的操作参数: $m=100, q_0=0.2, \alpha=1, \beta=0.7, \rho=0.7, \eta=0.5, T=8, a=0.85, k=5, \varepsilon=0.4f(x)$ 。由于蚁群算法为随机优化算法,对函数进行 10 次优化,每次优化 1 000 步,以 10 次优化的平均值来考察优化效果。

##### (1) 函数 1

$$F=20\exp(-0.2\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^2x_j^2})+\exp(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^2\cos(2\pi x_j))-22.71828$$

该函数称为 Ackley 函数,是一个经典测试函数,它在一个几乎平坦的区域内由余弦波调制成一系列峰或谷,使曲面起伏不平。其精确最优解为  $(x_1, x_2)=(0, 0)$  处的最大值  $F(x_1, x_2)=0$ , 将函数的优化域限定在  $[-10, 10]$ 。

##### (2) 函数 2

$$z=\exp\left(-\frac{|x|+|y|}{50}\right)\cos(|x|+|y|)$$

该函数为一典型的多峰值二元函数,在  $(x, y)=(0, 0)$  处取得全局最优值 1,随着坐标点偏离原点,其值呈现多个局部极大值。在运算过程中,将函数的优化域限定在  $[-50, 50]$ 。

##### (3) 函数 3

$$R=\sqrt{(x-50)^2+(y-50)^2}+e \quad z=\frac{\sin(R)}{R}+1$$

该函数在点  $(x, y)=(50, 50)$  处取得全局最优值 1.151 2, 其他局部最优值呈圆形向外分布,是一个极不容易找到全局最优点的多峰值函数。在运行过程中,将函数的优化域限定在  $[-100, 100]$ 。

将本文提出的 ACOSA 算法与文献[4]中提到的嵌入确定性搜索的蚁群算法进行比较,比较结果列在表 1 中。从表 1 中可以看出 ACOSA1 在精确度上有一定的优势,但是收敛的速度

比较慢。原因可能是随着温度的降低,接受概率变得很小,算法的收敛速度也就变得很慢。ACOSA2 是一种比较有效的算法,在精度上和收敛速度上都有较优越的表现。

表 1 优化结果的比较

函数	算法	最优值	平均最优值	平均迭代步数
函数 1	ACOSA1	-0.001 021	-0.001 057	427
	ACOSA2	-0.001 024	-0.001 125	208
	文献[4]算法	-0.001 044	-0.001 177	236
函数 2	ACOSA1	1.000 000	0.999 968	429
	ACOSA2	1.000 000	0.999 941	298
	文献[4]算法	0.999 990	0.999 827	314
函数 3	ACOSA1	1.150 30	1.139 83	413
	ACOSA2	1.146 10	1.140 86	326
	文献[4]算法	1.145 10	1.139 73	342

注:平均迭代步数是指算法停滞时最小迭代步数的平均值

#### 5 结论

本文将蚁群算法经过改进后引入到连续空间的函数寻优中。为了克服搜索时间长和易于停滞的问题,在局部搜索过程中嵌入了模拟退火的思想。并在信息素的更新规则中加入了直接通信的学习机制。将改进后的算法用于多值连续函数寻优。仿真结果表明该方法是有效的。但是,随着定义域的增大,蚁群数目会随之增大而影响搜索的速度。

(收稿日期:2007 年 1 月)

#### 参考文献:

- [1] Dorigo M, Maniezzo V, Colomi A. Ant system: optimization by a colony cooperating agents[J]. IEEE Trans on Systems Man and Cybernetics Part B: Cybernetics, 1996, 26(1): 29-41.
- [2] Gambardella L M, Dorigo M. Solving symmetric and asymmetric TSPs by ant colonies[C]// Proc IEEE Int Conf Evolutionary Computation, 1996: 622-627.
- [3] 汪镭, 吴启迪. 蚁群算法在连续空间寻优问题求解中的应用[J]. 控制与决策, 2003, 18(1): 45-48.
- [4] 杨勇, 宋晓峰, 王建飞, 等. 蚁群算法求解连续空间优化问题[J]. 控制与决策, 2003, 18(5): 573-576.
- [5] Dorigo M, Caro G D. Ant colony optimization: a new meta-heuristic[C]// Proc of the 1999 Congress on Evolutionary Computation. Washington: IEEE Press, 1999: 1470-1477.
- [6] 张影, 刘艳秋. 软计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [7] Xu Qing, Chang Ge, Yang Li. The algorithm of TIN generation based on selfadapt clump organization[J]. Journal of Image and Graphics, 2000, 5A(6): 461-465.
- [8] Macedonio G, Pareschi M T. An algorithm for the triangulation of arbitrarily distributed points: applications to volume estimate and terrain fitting[J]. Computers & Geosciences, 1991, 17: 859-874.
- [9] Wang Lian-he, Dong Jiang. An efficient method for Delaunay triangulation[J]. Hydrographic Surveying and Charting, 2005, 3: 48-51.
- [10] Jia Xiao-lin, Wu Li-xin, Wang Yan-bing. Two dimensional local updating for Delaunay TIN: point insertion and point deletion[J]. Geography and Geo-Information Science, 2004, 20(5): 28-32.

(上接 71 页)

data to TIN model and visualization[J]. Computer Engineering and Applications, 2005, 2: 187-190.

- [4] Guo Zhao-sheng, Zhang Deng-rong. An improved high-efficiency algorithm of Delaunay triangulation generation[J]. Remote Sensing Information, 2005, 1: 15-17.
- [5] Liu Li-na, Xu Yun, Jia Jin-dong, et al. The Delaunay triangulation and visualization of discrete points forming simple polygon[J]. Science of Surveying and Mapping, 2005, 3: 86-88.
- [6] Shao Chun-li, Hu Peng, Huang Cheng-yi, et al. The expatiation of Delaunay algorithms and a promising direction in application[J]. Science of Surveying and Mapping, 2004, 28(6): 68-71.