

# 基于小波阈值去噪算法的研究

张 莲, 秦华峰, 余成波

ZHANG Lian, QIN Hua-feng, YU Cheng-bo

重庆工学院 远程测试与控制技术研究所, 重庆 400050

Remote Testing and Control Technology Research Institute, Chongqing Institute of Technology, Chongqing 400050, China

E-mail: zh\_lian@cqit.edu.cn

ZHANG Lian, QIN Hua-feng, YU Cheng-bo. Reseach of denoising method based on wavelet threshold. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(9): 172-173.

**Abstract:** Based on the multi-analysis wavelet threshold denoising method which is put forward by D.L.Dohono and I.M.Johnstone, this paper puts forward a new threshold function. The new threshold function has many advantages over the classical soft or hard threshold function. It is clear in physics meaning and simple in expression. The results show that this improved method is effective in removing white noise, gives better RMSE performance and SNR gains than the soft or hard threshold methods, makes it possible to embody the advantages of the wavelet threshold denoising method more fully.

**Key words:** wavelet transform; hard-threshold denoising; soft-threshold denoising; threshold function

**摘 要:** 在 D.L.Dohono 和 I.M.Johnstone 提出的多分辨分析小波阈值去噪方法的基础上, 提出了一种新的阈值函数。与传统的硬阈值和软阈值比, 该函数不仅易于计算, 而且具有优越的数学特性和清晰的物理意义。实验结果表明, 该方法可以有效地去除白噪声干扰, 无论在视觉效果上还是在信噪比和均方误差定量指标上均明显优于常用的软、硬阈值及改进的软硬阈值折中算法, 充分体现小波阈值去噪方法的优越性。

**关键词:** 小波变换; 硬阈值去噪; 软阈值去噪; 阈值函数

**文章编号:** 1002-8331(2008)09-0172-02 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP911.7

## 1 引言

由于现实的信号中都含有噪声信号, 为了后续更高层次的处理, 很有必要对该信号进行去噪处理。1994 年, D.L.Donoho 和 I.M.Johnstone 在小波变换的基础上提出了小波阈值去噪的概念, 此后该方法在去噪方面得到了广泛的应用<sup>[1]</sup>。阈值函数关系着重构信号的连续性和精度, 对小波去噪的效果有很大影响。目前, 阈值的选择分硬阈值和软阈值两种处理方式。其中, 软阈值处理是将信号的绝对值与阈值进行比较, 当数据的绝对值小于或等于阈值时, 令其为零; 大于阈值的数据点则向零收缩, 变为该点值与阈值之差。而硬阈值处理是将信号的绝对值与阈值进行比较, 小于或等于阈值的点变为零, 大于阈值的点不变。但硬阈值函数的不连续性使消噪后的信号仍然含有明显的噪声; 采用软阈值方法虽然连续性好, 但估计小波系数与含噪信号的小波系数之间存在恒定的偏差, 当噪声信号很不规则时显得过于光滑。为了克服这些缺点, 本文提出了一种新的阈值函数, 对充分发挥小波阈值去噪方法具有较重要的理论意义和应用价值。

## 2 信号的多尺度小波分解与重建<sup>[2-5]</sup>

设含有噪声信号为:

$$f(t) = s(t) + n(t) \quad (1)$$

其中  $s(t)$  为原始信号,  $n(t)$  为方差  $\sigma^2$  的 Gaussian 白噪声, 服从  $N(0, \sigma^2)$ 。

对一维连续信号进行离散采样, 得到  $N$  点离散信号  $f(n)$  ( $n=0, 1, \dots, N-1$ ), 其小波变换为

$$Wf(j, k) = 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \psi(2^j n - k) \quad (2)$$

式中,  $Wf(j, k)$  为小波系数, 在实际应用中, 用 Mallat 算法来实现小波变换。

$$Sf(j+i, k) = Sf(j, k) * h(j, k) \quad (3)$$

$$Wf(j+i, k) = Wf(j, k) * g(j, k)$$

其中  $h$  和  $g$  分别是尺度函数  $\varphi(x)$  和小波函数  $\psi(x)$  对应的低通和高通滤波器,  $Sf(0, k)$  为原始信号  $f(k)$ ,  $Sf(j, k)$  为尺度系数,  $Wf(j, k)$  为小波系数。相应地, 重构公式为

$$Sf(j-1, k) = Sf(j, k) * \tilde{h}(j, k) + Wf(j, k) * \tilde{g}(j, k) \quad (4)$$

为方便分析, 简记小波系数  $Wf(j, k)$  为  $w_{j,k}$ 。由小波变换的

**基金项目:** 重庆市自然科学基金(the Natural Science Foundation of Chongqing City of China under Grant No.CSTC2007BA2023); 重庆市教育委员会科学技术研究项目(No.KJ060613)。

**作者简介:** 张莲(1967-), 女(汉族), 副教授, 研究方向为信号与信息处理技术、检测与控制技术。

**收稿日期:** 2007-07-10 **修回日期:** 2007-10-09

线性性质可得,  $f(t)=s(t)+n(t)$  的离散采样信号  $f(k)=s(k)+n(k)$  经小波变换后, 其小波系数  $w_{j,k}$  仍由两部分组成。其中, 一部分是信号  $s(k)$  对应的小波系数  $W_s(j,k)$ , 记为  $u_{j,k}$ , 另一部分是噪声  $n(k)$  对应的小波系数  $W_n(j,k)$ , 记为  $v_{j,k}$ 。

### 3 小波阈值去噪

Donoho 提出的小波阈值去噪方法<sup>[6]</sup>的基本思想是当  $w_{j,k}$  小于某个临界阈值时, 认为这时的小波系数主要是由噪声引起的, 予以舍弃。当  $w_{j,k}$  大于这个临界阈值时, 认为这时的小波系数主要是由信号引起, 那么就把这一部分的  $w_{j,k}$  直接保留下来(硬阈值方法), 或者按某一个固定量向零收缩(软阈值方法), 然后用新的小波系数进行小波重构, 得到去噪后的信号。此方法可通过以下三个步骤实现。

(1) 对含噪信号  $f(k)$  作小波变换, 得到一组小波系数  $w_{j,k}$ 。

(2) 通过对  $w_{j,k}$  进行阈值处理, 得出估计小波系数  $\hat{w}_{j,k}$ , 使得  $\|\hat{w}_{j,k}-u_{j,k}\|$  尽量小。

(3) 利用  $\hat{w}_{j,k}$  进行小波重构, 得到估计信号  $\hat{f}(k)$ , 即为去噪后的信号。

则硬阈值函数(Hard Threshold Function)为

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k}, & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (5)$$

而软阈值函数(Soft threshold function)为

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(w_{j,k})(|w_{j,k}| - \lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (6)$$

其中, 式(5)、式(6)中  $\lambda$  为预置阈值或门限值, 取  $\sigma\sqrt{2\ln N}$ 。式(6)中  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数, 即

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases} \quad (7)$$

### 4 一类新阈值函数的构建

硬、软阈值方法虽然在实际中得到了广泛的应用, 也取得了较好的效果, 但这些算法本身存在着一些缺陷<sup>[7]</sup>。在硬阈值方法中, 处理过的小波系数  $\hat{w}_{j,k}$  在  $\pm\lambda$  处是不连续的, 在信号重构时, 容易产生 Pseudo-Gibbs 现象; 而经过软阈值方法处理过的小波系数  $\hat{w}_{j,k}$  虽然整体连续性较好, 但  $\hat{w}_{j,k}$  与  $w_{j,k}$  之间总是存在着恒定的偏差, 这将直接影响重构图像与真实图像的逼近程度, 给重构图像带来不可避免的误差。但是若把这种偏差减小到零(硬阈值情况)也未必是最好的。为了克服软硬阈值方法的缺点, 将硬阈值和软阈值结合起来, 构造的一类新的阈值函数为

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} uw_{j,k} + (1-u)\text{sgn}(w_{j,k})(|w_{j,k}| - \lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (\lambda \geq 1) \quad (8)$$

其中,  $u = 1 - e^{-m(|w_{j,k}| - \lambda)^2}$  ( $m > 0$ )。所以  $0 \leq 1 - e^{-m(|w_{j,k}| - \lambda)^2} \leq 1$ , 也即是, 当  $|w_{j,k}| = \lambda$ ,  $\hat{w}_{j,k} = 0$ ; 当  $|w_{j,k}| \rightarrow \lambda$  时,  $\hat{w}_{j,k} \rightarrow 0$ , 即  $\hat{w}_{j,k}$  在  $|w_{j,k}| = \lambda$  是连续的。随着  $|w_{j,k}|$  的增大,  $\hat{w}_{j,k}$  也随之逐渐增大, 当  $|w_{j,k}| \rightarrow \infty$  时,  $|w_{j,k}| \rightarrow w_{j,k}$  而且, 当  $m \rightarrow 0$  时, 即为软阈值函数, 当  $m \rightarrow \infty$  时, 为硬阈值函数。只要适当地调整  $m$  的大小, 就可以获得更好的去噪效果。可见, 新阈值函数不仅是介于软、硬阈值函数之间的一个灵活选择, 而且它的物理意义非常明显。由于它具有软阈值函数

的连续性,  $\hat{w}_{j,k}$  与  $w_{j,k}$  的差值也不是恒定的, 且  $\hat{w}_{j,k}$  随着  $|w_{j,k}|$  的增大逐渐接近  $w_{j,k}$ , 所以更接近于图像信号和噪声的小波系数的物理本质, 其去噪效果优于软、硬阈值。因此与传统的硬、软阈值函数相比, 新阈值函数具有明显的优势和广阔的应用前景。

### 5 实验与分析

为了说明新阈值函数在去噪算法中的有效性和优越性, 分别采用传统的硬、软阈值函数及折中算法和新阈值函数进行了去噪试验, 然后比较其结果。现在对 Matlab 工具箱中的典型信号含高斯噪声 Heavisine 信号和 doppler 信号, 分别用传统的软、硬阈值函数及折中算法和新阈值函数进行去噪对比实验。在进行小波分解时, 最大分解尺度  $J$  取为 3, 阈值  $\lambda = \sigma\sqrt{2\log(N)}$ , 其中  $\sigma^2$  为噪声方差,  $N$  为离散信号的采样长度。测试数据如表 1 所示, Heavisine 信号的去噪对比图如图 1 所示。

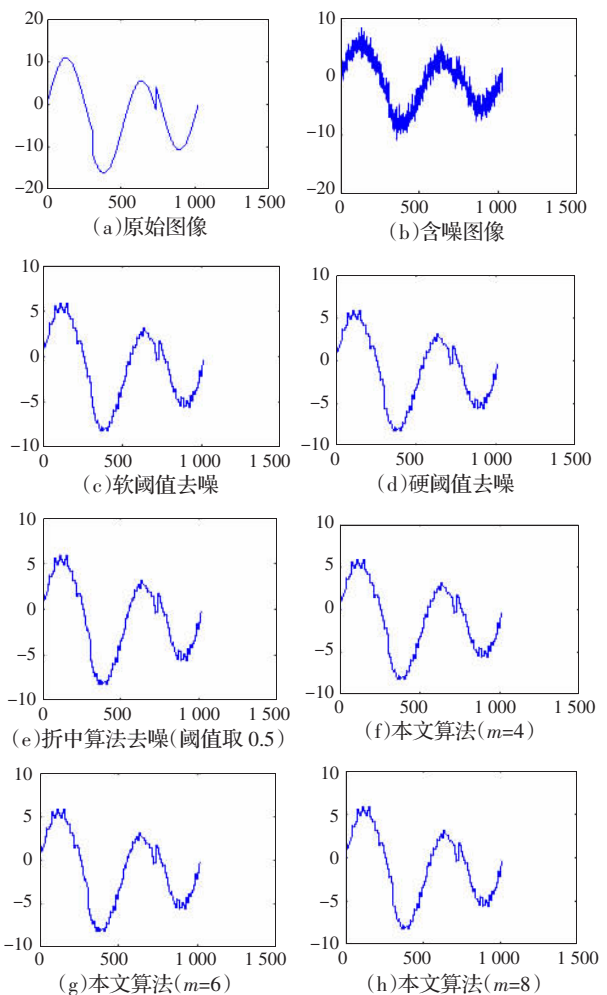


图 1 Heavisine 信号的几种方法去噪结果比较

从测试结果可以看出所提出的算法的去噪结果无论是从 SNR 和 RMSE, 还是在视觉效果上, 均优于传统的软、硬阈值及改进的折中算法。从表 1 可以看出,  $m$  对去噪的数据指标并不很敏感, 很容易选取, 在实际使用中, 选 6~8 左右即可。

### 6 结论

本文提出了一种新的阈值函数, 与传统的软阈值函数和硬

(下转 199 页)