

可控制的同构平面三角网格的保凸变形

刘 婕

LIU Jie

西安邮电学院 应用数理系, 西安 710061

Department of Mathematics and Physics, Xi'an University of Post and Telecommunications, Xi'an 710061, China

E-mail: veidge.son@nwpu.edu.cn

LIU Jie. Controllable morphing of compatible planar triangulations with convexity preserved. *Computer Engineering and Applications*, 2008, 44(16): 174-176.

Abstract: This paper presents a simple and effective algorithm which admits human-computer interaction for morphing two given compatible planar triangulations with different convex boundaries, which not only guarantees that the boundary polygons of the triangulations preserve convexity during the morphing and that the triangulation of any time is compatible with the source and target triangulations, but also provides some parameters for users to control the morphing artificially in a certain extent.

Key words: morphing; compatible; triangulation; human-computer interaction; convexity

摘 要: 对于具有不同凸边界的同构平面三角网格的变形, 提出了一种简单易行且允许人工参与的算法。算法在保证网格边界在变形过程中始终保持凸性, 且中间网格与初末网格同构的基础上, 提供了可调参数, 从而在一定程度上实现了用户对变形过程的人为控制。

关键词: 变形; 同构; 三角网格; 人机交互; 凸性

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.16.053 文章编号: 1002-8331(2008)16-0174-03 文献标识码: A 中图分类号: TP391

1 引言

变形, 是指从初始物体到目标物体的连续、光滑、自然的过渡(这里的物体可以是数字图像、曲线、曲面、网格等)。变形在许多领域有着十分广泛的应用, 如计算机图形学、动画设计、工业造型、电影特技等。变形通常分解为两个问题, 第一是建立初末两物体的元素之间的对应关系, 称为对应问题; 第二是通过插值初末两物体的对应元素产生中间状态, 称为插值问题。

计算机图形学、工业造型设计等领域的发展与要求促使了变形技术的飞速发展, 产生了许多比较成功的变形算法。例如, Beier T 和 Neely 在文献[1]中提出了二维数字图像的变形算法, 文献[2-6]则研究了平面多边形及平面折线的变形, Floater 和 Gotsman 在文献[7]中提出了平面三角网格的一种变形算法(有的研究者把它称为凸组合变形算法), 该算法适用于具有共同凸边界的同构三角网格的变形, 并推广到了不同凸边界的情形。文献[8]中 Surazhsky 和 Gotsman 给出了可避免自交的平面多边形变形算法, 它将多边形嵌入到具有共同凸边界的同构平面网格中, 运用文[7]中的凸组合算法进行变形。

对于具有不同凸边界的同构平面三角网格的变形, Floater 和 Gotsman^[7]给出了相应的算法, 但它不能保证边界在变形过程中始终为凸, 进而无法保证中间网格与初末网格同构; 宋伟杰等^[8]则提出了同构平面三角网格的保凸变形方法, 该方法克服了文[7]的缺点, 能够使网格边界在变形过程中始终保持为

凸, 任意时刻的中间网格与初末网格同构。但文[9]方法的变形过程是自动生成的, 用户无法干预和控制网格的变形, 正是鉴于这一点, 本文给出了可控制的同构平面三角网格的保凸变形方法, 该方法在继承文献[9]方法的优点的基础上, 增加了可调参数, 使用户可以在一定程度上对网格的变形过程进行控制和修改。

2 同构平面三角网格的保凸变形^[9]

对于具有不同凸边界的同构平面三角网格的变形, 文献[9]提出将内在解算法^[4]和凸组合算法^[7]结合在一起, 其中内在解算法用来变形平面网格的凸边界, 凸组合算法则在由内在解算法所得到的中间网格边界的基础上, 确定出该中间网格内顶点的位置。文献[9]理论证明了内在解算法具有保持中间网格边界的凸性这一良好特性, 符合由文献[11]得出的结论(*) (在采用凸组合算法^[7]对网格进行变形时, 只有使得中间网格的边界为凸多边形, 才能保证该中间网格与初末网格同构, 即不产生自交), 从而保证了任意时刻的中间网格与初末网格同构, 即不产生自交。

文献[9]以定理形式指出, 内在解算法用于两个凸多边形的变形时, 能够保证中间多边形不产生自交, 且始终为凸多边形, 为便于本文方法的证明与阐述, 下面给出其定理内容。

定理^[9] 给定初末两个凸多边形, 假设其顶点的对应关系已经建立, 对其采用内在解算法进行变形, 则:

(1) 任意时刻的中间多边形为简单多边形, 即边之间除顶

点外不相交;

(2)任意时刻的中间多边形为凸多边形。

3 可控制的同构平面三角网格的保凸变形

尽管文[9]的方法具有上述所列的那些优点,但是其变形过程是自动完成的,用户无法对变形过程进行干预和控制,故不能进行人机交互,本文方法在保留文[9]的优点的基础上,为用户提供了可调参数,从而实现了人机交互。

文[9]中的定理证明了采用内在解算法^[4]对两个凸多边形进行变形时,任意时刻的中间多边形仍为凸多边形。设 T^0, T^1 分别为初始和目标凸多边形, $T^k=[p_0^k p_1^k \cdots p_n^k]$, 其中 $p_n^k=p_0^k, k=0, 1$, 顶点的对应关系为: $p_i^0 \mapsto p_i^1, i=0, 1, \dots, n$, 且顶点按逆时针方向排列。设 $\rho_i^k = \|p_{i-1}^k p_i^k\|, i=1, 2, \dots, n, \overline{p_{i-2}^k p_{i-1}^k}$ 到 $\overline{p_{i-1}^k p_i^k}$ 的有向转角为 $\theta_i^k, i=2, 3, \dots, n+1$, 这里 $p_{n+1}^k=p_1^k$, 规定 θ_i^k 为逆时针方向时取正值, 否则取负值。由于凸多边形的所有顶点均为凸点, 所以有 $0 \leq \theta_i^k \leq \pi, k=0, 1, i=2, 3, \dots, n+1$ 。在内在解算法^[4]中, 中间多边形的各有向转角 θ_i^t 是通过线性插值 θ_i^0 和 θ_i^1 得到的, 即 $\theta_i^t = (1-t)\theta_i^0 + t\theta_i^1, i=2, 3, \dots, n$, 为引入可调参数, 本文采用二次 Bézier 曲线来插值。

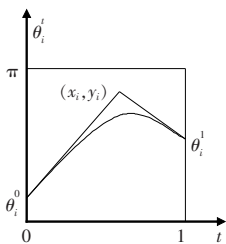


图1 中间多边形的各有向转角 θ_i^t 通过二次 Bézier 曲线插值来实现

二次 Bézier 曲线需要三个控制顶点来确定, 初末控制顶点即为初始多边形($t=0$)和目标多边形($t=1$)的各对应有向转角, 即 $b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_i^0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_i^1 \end{pmatrix}$, 第二个控制顶点设为 $b_1 = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, 并且限制 $b_1 \in [0, 1] \times [0, \pi]$, 即 b_1 位于图 1 所示的方框内。由于第二个控制顶点是相对自由的, 用户可以通过设置的值来控制内在转角的变化过程, 从而干预两个凸多边形的变形过程, 继而达到对具有不同凸边界的同构平面三角网格的变形过程的人为控制, 下面证明当用户在指定范围内设置 b_1 的值时, 可以继承文[9]方法的优点, 即两个凸多边形变形的中间多边形始终保持为凸。

证明

(1)首先证明该 Bézier 曲线对于 t 是单值的, 即对每一给定的 t 都有唯一确定的 θ_i^t 与之对应。

设该 Bézier 曲线 $P(t_1)$ 为:

$$\begin{pmatrix} t \\ \theta_i^t \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^2 b_j B_{j,2}(t_1) = (1-t_1)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_i^0 \end{pmatrix} + 2t_1(1-t_1) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + t_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_i^1 \end{pmatrix} \quad t_1 \in [0, 1]$$

$$\text{即: } \begin{cases} t = 2t_1(1-t_1)x_i + t_1^2 \\ \theta_i^t = \theta_i^0(1-t_1)^2 + 2t_1(1-t_1)y_i + t_1^2\theta_i^1 \end{cases}$$

容易证明:

①当 $x_i \neq \frac{1}{2}$ 时, 对每一给定的 t, t_1 都有唯一的值, 即

$$t_1 = \frac{-x_i + \sqrt{x_i^2 + t(1-2x_i)}}{1-2x_i} \in [0, 1]$$

由方程组的第二式进而可得 θ_i^t 有唯一的值。

②当 $x_i = \frac{1}{2}$ 时, 则 $t=t_1$, 故方程组的第二式简化为

$$\theta_i^t = \theta_i^0(1-t)^2 + 2t(1-t)y_i + t_1^2\theta_i^1$$

总之可以得出, 对每一给定的 t , 都有唯一确定的 θ_i^t 与之对应。

(2)证明两个凸多边形变形的中间多边形始终保持为凸。

由于 $b_1 = (x_i, y_i) \in [0, 1] \times [0, \pi]$, 且 Bézier 曲线具有凸包性, 可得对任意的 $t \in [0, 1]$, 都有 $0 \leq \theta_i^t < \pi$, 由定理^[9]的证明思路可以得出结论。证毕。

特别的, 当 b_1 与 b_0, b_2 共线时, 便退化为内在解算法^[4]中的线性插值。为简单起见, 可固定 x_i 的值 $x_i = \frac{1}{2}$ (此时若取 $y_i = \frac{1}{2}(\theta_i^0 + \theta_i^1)$, 便成为线性插值), 此时由上述证明的第一部分便有 $\theta_i^t = \theta_i^0(1-t)^2 + 2t(1-t)y_i + t^2\theta_i^1$ 。用户通过调整 $y_i (i=2, 3, \dots, n)$ 的值, 便可以在一定程度上控制 θ_i^t 的变化过程, 从而对网格的变形过程作人为的控制, 这将在下面的第 5 章中举例加以说明。

4 算法的主要步骤

设 Γ^0, Γ^1 为具有不同凸边界的同构平面三角网格, T^0, T^1 分别为 Γ^0, Γ^1 的凸边界, $T^k=[p_0^k p_1^k \cdots p_n^k]$, 其中 $p_n^k=p_0^k, k=0, 1$, 则 Γ^0 到 Γ^1 的变形的算法步骤如下:

步骤 1 分别计算出 T^0 和 T^1 的内在集 Ω^0, Ω^1 , 即 $\Omega^k = \{\rho_i^k\}_{i=1}^n, \{\theta_i^k\}_{i=2}^n, k=0, 1$, 及其初始点 p_0^0, p_0^1 和初始单位向量 X_0^0, X_0^1 ; 用户设置各有向转角对应的可调参数 $y_i, i=2, 3, \dots, n$ (这里固定 $x_i = \frac{1}{2}$)。由文[10]提出的方法分别计算出 Γ^0, Γ^1 的每个内

顶点相对于其相邻顶点的凸组合系数 λ_y^0, λ_y^1 。

步骤 2 计算出 t 时刻中间网格的边界 T^t 的内在集 $\Omega = \{\rho_i^t\}_{i=1}^n, \{\theta_i^t\}_{i=2}^n$, 其中

$$\begin{cases} \rho_i^t = (1-t)\rho_i^0 + t\rho_i^1 & i=1, 2, \dots, n \\ \theta_i^t = \theta_i^0(1-t)^2 + 2t(1-t)y_i + t^2\theta_i^1 & i=2, 3, \dots, n \end{cases}$$

对其初始点 p_0^t 和初始单位向量 X_0^t 的选取, 本文采用如下算法:

$$p_0^t = (1-t)p_0^0 + tp_0^1, X_0^t = X_0^0 + e^{i\theta} \quad (\text{其中 } \theta \text{ 为 } X_0^0 \text{ 到 } X_0^1 \text{ 的有向转角})$$

计算出该时刻中间网格的内顶点相对于其相邻顶点的凸组合系数 $\lambda_y(t)$, 即

$$\lambda_y(t) = (1-t)\lambda_y^0 + t\lambda_y^1$$

步骤 3 由 $\Omega \cup \{p_0^t, X_0^t\}$ 计算出 t 时刻中间网格的边界 T^t 的顶点坐标, 解线性方程组

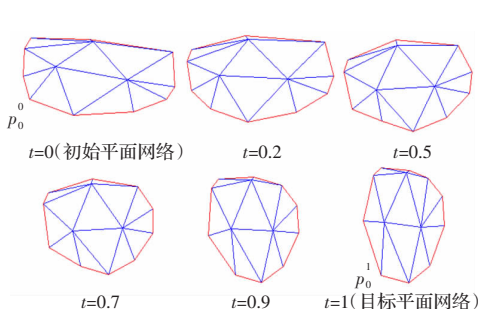
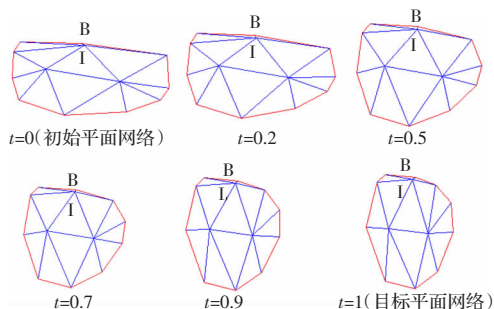


图2 两个具有不同凸边界的同构平面三角网格采用文[9]方法的变形过程 (其中 $t=0$ 时刻为初始网格, $t=1$ 时刻为目标网格)

图3 对图2中的初末网格采用本文方法的变形过程

$$\sum_{j \in n(i)} \lambda_j(t) u_j(t) = u_i(t)$$

得出该时刻中间网格的内顶点的坐标。按照初始(目标)网格的拓扑结构,用直线段连接各顶点,最终得出该时刻的中间网格。

5 实验结果

下面是采用文[9]方法的一个具有不同凸边界的同构平面三角网格的变形实例,见图2。

对于上述例子,现采用本文方法。如图3所示,初末网格边界的第一对对应顶点已用 p_0^0, p_0^1 标识出,其余的对应顶点按逆时针方向排列。由第3章可知,若固定 x_i 的值 $x_i = \frac{1}{2}$,则当取 $y_i = \frac{1}{2}(\theta_i^0 + \theta_i^1)$ 时,便成为文[9]方法。下表列出各有向转角所对应的可调参数 y_i (这里固定 $x_i = \frac{1}{2}$),其中第一行为文[9]方法对应的 y_i 值,第二行为调整后的参数值(这里仅对 y_4, y_7, y_{10} 作了调整)。采用本文方法调参后的变形过程如表1。

表1 本文方法调参后的变形过程

	y_4	y_7	y_{10}
文[9]对应的 y_i 值	0.535 6	0.174 9	0.485 3
本文方法调参后	0.835 6	0.674 9	1.485 3

比较图2和图3相同时刻的中间网格可以看出,采用本文方法不仅可以保证变形过程中网格始终与初末网格同构,网格边界保持为凸,而且用户对参数 y_i 的调整对于网格的变形过程产生了一定的影响。

6 结论

本文提出了一种可控制的同构平面三角网格的保凸变形方法,该方法在保证变形过程中网格边界始终为凸,且中间网格与初末网格同构的基础上,为用户提供了可调参数,实现了用户对变形过程的一定程度上的人为控制。尽管如此,本文方

法所引入的可调参数不具有非常明显的几何意义,因此无法完全按照用户自己的意愿来调整参数,以得到期望的结果,克服本文方法的这一不足将是本文作者今后努力的方向。

参考文献:

- [1] Beier T, Neely S. Feature-based image metamorphosis[C]//Computer Graphics (SIGGRAPH'92), 1992, 26: 35-42.
- [2] Alexa M, Cohen-Or D, Levin D. As-rigid-as-possible polygon morphing[C]//Proceedings of the SIGGRAPH'2000, New Orleans, 2000: 157-164.
- [3] Carmel E, Cohen-Or D. Warp-guided object-space morphing[J]. The Visual Computer, 1997, 13: 465-478.
- [4] Sederberg T W, Gao P, Wang G, et al. 2D shape blending: an intrinsic solution to the vertex path problem [C]//Computer Graphics (SIGGRAPH'93), 1993, 27: 15-18.
- [5] Sederberg T W, Greenwood E. A physically based approach to 2D shape blending[C]//Computer Graphics (SIGGRAPH'92), 1992, 26: 25-34.
- [6] Shapira M, Rappoport A. Shape blending using the star-skeleton representation[J]. IEEE Transactions on Computer Graphics and Application, 1995, 15: 44-51.
- [7] Floater M S, Gotsman C. How to morph tilings injectively[J]. Computational and Applied Mathematics, 1999, 101: 117-129.
- [8] Surazhsky V, Gotsman C. Guaranteed intersection-free polygon morphing[J]. Computers and Graphics, 2001, 25(1): 67-75.
- [9] 宋伟杰, 蒋大为, 华回春, 等. 同构平面三角网格的保凸变形方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005(6).
- [10] Tutte W T. How to draw a graph[C]//Proceedings of London Mathematical Society, 1963, 13: 743-768.
- [11] Floater M S. Parameterization and smooth approximation of surface triangulation[J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14: 231-250.
- [12] Lee H, Moon S. On an improved summation generator with 2-bit memory[J]. Signal Processing, 2000, 80(1): 211-217.
- [13] Meier W, Staffelbach O. Correlation prosperities of combiners with memory in stream cipher[J]. Journal of Cryptology, 1992, 5(1): 67-86.
- [14] 马卫局, 冯登国, 巫治平. 改进的求和生成器的密码分析[J]. 中国科学院研究生院学报, 2005, 22(4): 494-498.

(上接 125 页)

- [9] Duda O, Hart E. Pattern classification[M]. 李宏东, 姚天翔, 译. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2003: 105-114.
- [10] Crowley P. Improved cryptanalysis of Py. Workshop Record of SASC 2006-Stream ciphers revisited. Belgium; Leuven, 2006: 52-60.
- [11] 胡学先, 那键, 刘文芬. 对 Py 的一种改进的区分攻击[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(16): 152-155.

- [12] Lee H, Moon S. On an improved summation generator with 2-bit memory[J]. Signal Processing, 2000, 80(1): 211-217.
- [13] Meier W, Staffelbach O. Correlation prosperities of combiners with memory in stream cipher[J]. Journal of Cryptology, 1992, 5(1): 67-86.
- [14] 马卫局, 冯登国, 巫治平. 改进的求和生成器的密码分析[J]. 中国科学院研究生院学报, 2005, 22(4): 494-498.