欧氏范数的 Vague 多目标决策

陈蓉素
CHEN Rong-su

宁波工程学院 网络与信息中心,浙江 宁波 315016
Center of Network and Information,Ningbo University of Technology,Ningbo,Zhejiang 315016,China
E-mail:crs1225@163.com

CHEN Rong-su.Multi-objective Vague decision making based on Euclid norm.Computer Engineering and Applications,2008,44(36):219-220.

Abstract: In Vague multi-objective decision-making research,the Euclid norm is introduced and the weighted vector is proposed. Best choice is obtained by calculating and comparing geometric errors between each candidate plan and the ideal plan.An example shows that the proposed method is effective and feasible.
Key words: Vague sets;Euclid norm;multi-objective decision making

摘 要:在 Vague 多目标决策的研究中,引入欧氏范数,建立加权向量概念,通过计算和比较各候选方案与理想方案间的几何偏差来确定最优方案。算例验证了该方法的有效性和可行性。
关键词: Vague 集;欧氏范数;多目标决策
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2008.36.063 **文章编号:**1002-8331(2008)36-0219-02 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP18

1 引言

自从 Zadeh 在 1965 年提出模糊集理论[1]以来,模糊集理论得到了不断发展和完善,并在许多领域中得到广泛的应用。但在实际应用中也发现它存在一些问题。例如,模糊集的隶属度是一个单值,它不能同时表示支持和反对的证据,即该单值没有告知更多的信息。为了解决模糊集无法表示和处理这类具有模糊信息和数据的问题,Gau 和 Buehrer 于 1993 年提出了 Vague 集的概念[2],在一个 Vague 集 A 中,用一个真隶属函数 $t_A(x)$和一个假隶属函数 $f_A(x)$来描述其隶属度的边界,即 $t_A(x)\leqslant u_A(x)\leqslant 1-f_A(x)$。这两个边界构成[0,1]的一个子区间$[t_A(x),1-f_A(x)]$,其中一个对象的支持度、反对度和未知度分别为 $t_A(x)$、$f_A(x)$和 $1-t_A(x)-f_A(x)$。这使得 Vague 集在处理不确定性信息时比传统的模糊集有更强的表示能力及更多的灵活性。目前 Vague 集已在决策分析、模式识别与智能信息处理等领域得到了广泛深入的研究与应用,并取得了较传统的模糊集理论更好的效果。目前,有许多专家、学者提出了多种基于 Vague 集的多目标模糊决策方法[3-5],但他们的方法都有各自的缺陷。

本文基于欧氏范数理论,从相对优值隶属度出发,通过把权重与目标值合成作为加权向量,以备选方案与理想方案的几何偏差作为选优的依据,为备选方案评价的多指标多准则有效合成提供了一种量化解决问题的方法,而且还符合人的思维习惯。

2 Vague 集理论及相关概念

设 U 是一个论域,对 U 的任一元素 x,U 中一个 Vague 集 A 用一个真隶属函数 $t_A(x)$和一个假隶属函数 $f_A(x)$表示。$t_A(x)$是从支持 x 的证据所导出的 x 的真隶属度下界,$f_A(x)$则是从反对 x 的证据所导出的 x 否定隶属度下界。$t_A(x)$和 $f_A(x)$将 U 中的每一个点与区间[0,1]中的一个实数联系起来,即 $t_A:U\rightarrow[0,1]$,$f_A:U\rightarrow[0,1]$,其中 $t_A(x)+f_A(x)\leqslant 1$。

Vague 集 A 中任一元素 x 的隶属函数被限制在[0,1]上的一个子区间$[t_A(x),1-f_A(x)]$内,称该区间为 x 在 A 中的 Vague 值。令 $\pi_A(x)=1-t_A(x)-f_A(x)$,称 $\pi_A(x)$为元素 x 相对 Vague 集 A 的 Vague 度,它刻画了元素 x 相对 Vague 集 A 的犹豫程度。显然,$0\leqslant\pi_A(x)\leqslant 1$。

设 A 为 U 中的一个 Vague 集,

当 U 是离散时,记为 $A=\sum_{i=1}^{n}[t_A(x_i),1-f_A(x_i)]\Big/x_i,x_i\in U$;

当 U 是连续时,记为 $A=\int_U[t_A(x),1-f_A(x)]\Big/x,x\in U$。

3 基于欧氏范数的 Vague 集多目标决策

多目标模糊决策问题就是要解决从一系列候选方案 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 中如何选择一个方案,使得最满足我们的要求。本文用 Vague 集来描述目标条件,在此基础上,引入加权向量及欧氏范数,并首先确定满足目标条件集的理想方案作为参考向量,再从肯定、否定两个方面求最佳方案,使最后决策结果更全面、更符合实际情况。

定义 1 设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$是候选方案集,$O=\{o_1,o_2,\cdots,o_n\}$是目标条件集。假设方案 x_i 在目标条件 O 下的特征用 Vague

作者简介:陈蓉素(1972-),女,讲师,主要研究方向:计算机应用。
收稿日期:2008-09-01 **修回日期:**2008-11-05

集表示为：

$x_i=\{(o_1,[t_{1i},1-f_{1i}]),(o_2,[t_{2i},1-f_{2i}]),\cdots,(o_n,[t_{ni},1-f_{ni}])\}$

其中 t_{ji} 表示方案 x_i 满足目标条件 o_j 的程度，f_{ji} 表示方案 x_i 不满足目标条件 o_j 的程度，且 $t_{ji},f_{ji}\in[0,1]$，$t_{ji}+f_{ji}\leqslant 1$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$。

设有 m 个候选方案 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，存在着 n 个影响方案选择的目标条件 $O=\{o_1,o_2,\cdots,o_n\}$，并设方案 x_i 满足目标条件 o_j 的真隶属函数是 $t_j(x_i)$ 及反对目标条件 o_j 的假隶属函数是 $f_j(x_i)$，则 n 个影响方案选择的关键因素的肯定目标集 $\boldsymbol{t}(x)=(t_1(x),t_2(x),\cdots,t_n(x))^{\mathrm{T}}$ 及否定目标集 $\boldsymbol{f}(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^{\mathrm{T}}$ 表示目标空间，则

$$x_i=\{(o_1,[t_1(x_i),1-f_1(x_i)]),(o_2,[t_2(x_i),1-f_2(x_i)]),\cdots,(o_n,[t_n(x_i),1-f_n(x_i)])\}$$

定义 2 设 $\boldsymbol{g}(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x))^{\mathrm{T}}$ 是 n 维空间向量，有 $\omega_k\geqslant 0,(k=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{k=1}^{n}\omega_k=1$，则称 $\boldsymbol{\omega g}(x)=(\omega_1g_1(x),\omega_2g_2(x),\cdots,\omega_ng_n(x))^{\mathrm{T}}$ 为加权向量，则加权向量 $\boldsymbol{\omega g}(x)$ 的欧氏范数为：

$$\|\boldsymbol{\omega g}(x)\|^2=\omega_1^2g_1^2(x)+\omega_2^2g_2^2(x)+\cdots+\omega_n^ng_n^n(x)$$

设某一多目标决策问题有 m 个候选方案 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，n 个目标条件 $o_1,o_2,\cdots,o_n$，相应的权重为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，且 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1$，则基于欧氏范数的 Vague 集的多目标决策进程如下：

（1）确定理想方案：$\boldsymbol{x}^t=(t_1(x),t_2(x),\cdots,t_n(x))^{\mathrm{T}}$，从肯定的方面确定用户决策的理想方案，理想值是 $\boldsymbol{x}^t=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{x}^f=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^{\mathrm{T}}$，从否定的方面确定用户决策的理想方案，理想值是 $\boldsymbol{x}^f=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$。因此，理想方案 $\boldsymbol{x}$ 的 Vague 值是 $x=\{(o_1,[1,1]),(o_2,[1,1]),\cdots,(o_n,[1,1])\}$。当然也可令如下的方案为理想方案：

$$x=\left\{\left(o_1,\bigvee_{i=1}^{m}[t_{i1},(1-f_{i1})]\right),\left(o_2,\bigvee_{i=1}^{m}[t_{i2},(1-f_{i2})]\right),\cdots,\left(o_n,\bigvee_{i=1}^{m}[t_{in},(1-f_{in})]\right)\right\}$$

（2）计算欧氏范数：从肯定的方面计算备选方案 $\boldsymbol{x}_i^t=(t_1(x_i),t_2(x_i),\cdots,t_n(x_i))^{\mathrm{T}}$ 与理想方案 $\boldsymbol{x}^t=(t_1(x),t_2(x),\cdots,t_n(x))^{\mathrm{T}}$ 的正理想欧氏范数，记作

$$d^t[x_i,x]=\|\omega(x_i^t-x^t)\|^2=\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2(t_j(x_i)-t_j(x))^2$$

从否定的方面计算备选方案 $\boldsymbol{x}_i^f=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^{\mathrm{T}}$ 与理想方案 $\boldsymbol{x}^f=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^{\mathrm{T}}$ 的负理想欧氏范数，记作

$$d^f[x_i,x]=\|\omega(x_i^f-x^f)\|^2=\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2(f_j(x_i)-f_j(x))^2$$

（3）分析评价结果：计算得到备选方案与理想方案的正理想欧氏范数 d^t，d^t 越小表明方案越优。在多方案比较时，按照 d^t 的值从小到大排列，当 d^t 相同时，再比较负理想欧氏范数 d^f，与理想值相比 d^f 越小表示否定值越接近 0，所以，d^f 小的排在前面。最后根据欧氏范数从小到大的排列顺序，即得各方案的优劣顺序。

4 实例分析

借用文献[3]中的实例，设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 是 5 个候选方案，o_1,o_2,o_3 是 3 个目标条件，且目标条件的权重分别为 $\omega_1=0.49$，$\omega_2=0.20$，$\omega_3=0.31$。候选方案的特征由以下 Vague 集表示：

$x_1=\{(o_1,[0.5,0.8]),(o_2,[0.8,0.9]),(o_3,[0.2,0.4])\}$

$x_2=\{(o_1,[1,1]),(o_2,[0.6,0.8]),(o_3,[0.3,0.4])\}$

$x_3=\{(o_1,[0.6,0.8]),(o_2,[0.5,0.7]),(o_3,[0.4,0.9])\}$

$x_4=\{(o_1,[0,0]),(o_2,[0.4,0.9]),(o_3,[0.8,0.9])\}$

$x_5=\{(o_1,[0.6,0.7]),(o_2,[0.5,0.6]),(o_3,[0.4,0.8])\}$

现在用欧氏范数选择满足决策者需要的最佳方案：

（1）确定理想方案：因为从肯定的方面看，各目标要素的真隶属度的值越大，表明方案越优；而从否定方面看，目标要素假隶属度的值越小，表明方案越优，因此设 $x^t=(1,1,1)$，$x^f=(0,0,0)$。

（2）计算欧氏范数：

$d^t(x_1,x)=0.123\,129$ $d^t(x_2,x)=0.053\,489$

$d^t(x_3,x)=0.083\,012$ $d^t(x_4,x)=0.258\,344$

$d^t(x_5,x)=0.083\,012$

$d^f(x_1,x)=0.044\,600$ $d^f(x_2,x)=0.036\,196$

$d^f(x_3,x)=0.014\,165$ $d^f(x_4,x)=0.241\,461$

$d^f(x_5,x)=0.031\,853$

（3）分析评价结果：由于 $d^t(x_2,x)<d^t(x_3,x)=d^t(x_5,x)<d^t(x_1,x)<d^t(x_4,x)$ 及 $d^f(x_3,x)<d^f(x_5,x)<d^f(x_2,x)<d^f(x_1,x)<d^f(x_4,x)$，由文中 3(3)的方法可得相应候选方案的优劣排序结果为：x_2,x_3,x_5,x_1,x_4，最优方案为 x_2，最差方案为 x_4。

本文所得最差方案与文献[3]的最差方案有出入（最差方案为 x_1），但根据文献[3]中的方法，就 x_1、x_4 方案进行筛选，同样也得到优劣排序结果为 x_1、x_4。另外，利用文献[4]中的加权记分函数法也可得到与本文相同的结果，由此可证明与文献[3]方法相比，本文所介绍的方法更加准确、有效、简捷。

5 结束语

对模糊条件下的多目标决策问题，采用 Vague 集方法处理有较明显优势，本文采用加权相对偏差距离最小原则，即 m 个评价方案中与最理想方案之间的加权相对偏差距离最小者对应的方案为最优方案，为解决多目标模糊决策问题提供了一条新途径，同时为 Vague 集理论的应用开拓了一条新思路。

参考文献：

[1] Zadeh L A.Fuzzy sets[J].Information and Control,1965,8(3):338-356.

[2] Gau W L,Buehrer D J.Vague sets[J].IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,1993,23(2):610-614.

[3] 雷大江，符东海.基于 Vague 集模糊一致关系的多目标模糊决策[J].计算机工程与应用,2006,42(1):177-179.

[4] 刘华文.多目标模糊决策的 Vague 集方法[J].系统工程理论与实践,2004(5):103-109.

[5] 魏峰，张瑞平.多属性决策的 Vague 集方法[J].计算机工程与设计,2007,28(7):1614-1616.