第18卷第3期 中国计量学院学报 Vol. 18 No. 3
2007年9月 Journal of China Jiliang University Sep. 2007

【文章编号】 1004-1540(2007)03-0257-04

蒙特卡罗方法在无穷级数中的应用

柴中林
(中国计量学院 理学院,浙江 杭州 310018)

【摘 要】 将蒙特卡罗方法应用到无穷级数中去,证明了蒙特卡罗方法可以求收敛的无穷级数的和,也可以一定程度上判断无穷级数的敛散性.此外,通过模拟对随机变量及其参数的选择进行了讨论.

【关键词】 蒙特卡罗方法;无穷级数;大数定律
【中图分类号】 O242.1 【文献标识码】 A

Application of Monte Carlo method to infinite series

CHAI Zhong-lin
(College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The Monte Carlo method was used to infinite series. It proves that the Monte Carlo method can be used to acquire the sum of convergence infinite series. It also can be used to judge the convergence or divergence of infinite series to some degree. Moreover, this paper discusses ways to select random variables and parameters to improve calculation results.

Key words: Monte Carlo method; infinite series; laws of large numbers

蒙特卡罗(Monte-Carlo)方法又称随机抽样方法或统计试验方法,是一种重要的利用计算机模拟的近似计算方法,已被广泛地运用到许多领域上去[1-3].与其它数值方法相比,蒙特卡罗方法有其缺点,但也有其优越性.无穷级数理论是数学理论体系中的一个重要组成部分,是表示函数、研究函数的一个重要工具.但从查到的文献上看,还没有用蒙特卡罗方法研究无穷级数的文章,为此,本文拟做这方面的研究.

1 蒙特卡罗方法求收敛级数的和

常数项无穷级数(简称级数)的一般形式是

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

对级数(1),首先要讨论的问题是它的收敛和发散.对这个问题,已有相关理论给予解决[4].当级数(1)收敛时,有一个和,设为 s. s 通常不是能直观观察或计算出来的[5].为求 s,可以通过构造一个幂级数或傅立叶级数甚至一个概率模型[6]

【收稿日期】 2007-06-21
【基金项目】 浙江省教育厅科研基金资助项目(No. 20060532)
【作者简介】 柴中林(1964-),男,副教授.主要研究方向为应用数学与生物数学.

来得到,但通过这些方法能求出级数和的仍是很有限的.当然,我们可以根据收敛级数的定义,对足够大的 n,用无穷级数的前 n 项和作为 s 的近似值.然而既然是近似值,可否用蒙特卡罗方法来求解呢?

蒙特卡罗方法的基本思想是[7],为了求解数学、物理和工程技术等方面的问题,首先构造一个与概率有关的模型,使所求问题的解正好是该模型的特征参数.然后,通过模拟(统计试验),给出模型特征参数的估计值,这个估计值就作为所要求的解的近似值.下面我们根据这个原理来构造一个概率模型,用蒙特卡罗方法求收敛的无穷级数的和 s.

设离散型随机变量 ξ 的可能取得的值是 $1,2,3,\cdots$ 其分布率为 $P(\xi=n)=p_n(n=1,2,3,\cdots)$,并将它简记为 $p(n)$,且不妨设 $p(n)\neq 0$.将级数(1)的通项 u_n 记作 $u(n)$,当级数(1)收敛时,就有

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}u(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u(n)}{p(n)}p(n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\eta(n)p(n)=E\eta \tag{2}$$

式(2)中随机变量 $\eta=u(\xi)/p(\xi)$.这样,求级数(1)的和 s 就转化为求随机变量 η 的数学期望问题了.于是,我们有

定理1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u(n)$ 收敛,其和是 s,随机变量 ξ 的所有可能取值是 $1,2,3,\cdots$,其分布率为 $P(\xi=n)=p(n)$ 且不等于0.随机变量 $\eta=u(\xi)/p(\xi)$,设 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n,\cdots$ 是一列独立且与 η 有相同分布的随机变量序列,则对于任意的 $\varepsilon>0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i-s\right|<\varepsilon\right)=1$.

证明 由前面的分析知 $s=E\eta$,根据辛钦大数定律[8] 即得结论.

根据定理1,对足够大的 n,从服从 η 分布的总体中抽取简单随机样本 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n$,则可用样本均值 $\bar{\eta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i$ 作为级数和 s 的近似值.因为随着 n 的增大,样本均值 $\bar{\eta}$ 依概率无限接近于 s,故利用这个原理就可以利用计算机产生随机数进行数值模拟计算 s 的近似值了,这就是蒙特卡罗方法计算无穷级数和的原理.

利用蒙特卡罗方法求无穷级数的和,在常用的概率分布中 ξ 只能选择服从Poisson分布和几何分布的随机变量.下面的表1～4分别是用服从Poisson分布和几何分布的随机变量在参数取两个不同值下求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 和的模拟,这个和是1,所用的软件是Matlab5.3.

表1 利用Poisson分布($\lambda=0.5$)求得的级数和

模拟次数	5 000	10 000	20 000	精确值
模拟结果	0.910 0	0.853 7	0.839 1	1

表2 利用Poisson分布($\lambda=5$)求得的级数和

模拟次数	5 000	10 000	20 000	精确值
模拟结果	0.917 5	0.947 3	0.893 7	1

表3 利用几何分布($p=0.2$)求得的级数和

模拟次数	5 000	10 000	20 000	精确值
模拟结果	0.990 8	0.982 1	0.976 2	1

表4 利用几何分布($p=0.5$)求得的级数和

模拟次数	5 000	10 000	20 000	精确值
模拟结果	0.928 2	1.043 3	0.955 6	1

表1和表2给出了利用服从Poisson分布的随机变量 ξ,参数 λ 取值0.5和5分别模拟5 000次,10 000次和20 000次的模拟结果,表3和表4分别给出了利用服从几何分布的随机变量 ξ,参数 p 取值0.2和0.5分别模拟5 000次,10 000次和20 000次的模拟结果.从模拟结果可以看出,模拟所得的结果是稳定的,在一定程度上可以作为级数和的近似值.从表中还可以看出,模拟所得结果精度不高,当模拟次数足够大后精度不随模拟次数的增加而提高,这是蒙特卡罗方法的共同特点[9].用蒙特卡罗方法做模拟,其误差是概率误差,不是一般意义上的误差.此外,从表中还可以看出,当构造的随机变量服从几何分布时,其模拟结果要好于用服从Poisson分布的随机变量的模拟结果.这个结论是由两个随机变量的性质决定的.

2 用蒙特卡罗方法求级数和的误差分析

近似计算中的一个基本内容,就是对计算结

果做误差分析与估计. 蒙特卡罗方法是以概率模型为基础的,故当做误差估计时,一般要用到模型中随机变量的方差. 在本文对级数求和的概率模型中,误差估计需要随机变量 η 的方差. 上面的讨论说明了当级数收敛时,η 的数学期望存在,那么 η 的方差 $D\eta$ 存在吗?根据方差的性质,$D\eta$ 的存在性等价于 $E\eta^2$ 的存在性,而这时显然有

$$E\eta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^2(n)}{p(n)} \tag{3}$$

式(3) 右端是一个正项级数. 因为显然有 $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = 1$ 且 $0 < p(n) < 1$,从而可知 $\lim_{n\to\infty} p(n) = 0$. 由此可知当 $n \to \infty$ 时 $u^2(n)/p(n)$ 可能很大,$D\eta$ 未必存在. 当 $D\eta$ 存在时,可用与方差有关的理论[11,12] 来对计算结果做误差估计,而当 $D\eta$ 不存在时则不能用相应的理论来对计算结果做误差估计.

因为方差 $D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2$,再由正项级数的性质可知无论 $D\eta$ 是否存在,当式(3) 中的 $u^2(n)/p(n)$ 的值较大时,模拟得到的级数和的计算结果将会较差. 考虑模拟中可以用到的随机变量 ξ,当 ξ 服从 Poisson 分布时,$p_{(}n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$,而当 ξ 服从几何分布时,$p(n) = p(1-p)^{n-1}(0 < p < 1)$. 因为当 $n \to \infty$ 时 $\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ 接近于 0 的速度要快于 $p(1-p)^{n-1}$ 接近于 0 的速度,故由式(3) 可知,用服从几何分布的随机变量去模拟其结果要好于用服从 Poisson 分布的随机变量的模拟. 而对服从几何分布的随机变量,参数 p 取较小值的模拟结果要好于参数 p 取较大值的模拟结果. 当然,由于模拟中用的是伪随机数以及其它方面的原因,参数 p 的取值也不宜太小.

3　用蒙特卡罗方法判断无穷级数的敛散性

无穷级数除了收敛,还有发散. 当级数发散时,用常用的级数敛散性定理对它进行判别并不难,用蒙特卡罗方法可以判断吗?为此,考虑定理 1 的逆否命题,我们有

定理 2　给定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u(n)$,随机变量 ξ 的所有可能取值是 1,2,3,…,其分布率为 $P(\xi = n) = p(n)$ 且不等于 0. 随机变量 $\eta = u(\xi)/p(\xi)$,$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n, \cdots$ 是一列独立且与 η 有相同分布的随机变量序列,若存在 $\varepsilon > 0$,对于任意的常数 s,都有 $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \eta_i - s\right| < \varepsilon\right) \neq 1$,则无穷级数发散.

该定理给出了级数发散的蒙特卡罗方法的理论判别法:对于任意多次不同的模拟,将其中任一次的模拟结果作为 s,若存在一个 $\varepsilon > 0$,使得任意两次模拟的结果之差大于 ε 不是 0 概率事件,即它们相差大于 ε 是正常的,则级数发散. 因此,我们可以用不同次模拟得到的 η 的均值的差别程度来判断级数是否发散. 但是,蒙特卡罗方法本身就是一个近似程度不高的数值计算方法,因此当 ε 较小时,不同次模拟得到的 η 的均值的差别将不会显著. 直观上讲,对于发散很慢的级数(级数发散一般不讨论发散的快慢,但根据级数收敛的判定定理,可以简单地区分级数发散的快慢程度),不同次模拟得到的结果的差别将不会显著,而当级数发散很快时,不同次模拟得到的结果的差别应是显著的. 下面通过几个例子来说明.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是著名的调和级数,它是 p 级数当 p 取 1 得到的,当 $p > 1$ 时 p 级数就收敛了,因此调和级数的发散是很慢的. 表 5 给出了对调和级数的数值模拟. 从模拟结果看,不同次模拟得到的结果几乎很稳定,与收敛级数的不同次模拟结果相类似. 表 6 是对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}$ 的计算机模拟. 这个级数发散的比调和级数快,因为它满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0$,但与能用比值判别法判别的发散级数相比,它的发散仍是慢的. 由表 6 的模拟结果可以显著地看出,这个级数是发散的. 表 7 给出了对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ 的模拟,这个级数发散得比 $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}$ 还快,而所得模拟结果也显著地说明了这个级数是发散的.

表 5　利用几何分布($p = 0.5$)对调和级数的模拟

模拟次数	5 000	10 000	20 000	精确值
模拟结果	3.54 8	3.32 9	3.82 8	发散

表6 利用几何分布($p=0.5$)对$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}$的模拟

模拟次数	5 000	10 000	20 000	精确值
模拟结果	18.07	20.58	30.92	发散

表7 利用几何分布($p=0.5$)对$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$的模拟

模拟次数	1 000	2 000	10 000	精确值
模拟结果	1 796	7 437	9 951	发散

4 结 语

本文讨论了蒙特卡罗方法在无穷级数上的应用,得到的结论是蒙特卡罗方法可以求收敛级数的和,这对不易或不能求出精确值的收敛级数的求和无疑是一个强有力的工具.用蒙特卡罗方法求无穷级数的和,精度不高.提高精度的途径是用好的随机数,此外应选用服从几何分布的随机变量ξ来构造模型,当选用的参数合适时,可以提高所得结果的精度.

利用蒙特卡罗方法从理论上讲可以判断无穷级数的敛散性,但因为蒙特卡罗方法本身是一个近似计算方法,所以对那些收敛和发散很慢的级数,区别并不明显.但因为级数敛散性的判别方法相当完善,所以蒙特卡罗方法的这个缺陷对级数敛散性的研究并不产生太大的影响.

【参 考 文 献】

[1] 高炳荣,郝永强,焦维新.用蒙特卡罗方法研究卫星内部带电问题[J].空间科学学报,2004,24(4):289-294.

[2] 廖义香.蒙特卡罗方法在ADS屏蔽计算中的应用[J].核动力工程,2004,25(2):106-108.

[3] 肖志刚.γ射线大气传输特性的蒙特卡罗方法模拟[J].核电子学与探测技术,2005,25(3):283-286.

[4] 同济大学应用数学系.高等数学[M].5版.北京:高等教育出版社,2002:186-257.

[5] 张 华.无穷级数求和[J].郑州铁路职业技术学院学报,2003,15(1):53-55.

[6] 豁祖顺,查新月.利用概率求一类无穷级数的和[J].信阳农业高等专科学校学报,2005,15(2):78-80.

[7] 俞月阳,陈冬云.蒙特卡罗方法在河网计算中的应用[J].浙江水利水电专科学校学报,2002,14(4):8-10.

[8] 马振华.现代应用数学手册.概率统计与随机过程卷[M].北京:清华大学出版社,2000:123-130.

[9] 宫 野.计算多重积分的蒙特卡罗方法与数论网格法[J].大连理工大学学报,2001,41(1):20-23.

[10] 王仲奇,宋玉琳,肖 刚,等.蒙特卡罗方法的两个基本问题[J].原子核物理评论,2005,22(4):395-397.

[11] 姚贵平,袁淑霞,吴国荣,等.重积分近似计算方法的讨论[J].内蒙古农业大学学报,2000,21(4):98-101.

[12] 尹增谦.蒙特卡罗方法及其应用[J].物理与工程,2002,12(3):45-49.