

岭回归算法在卫星定位中的应用

盛 琥, 杨景曙

SHENG Hu, YANG Jing-shu

合肥电子工程学院 安徽省电子制约技术重点实验室, 合肥 230037

Key Laboratory of Electric Restriction, Hefei Electronic Engineering Institute, Hefei 230037, China

E-mail: tigersh_2000@yahoo.com.cn

SHENG Hu, YANG Jing-shu. Application of rigid regression algorithm in GPS positioning. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(19): 213-214.

Abstract: A new algorithm for satellite positioning under the circumstance of unfavorable geometry is proposed. GDOP, which is of great importance to the accuracy of positioning, will deteriorate when the relative geometry between satellites is bad, thus the variation of positioning will inflate. To counter this problem, we proposed a new biased estimator which is called rigid regression estimator. This algorithm improves the position accuracy by inducing biases in the estimator. It can provide position much accurately than the LMS estimation under bad geometry, so it has applicable value in military operation.

Key words: satellite positioning; rigid regression estimation; biased estimation; geometry dilution of positioning

摘 要: 提出一种在可见卫星相对几何构型不好时提高定位精度的新算法。卫星间相对几何位置对定位精度的影响很大, 在可见卫星几何布局不好的情况下, 定位精度会大大降低。针对此问题, 提出一种新的卫星定位算法。该算法通过引入有偏估计, 以最小化参数估计的方差为目标, 用轻微牺牲无偏性的代价大大提高了定位精度, 解决了可见卫星布局不好情况下不能精确定位的问题, 在军事上有很高的应用价值。

关键词: 卫星定位; 岭回归估计; 有偏估计; 精度衰减因子

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.19.066 文章编号: 1002-8331(2008)19-0213-02 文献标识码: A 中图分类号: TN96

1 引言

在 GPS 定位中, 当测距误差一定时, 目标与参与定位的卫星间的几何关系的差异将直接影响定位误差。为描述卫星间的相对几何关系, 引入精度衰减因子, 即 GDOP, 它反映了由于卫星几何关系的影响造成的伪距测量误差与目标位置误差的比例系数^[1-3]。GPS 星座有 24 颗卫星, 大多数时刻可见卫星在 4 颗以上, 可以通过选择几何结构比较好的卫星进行定位解算以提高定位精度。但在战场环境下, 用户常身处丛林、山谷等不利地形中, 当视角受到遮蔽, 可见卫星只有四颗且相对几何结构不好时, 定位精度会大大降低。常规的定位解算方法是对位置的最小均方误差意义下的无偏估计, 即最小均方误差估计(LMS), 而 LMS 估计已达到估计精度的 CRAMER-RAO 下界^[4,5], 所以考虑用有偏估计取代无偏估计提高定位精度。

卫星定位中解算用户位置的方程组是非线性方程组, 解算非常烦琐, 为达到实时解算的目的, 通常将非线性方程组做一阶近似转化成线性方程组^[1]。

已知卫星位置 $X_i, Y_i, Z_i (i=1, \dots, n)$ 时, 假设 $R_i (i=1, \dots, n)$ 是卫星 i 和地面用户之间的真实距离, $\rho_i (i=1, \dots, n)$ 是测得的伪距, $\delta\rho$ 是卫星和接收机时钟之间的钟差对应的距离。 $\delta R_i (i=1, \dots, n)$ 是地面用户对各卫星的测距误差。则有:

$$\rho_i = R_i + \delta\rho + \delta R_i, i=1, \dots, n \quad (1)$$

其中:

$$R_i = \sqrt{(X_i - RX)^2 + (Y_i - RY)^2 + (Z_i - RZ)^2} \quad (2)$$

假定用户位置初值 (RX_0, RY_0, RZ_0) , 将公式(1)在初值附近做一阶线性展开, 得:

$$\rho_i = R_{i0} + [l_{i0} \ m_{i0} \ n_{i0}] [\delta RX \ \delta RY \ \delta RZ \ \delta\rho]^T + \delta R_i, i=1, \dots, n \quad (3)$$

其中 $l_{i0} = \frac{(X_i - RX_0)}{R_{i0}}, m_{i0} = \frac{(Y_i - RY_0)}{R_{i0}}, n_{i0} = \frac{(RZ_i - Z_0)}{R_{i0}}$ 。

式(3)进一步简化为向量形式:

$$Y = H\beta + e \quad (4)$$

Y 是 $n \times 1$ 维的观测向量, H 是 $n \times p$ 维的系数矩阵, β 为未知的 $p \times 1$ 维的参数向量, 在这里是位置坐标的改正数和钟差组成的向量, e 是 $n \times 1$ 维的误差向量。式(4)中 β 的解要使残差的平方和最小, 即最小化残差和 $SS(e)$ 。

$$SS(e) = (Y - H\beta)^T (Y - H\beta) \quad (5)$$

$$\hat{\beta}_{LMS} = (H^T H)^{-1} H^T Y \quad (6)$$

$\hat{\beta}_{LMS}$ 的均值 $E[\hat{\beta}_{LMS}] = \beta$ 是无偏估计, 设残差 e 的方差为 $\sigma^2 I$,

则 $\hat{\beta}_{LMS}$ 的均方误差:

作者简介: 盛琥(1980-), 男, 博士研究生, 研究方向: 无线电导航系统; 杨景曙(1950-), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 电子对抗, 多目标跟踪与干扰, 测向与定位, 模式识别, 电路与系统, 检测理论及应用等。

收稿日期: 2007-09-25 修回日期: 2007-11-27

$$MSE[\hat{\beta}_{LMS}] = E[(\hat{\beta}_{LMS} - \beta)^T(\hat{\beta}_{LMS} - \beta)] = \sigma^2 Tr[H^T H]^{-1} = \sigma^2 \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \quad (7)$$

λ_i 是 $H^T H$ 的特征值, (Tr) 是对矩阵的对角元素求和。

当可见卫星布局不佳, 如 4 颗卫星近乎共面时, 矩阵 $H^T H$ 的最小特征值接近 0, $\hat{\beta}_{LMS}$ 的均方误差迅速变大。这说明布局结构不好时, LMS 估计子虽然满足使残差和 $SS(e)$ 最小, 但估计的方差很大, 估计精度大大降低。

2 岭回归算法应用于 GPS 定位

岭回归估计可以有效解决布局不合理导致的对参数估计方差过大的问题。它通过在系数矩阵 $H^T H$ 加上 kI , 限制了 $[H^T H]^{-1}$ 的过大偏移从而防止参数估计的方差过大^[6]。在矩阵加上 $H^T H$ 后, 对参数 β 估计的均值会引入偏移量, 所以岭回归估计不再是无偏估计。

假设对公式(4)有目标函数:

$$\phi = \frac{1}{2} (Y - H\beta)^T (Y - H\beta) + \frac{k}{2} [\beta^T \beta - C] \quad (8)$$

对式(7)求解对 β 的估计使 ϕ 最小, 对上式微分:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta} = -H^T (Y - H\beta) + k\beta = 0 \quad (9)$$

可得解为:

$$\hat{\beta}_R = [H^T H + kI]^{-1} H^T Y \quad (10)$$

$\hat{\beta}_R$ 是岭回归估计子, 假设 $G_k = (H^T H + kI)^{-1}$, 分别计算 $\hat{\beta}_R$ 的均值和方差:

$$E[\hat{\beta}_R] = \beta - k G_k \beta \quad (11)$$

可见, $\hat{\beta}_R$ 是有偏估计。

$$var[\hat{\beta}_R] = G_k H^T var[Y] H G_k^T = \sigma^2 G_k H^T H G_k^T \quad (12)$$

有偏估计子 $\hat{\beta}_R$ 的均方误差是其方差 var 和偏差 $bias$ 平方之和, 即有 $MSE = var + bias^2$, 所以:

$$MSE[\hat{\beta}_R] = E[(\hat{\beta}_R - \beta)^T(\hat{\beta}_R - \beta)] = Tr[\sigma^2 H^T H [H^T H + kI]^{-2} + k^2 \beta^T [H^T H + kI]^{-2} \beta] \quad (13)$$

对 $H^T H$ 做正交变换, $V^T [H^T H] V = \Gamma$, 设 $\alpha = V^T \beta$:

$$MSE[\hat{\beta}_R] = \sum_{i=1}^p \left[\frac{\sigma^2 \lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} + \frac{k^2 \alpha_i^2}{(\lambda_i + k)^2} \right] \quad (14)$$

式(14)第 1 项是 k 的单调递减函数, 第 2 项是单调递增函数, 因此可以找到使 $MSE[\hat{\beta}_R]$ 最小的 k 值。要使 β_R 的均方误差比 β_{LMS} 小, 必须满足:

$$MSE[\hat{\beta}_R] - MSE[\hat{\beta}_{LMS}] < 0 \quad (15)$$

式(7)、(13)代入式(15)有:

$$\sum_{i=1}^p \left[\frac{\sigma^2 \lambda_i + k^2 \alpha_i^2}{(\lambda_i + k)^2} - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \right] < 0 \quad (16)$$

由式(16)推导出不等式(17):

$$\sum_{i=1}^p \left[\frac{\sigma^2 \lambda_i + k^2 \alpha_i^2}{(\lambda_i + k) \lambda_i} - \frac{(\lambda_i + k) \sigma^2}{(\lambda_i + k) \lambda_i} \right] < 0 \quad (17)$$

λ_i, k, α_i^2 都是正数, 对不等式(17)进一步简化:

$$\sum_{i=1}^p (k \alpha_i^2 - \sigma^2) < 0 \quad (18)$$

又有 $\sum_{i=1}^p \alpha_i^2 < \beta^T \beta$, 所以当 $k < \frac{p \sigma^2}{\beta^T \beta}$ 时, 式(18)成立。

当 $k = \frac{p \sigma^2}{\beta^T \beta}$ 时, $\hat{\beta}_R$ 的均方误差最小。上式中 k 是关于 β 的

函数, 要得到 k , 就要先确定 β, β 虽然是待求解的未知参数, 但可以用最小均方估计 $\hat{\beta}_{LMS}$ 代替, σ^2 用 $SS(e)/n$ 代替, 那么可以近似成:

$$k = \frac{p SS(e)}{n \hat{\beta}_{LMS}^T \hat{\beta}_{LMS}} \quad (19)$$

综合以上, 岭回归估计算法的算法流程如下: (1)用公式

(6)求解用户位置的 LMS 估计子 $\hat{\beta}_{LMS}$; (2)获得 $\hat{\beta}_{LMS}$ 后, 用公式(5)求解 LMS 算法残差和 $SS(e)$; (3)将步骤(1)、(2)求解的参数代入公式(19)解出岭回归系数 k ; (4)公式(10)求解岭回归估计子 $\hat{\beta}_R$ 。

3 仿真对比

为验证岭回归算法在几何布局不佳情况下的定位性能, 将岭回归算法和 LMS 算法的定位精度进行仿真对比。假设用户在 $(123^\circ, 45^\circ)$ 处, 可见卫星只有 4 颗, 经纬度坐标分别为 $(120^\circ, 42^\circ)$ 、 $(126^\circ, 43^\circ)$ 、 $(125^\circ, 48^\circ)$ 、 $(121^\circ, 47^\circ)$, 这时的 GDOP 达到 1108, 伪距提取误差设为 0.3 m。为评价定位效果, 用户从 $(123^\circ, 45^\circ)$ 开始, 沿经线方向向东行进, 每行进 10 km 后在该点定位一次, 共定位 20 次, 在每个点进行 500 次 Monte-Carlo 实验, 定位统计结果如下。

由仿真对比可见, 在自西向东行进过程中的各点, 岭回归算法的定位精度都优于 LMS 算法, 定位精度提高近 1 倍(图 1)。图 2 是岭回归算法在各点的定位误差偏移量, 误差偏移量最大不超过 8 m。可见, 该算法通过轻微有偏的代价极大的提高了布局较差情况下的定位精度。

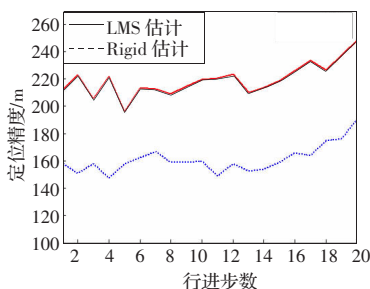


图 1 岭回归算法与 LMS 算法定位精度

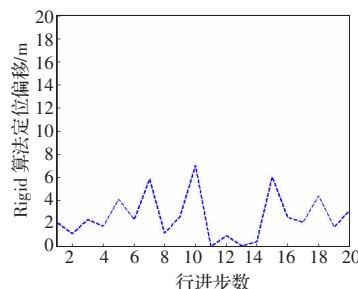


图 2 岭回归算法在各点的定位偏移

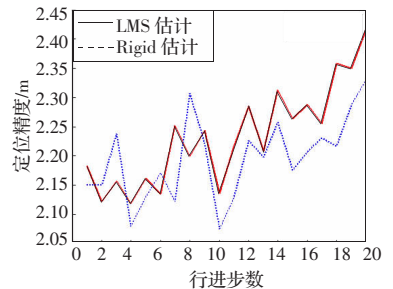


图 3 较好几何构型下的定位精度对比