◎博士论坛◎

软 Vague 关系

杨海龙，李生刚
YANG Hai-long，LI Sheng-gang

陕西师范大学 数学与信息科学学院，西安 710062
College of Mathematics and Information Science，Shaanxi Normal University，Xi'an 710062，China
E-mail：yanghailong@snnu.edu.cn

YANG Hai-long，LI Sheng-gang.Soft Vague relation.Computer Engineering and Applications，2009，45（10）：1-3.

Abstract： The basic notions of soft Vague relation are introduced，and their some properties of algebraic operations，such as $\widetilde{\vee}$，$\widetilde{\wedge}$，union，intersection，and complement，of soft Vague relation are studied respectively.
Key words： soft set；Vague relation；soft Vague relation

摘　要： 提出软 Vague 关系的一些基本概念，研究了软 Vague 关系的 $\widetilde{\vee}$、$\widetilde{\wedge}$ 以及并、交、补代数运算的若干性质。
关键词： 软集；Vague 关系；软 Vague 关系
DOI： 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.10.001　　**文章编号：** 1002-8331（2009）10-0001-03　　**文献标识码：** A　　**中图分类号：** O159

1　引言

20 世纪 60 年代 L. A.Zadeh 开创了 Fuzzy 集理论[1]。由于 Fuzzy 集的隶属函数值的单一性，它无法表示和处理具有模糊信息和数据的问题。为此，Gau 和 Buehrer 于 1993 年提出了Fuzzy 集的一种拓广形式—Vague 集[2]的概念。1999 年 Molodtsov 在文献[3]中指出了上述两种理论存在的不足之处，并提出软集（Soft set）[3]的概念以克服这些不足。随后 Maji 等研究者们在文献[4]中引入了软集的一些代数运算，并研究了这些运算的若干性质。如今软集理论已被成功应用到众多领域[5-8]。文献[9]给出了 Vague 关系的概念，并对 Vague 关系的性质进行了讨论，文献[10]又对 Vague 关系作了进一步研究。基于此，将软集的思想初步应用于 Vague 关系中，提出了软 Vague 关系的一些基本概念，给出了软 Vague 关系的 $\widetilde{\vee}$、$\widetilde{\wedge}$ 以及并、交、补运算的概念，并研究了这些运算的若干代数性质。

2　预备知识

本章给出本文可能用到的一些概念和结论，大部分来自文献[9]。

设 U 是一个论域，其中的任意一个元素用 x 表示，U 上一个 Vague 集 V 用一个真隶属函数 $t_V(x)$ 和一个假隶属函数 $f_V(x)$ 表示，$t_V(x)$ 表示从支持 x 的证据导出的 x 的肯定隶属度的下界，$f_V(x)$ 表示从反对 x 的证据导出的 x 的否定隶属度的下界，t_V 和 f_V 将区间[0，1]中的一个实数和 U 中每一元素联系起来，即 $t_V:U\to[0,1]$，$f_V:U\to[0,1]$，x 关于 V 的隶属度 $V(x)$ 表示为：$[t_V(x),1-f_V(x)]$，其中 $t_V(x),1+f_V(x)\leqslant 1$。

称 Vague 集 A 是 Vague 集 B 的子集（记作 $A\subseteq B$），若 $\forall x\in X$，$t_A(x)\leqslant t_B(x)$，$1-f_A(x)\leqslant 1-f_B(x)$。若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 和 B 相等，记作 $A=B$。记号 $V(U\times U)$ 表示 $U\times U$ 上所有 Vague 集构成的集合。称 $R\in V(U\times U)$ 为 U 上的一个 Vague 关系。定义 R 的补如下：

$R^c\in V(U\times U)$，$\forall(x,y)\in U\times U$，$t_{R^c}(x,y)=f_R(x,y)$，$1-f_{R^c}(x,y)=1-t_R(x,y)$

$R\cup Q$ 和 $R\cap Q$ 分别称为 Vague 关系 R、Q 的并和交，其中

$t_{R\cup Q}(x,y)=\max(t_R(x,y),t_Q(x,y))$

$1-f_{R\cup Q}(x,y)=1-\min(f_R(x,y),f_Q(x,y))$

$t_{R\cap Q}(x,y)=\min(t_R(x,y),t_Q(x,y))$

$1-f_{R\cap Q}(x,y)=1-\max(f_R(x,y),f_Q(x,y))$

引理 1[10]　设 R、Q 为 U 上的两个 Vague 关系，则

（1）$(R\cup Q)^c=R^c\cap Q^c$，$(R\cap Q)^c=R^c\cup Q^c$

基金项目： 国家自然科学基金（the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10271069）；陕西师范大学青年科技项目（the Science Fund for Young Scholars of Shaanxi Normal University under Grant No.200701007）。
作者简介： 杨海龙（1977-），男，博士生，讲师，主要研究领域为 Vague 集理论、格上拓扑学；李生刚（1959-），男，博士，教授，博士生导师，主要研究领域为 Vague 集理论、格上拓扑学及拟阵论。
收稿日期： 2008-10-28　　**修回日期：** 2008-11-27

(2)$(R^c)^c=R$

定义1[9] 设 R 为 U 上的一个 Vague 关系，如果 $\forall(x,y)\in U\times U$，$t_R(x,y)=0$，$f_R(x,y)=1$，则称 R 是 Vague 空关系，记为 $\varnothing$。

定义2[3] 设 U 是一个论域，$P(U)$ 是 U 的幂集，E 是一个参数集，$A\subseteq E$，且 $F:A\to P(U)$ 是一个映射，称 (F,A) 为 U 上的一个软集。

定义3[4] 设 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是一个参数集，称 $\neg E=\{\neg e_1,\neg e_2,\cdots,\neg e_n\}$ 是 E 的否定集。

命题1[4] (1)$\neg(\neg A)=A$；(2)$\neg(A\cup B)=\neg A\cup\neg B$；(3)$\neg(A\cap B)=\neg A\cap\neg B$。

其他未说明的有关软集的概念、记号参见文献[4]。

3　软 Vague 关系

定义4 设 U 是一个论域，E 是一个参数集，$A\subseteq E$，且 $F:A\to V(U\times U)$ 是一个映射，即 $\forall x\in A$，$F(x)$ 是 U 上的一个 Vague 关系，称 (F,A) 为 U 上的一个软 Vague 关系。

定义5 设 (F,A)、(G,B) 为 U 上的两个软 Vague 关系，若满足：

(1)$A\subseteq B$

(2)$\forall x\in A$，$F(x)\subseteq G(x)$

则称 (G,B) 软包含 (F,A)（此时亦称 (F,A) 软包含于 (G,B)），记作 $(G,B)\widetilde{\supseteq}(F,A)$（或 $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)$）。若 $(G,B)\widetilde{\supseteq}(F,A)$ 且 $(F,A)\widetilde{\supseteq}(G,B)$，则称 (G,B) 与 (F,A) 软相等，记作 $(G,B)\cong(F,A)$。

定义6 设 (F,A) 为 U 上的一个软 Vague 关系

(1)称 $(F,A)'=(F',\neg A)$ 为 (F,A) 的补，其中 $F':\neg A\to V(U\times U)$，具体为：$\forall y\in\neg A$，$F'(y)=(F(\neg y))^c$；

(2)若 $\forall x\in A$，$F(x)=\varnothing$，则称 (F,A) 为 U 上的软 Vague 空关系，记作 Φ。

定义7 设 (F,A)、(G,B) 为 U 上的两个软 Vague 关系

(1)定义 $(F,A)\widetilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$，其中 $\forall(x,y)\in A\times B$，$H(x,y)=F(x)\cap G(y)$；称之为软 Vague 关系的 $\widetilde{\wedge}$ 运算；

(2)定义 $(F,A)\widetilde{\vee}(G,B)=(O,A\times B)$，其中 $\forall(x,y)\in A\times B$，$O(x,y)=F(x)\cup G(y)$；称之为软 Vague 关系的 $\widetilde{\vee}$ 运算。

下面来研究软 Vague 关系的 $\widetilde{\wedge}$、$\widetilde{\vee}$ 运算的性质：

定理1 设 (F,A)、(G,B) 为 U 上的两个软 Vague 关系，则

(1)$(F,A)\widetilde{\wedge}(G,B)$ 是 U 上的一个软 Vague 关系；

(2)$(F,A)\widetilde{\vee}(G,B)$ 是 U 上的一个软 Vague 关系。

证明 (1)设 $(F,A)\widetilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$，$\forall(x,y)\in(A\times B)$，$H(x,y)=F(x)\cap G(y)$；

由 (F,A)、(G,B) 为 U 上的两个软 Vague 关系知，$F(x)$ 与 $G(y)$ 是 U 上的两个 Vague 关系，又 Vague 关系的交仍是 Vague 关系，故 $H(x,y)=F(x)\cap G(y)$ 是 U 上的 Vague 关系，从而 $(F,A)\widetilde{\wedge}(G,B)$ 是 U 上的一个软 Vague 关系。

(2)设 $(F,A)\widetilde{\vee}(G,B)=(O,A\times B)$，$\forall(x,y)\in(A\times B)$，$O(x,y)=F(x)\cup G(y)$；由 (F,A)、(G,B) 为 U 上的两个软 Vague 关系知，$F(x)$ 与 $G(y)$ 是 U 上的两个 Vague 关系，又 Vague 关系的并仍是 Vague 关系，故 $O(x,y)=F(x)\cup G(y)$ 是 U 上的 Vague 关系，从而 $(F,A)\widetilde{\vee}(G,B)$ 是 U 上的一个软 Vague 关系。

定理2 设 (F,A)、(G,B) 为 U 上的两个软 Vague 关系，则

(1)$((F,A)\widetilde{\wedge}(G,B))'=(F,A)'\widetilde{\vee}(G,B)'$；

(2)$((F,A)\widetilde{\vee}(G,B))'=(F,A)'\widetilde{\wedge}(G,B)'$。

证明 (1)设 $(F,A)\widetilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$，则 $((F,A)\widetilde{\wedge}(G,B))'=(H,A\times B)'=(H',\neg(A\times B))$；另一方面，$(F,A)'\widetilde{\vee}(G,B)'=(F',\neg A)\widetilde{\vee}(G',\neg B)=(K,\neg A\times\neg B)=(K,\neg(A\times B))$，其中 $K(x,y)=F'(x)\cup G'(y)$。则 $\forall(\neg x,\neg y)\in\neg(A\times B)$，结合引理1，有 $H'(\neg x,\neg y)=(H(x,y))^c=(F(x)\cap G(y))^c=(F(x))^c\cup(G(y))^c=F'(\neg x)\cup G'(\neg y)=K(\neg x,\neg y)$。从而定理2(1)成立。

(2)设 $(F,A)\widetilde{\vee}(G,B)=(O,A\times B)$，则 $((F,A)\widetilde{\vee}(G,B))'=(O,A\times B)'=(O',\neg(A\times B))$；另一方面，$(F,A)'\widetilde{\wedge}(G,B)'=(F',\neg A)\widetilde{\wedge}(G',\neg B)=(J,\neg A\times\neg B)=(J,\neg(A\times B))$，其中 $J(x,y)=F'(x)\cap G'(y)$。则 $\forall(\neg x,\neg y)\in\neg(A\times B)$，结合引理1，有 $O'(\neg x,\neg y)=(O(x,y))^c=(F(x)\cup G(y))^c=(F(x))^c\cap(G(y))^c=J(\neg x,\neg y)$。从而定理2(2)成立。

定理2表明软 Vague 关系的 $\widetilde{\vee}$、$\widetilde{\wedge}$ 运算满足 De Morgan 对偶律。另外，由定义7容易证明软 Vague 关系的 $\widetilde{\vee}$、$\widetilde{\wedge}$ 运算满足结合律、分配律：

定理3 设 (F,A)、(G,B) 及 (H,C) 为 U 上的三个软 Vague 关系，则

(1)$(F,A)\widetilde{\vee}((G,B)\widetilde{\vee}(H,C))=((F,A)\widetilde{\vee}(G,B))\widetilde{\vee}(H,C)$；

(2)$(F,A)\widetilde{\wedge}((G,B)\widetilde{\wedge}(H,C))=((F,A)\widetilde{\wedge}(G,B))\widetilde{\wedge}(H,C)$；

(3)$(F,A)\widetilde{\vee}((G,B)\widetilde{\wedge}(H,C))=((F,A)\widetilde{\vee}(G,B))\widetilde{\wedge}((F,A)\widetilde{\vee}(H,C))$；

(4)$(F,A)\widetilde{\wedge}((G,B)\widetilde{\vee}(H,C))=((F,A)\widetilde{\wedge}(G,B))\widetilde{\vee}((F,A)\widetilde{\wedge}(H,C))$。

定义8 设 (F,A)、(G,B) 为 U 上的两个软 Vague 关系

(1)定义 $(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)=(H,C)$，其中 $C=A\cup B$，且 $\forall x\in C$，

$$H(x)=\begin{cases}F(x), & x\in A-B\\ G(x), & x\in B-A\\ F(x)\cup G(x), & x\in A\cap B\end{cases}$$

；称之为软 Vague 关系的并运算；

(2)定义 $(F,A)\widetilde{\cap}(G,B)=(H,C)$，其中 $C=A\cap B$，且 $\forall x\in C$，$H(x)=F(x)$ 或 $G(x)$（此时 $F(x)=G(x)$）；称之为软 Vague 关系的交运算。

由定义8知，下面的定理4是显然的：

定理4 (1)$(F,A)\widetilde{\cup}(F,A)=(F,A)$；

(2)$(F,A)\widetilde{\cap}(F,A)=(F,A)$;

(3)$(F,A)\widetilde{\cap}\Phi=\Phi$;

(4)$(F,A)\widetilde{\cup}\Phi=(F,A)$。

下面来讨论软 Vague 关系的并、交运算的性质:

定理 5 设(F,A)、(G,B)为 U 上的两个软 Vague 关系,则

(1)$(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)$是 U 上的一个软 Vague 关系;

(2)$(F,A)\widetilde{\cap}(G,B)$是 U 上的一个软 Vague 关系。

证明 (1)$(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)=(H,C)$,其中 $C=A\cup B$,且 $\forall x\in C$,
$$H(x)=\begin{cases}F(x), & x\in A-B\\ G(x), & x\in B-A\\ F(x)\cup G(x), & x\in A\cap B\end{cases};$$

①若 $x\in A-B$,由(F,A)为 U 上的软 Vague 关系知,$H(x)=F(x)$是 U 上的 Vague 关系;

②若 $x\in B-A$,由(G,B)为 U 上的软 Vague 关系知,$H(x)=G(x)$是 U 上的 Vague 关系;

③若 $x\in A\cap B$,由(F,A)、(G,B)为 U 上的两个软 Vague 关系及 Vague 关系的并仍是 Vague 关系知,$H(x)=F(x)\cup G(x)$是 U 上的 Vague 关系;从而$(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)$是 U 上的一个软 Vague 关系。

(2)由定义 8,设$(F,A)\widetilde{\cap}(G,B)=(H,C)$,其中 $C=A\cap B$,且 $\forall x\in C$,$H(x)=F(x)$或 $G(x)$;由(F,A)、(G,B)为 U 上的两个软 Vague 关系知,$H(x)=F(x)$是 U 上的 Vague 关系,或 $H(x)=G(x)$是 U 上的 Vague 关系,故$(F,A)\widetilde{\cap}(G,B)$是 U 上的一个软 Vague 关系。

定理 6 设(F,A)、(G,B)为 U 上的两个软 Vague 关系,则

(1)$((F,A)\widetilde{\cup}(G,B))'=(F,A)'\widetilde{\cup}(G,B)'$;

(2)$((F,A)\widetilde{\cap}(G,B))'=(F,A)'\widetilde{\cap}(G,B)'$。

证明 (1)设$(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)=(H,A\cup B)$,其中
$$H(x)=\begin{cases}F(x), & x\in A-B\\ G(x), & x\in B-A\\ F(x)\cup G(x), & x\in A\cap B\end{cases}$$
因此,$((F,A)\widetilde{\cup}(G,B))'=(H,A\cup B)'=(H',\neg A\cup\neg B)$,其中 $\forall\neg x\in\neg A\cup\neg B$,$H'(\neg x)=(H(x))^c$。则
$$H'(\neg x)=\begin{cases}F'(\neg x), & x\in\neg A-\neg B\\ G'(\neg x), & x\in\neg B-\neg A\\ F'(\neg x)\cup G'(\neg x), & x\in\neg A\cap\neg B\end{cases}$$
另一方面,$(F,A)'\widetilde{\cup}(G,B)'=(F',\neg A)\widetilde{\cup}(G',\neg B)=(K,\neg A\cup\neg B)$,其中
$$K(\neg x)=\begin{cases}F'(\neg x), & x\in\neg A-\neg B\\ G'(\neg x), & x\in\neg B-\neg A\\ F'(\neg x)\cup G'(\neg x), & x\in\neg A\cap\neg B\end{cases}$$
故$((F,A)\widetilde{\cup}(G,B))'=(F,A)'\widetilde{\cup}(G,B)'$。

(2)设$(F,A)\widetilde{\cap}(G,B)=(H,A\cap B)$,其中 $\forall x\in A\cap B$,$H(x)=F(x)$或 $G(x)$;则$((F,A)\widetilde{\cap}(G,B))'=(H,A\cap B)'=(H',\neg A\cap\neg B)$。

另一方面,$(F,A)'\widetilde{\cap}(G,B)'=(F',\neg A)'\widetilde{\cap}(G',\neg B)=(k,\neg A\cap\neg B)$,其中 $\forall\neg x\in\neg A\cap\neg B$,$K(\neg x)=F'(\neg x)$或 $G'(\neg x)=(F(x))^c$或$(G(x))^c=H'(\neg x)$;故$((F,A)\widetilde{\cap}(G,B))'=(F,A)'\widetilde{\cap}(G,B)'$。

同样,根据定义 8 容易验证软 Vague 关系的并、交运算满足结合律、分配律:

定理 7 设(F,A)、(G,B)及(H,C)为 U 上的三个软 Vague 关系,则

(1)$(F,A)\widetilde{\cup}((G,B)\widetilde{\cup}(H,C))=((F,A)\widetilde{\cup}(G,B))\widetilde{\cup}(H,C)$;

(2)$(F,A)\widetilde{\cap}((G,B)\widetilde{\cap}(H,C))=((F,A)\widetilde{\cap}(G,B))\widetilde{\cap}(H,C)$;

(3)$(F,A)\widetilde{\cup}((G,B)\widetilde{\cap}(H,C))=((F,A)\widetilde{\cup}(G,B))\widetilde{\cap}((F,A)\widetilde{\cup}(H,C))$;

(4)$(F,A)\widetilde{\cap}((G,B)\widetilde{\cup}(H,C))=((F,A)\widetilde{\cap}(G,B))\widetilde{\cup}((F,A)\widetilde{\cap}(H,C))$。

4 结束语

关于软集理论的研究与应用受到了众多学者越来越多的关注。本文将软集的思想初步应用于 Vague 关系,提出了软 Vague 关系的一些基本概念,给出了软 Vague 关系的$\widetilde{\vee}$、$\widetilde{\wedge}$以及并、交、补运算的概念,并研究了它们的若干代数性质。

参考文献:

[1] Zadeh L A.Fuzzy sets[J].Information and Control,1965,8(3):338-353.

[2] Gau W L,Buehrer D J.Vague sets[J].IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics,1993,23(2):610-614.

[3] Molodtsov D. Soft set theory——first results[J].Computers and Mathematics with Applications,1999,37:19-31.

[4] Maji P K,Biswas R,Roy A R.Soft set theory[J].Computers and Mathematics with Applications,2003,45:555-562.

[5] Aktas H,Cagman N.Soft sets and soft groups[J].Information Science,2007,177(13):2726-2735.

[6] Chen D,Tsang E C C,Yeung D S,et al.The parametrization reduction of soft sets and its applications [J].Computers and Mathematics with Applications,2005,49:757-763.

[7] Feng F,Jun Y B,Zhao X.Soft semirings [J].Computers and Mathematics with Applications,2008,56(10):2621-2628.

[8] Jun Y B,Park C H.Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras[J].Information Science,2008,178(11):2466-2475.

[9] 梁家荣.Vague 关系[J].计算机工程与应用,2005,41(30):10-12.

[10] 杨海龙,李生刚.Vague 关系的核与闭包[J].计算机工程与应用,2007,43(36):21-24.