

# RHIC 能区下超子极化转移的统计误差分析

韩 然<sup>1,2</sup>, 冒亚军<sup>2</sup>

(1. 华北电力大学 核科学与工程学院, 北京 102206;

2. 北京大学 物理学院 核物理与核技术国家重点实验室, 北京 100871)

**摘要:**在测量 RHIC/PHENIX 上超子极化转移过程中,对极化转移的统计误差进行计算,并根据最小二乘法估计了极化转移的统计误差  $\sigma_{D_{LL}}$  与单自旋不对称的统计误差  $\sigma_{A_L}$  之间至少有 2.7 倍的差异。用简单的蒙特卡罗模拟验证了这个差异是确实存在的,估计计算与模拟的一致性证明在最后求解极化转移过程中设置统计误差的正确性。

**关键词:**极化转移;统计误差;蒙特卡罗模拟

**中图分类号:** O571.418; O572.23; O411.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-6931(2009)07-0582-04

## Statistical Error of Spin Transfer to Hyperon at RHIC Energy

HAN Ran<sup>1,2</sup>, MAO Ya-jun<sup>2</sup>

(1. School of Nuclear Science and Engineering,

North China Electric Power University, Beijing 102206, China;

2. School of Physics and State Key Laboratory of Nuclear Physics & Technology,

Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** From the RHIC/PHENIX experiment data, it is found that the statistical error of spin transfer is few times larger than the statistical error of the single spin asymmetry. In order to verify the difference between  $\sigma_{D_{LL}}$  and  $\sigma_{A_L}$ , the linear leastsquares method was used to check it first, and then a simple Monte-Carlo simulation to test this factor again. The simulation is consistent with the calculation result which indicates that the few times difference is reasonable.

**Key words:** spin transfer; statistical error; Monte-Carlo simulation

在涉及微观粒子的测量中,除通常测量中碰到的系统误差、偶然误差和过失误差外,在随机测量过程中,还存在一种独特的起伏现象,即重复测量的值并不相同,与测量仪器、环境状态以及观测人员的主观素质均无关,是测量中能

达到的最高精度,此种误差称之为统计误差。这种误差不是测量引进的,而是微观事件本身具有的,与统计量是相关的。

1990年,在美国布鲁克海文实验室(Brookhaven National Laboratory, BNL)建造

了相对论重离子碰撞环(Relativistic Heavy Ion Collider, RHIC)。RHIC 的圆形储存环长约 3.83 km,环上设计有 6 个可使粒子碰撞的点,最多可有 120 束粒子束注入,每束粒子通过对撞点的时间是 106 ns。最初,RHIC 的设计是对极化的质子束可达到 70% 的极化度<sup>[1]</sup>。在 RHIC 上有 4 个较为重要的实验组,STAR 和 PHENIX 是其中两个比较大的实验组。在 RHIC 圆形环上,有两个极化方向相反的质子束流(或其他重离子束流)在环内流转,且在各实验组所在点发生碰撞。每个纵向极化的束流又有两个螺旋度方向,即与束流运行方向平行的螺旋度和反平行的螺旋度。这样,数据收集时则有 4 种对撞的数据,即++、+-、-+和--。每组对撞数据均会被 PHENIX 或 STAR 纪录。

本工作基于 PHENIX 的实验,计算超子极化转移(极化转移是指质子束流的极化转移给最后的产物(如 $\bar{\Lambda}$ )的几率,即测量 $\bar{\Lambda}$ 产物的极化度与初始的质子极化度之间的关系<sup>[2-3]</sup>)的统计误差。

## 1 单自旋不对称的统计误差

自旋不对称是指在一定反应中正向极化产生的粒子和负向极化产生的粒子数目的不同。单自旋不对称是指初始束流只有 1 个是极化的情况。RHIC 上有两束极化的束流,若将 1 条束流所有螺旋度相加,制造出 1 条不极化的束流,这样可相当于只有 1 条束流是极化的。单自旋不对称的定义式为:

$$A_L = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\sigma_+ + \sigma_-} \quad (1)$$

其中: $\sigma_+$ ( $\sigma_-$ )是 pp 碰撞反应中 1 束入射质子的螺旋度为正(负)时产生的某粒子的截面。

反应截面可通过实验产生的粒子数除以积分亮度得到,如果认为探测器的接受度对正、负螺旋度时均相同,那么,式(1)可重写为:

$$A_L = \frac{1}{P_B} \cdot \frac{N_+ - RN_-}{N_+ + RN_-} \quad (2)$$

式中: $P_B$ 为 RHIC 上极化束流的极化度; $R$ 为相对积分亮度,对于一定年份的数据是固定的; $N_+$ 和  $N_-$ 为这个极化束流在不同的螺旋度下(平行于束流方向和反平行于束流方向)得到的

某个具有特定的不变质量的粒子的数目。

根据式(2),对于  $A_L$  的统计误差可从粒子数来确定。为方便具体考察,先假定在某时间间隔内具有特定特征(如有特定的不变质量)的粒子有  $N$  个,且全部入射到探测器上,探测器对入射粒子的探测效率为  $\epsilon$ ,未引起计数的概率为  $1-\epsilon$ ,这相当于 1 个伯努利实验。 $N$  个入射粒子引起的计数为  $n$ , $n$  也是一随机变量,服从一定的分布。当假设入射到探测器上的粒子数  $N$  服从平均值为  $M$  的泊松分布时,引起的探测器的计数  $n$  服从平均值为  $M\epsilon$  的泊松分布,即探测到的事例数与产生的事例数服从同样的分布。换言之,实验保持客观规律的原始分布或固有特征不变。这是物理分析的实验基础。当  $n$  较大时,泊松分布可化为高斯分布,对于高斯分布,粒子数的统计误差可化为  $\sigma = 1/\sqrt{n}$ <sup>[4]</sup>。对于  $n$ ,可通过直接测量得到,一般称为直接测量值。单自旋不对称和极化转移均为不可直接测量的值,而是与直接测量的值通过一定的函数关系得到的,一般称为间接测量值。这样,对于间接测量值的误差,如果是简单的函数形式,则可通过误差传递公式得到。

在式(2)中, $N_+$ 和  $N_-$ 的统计误差分别为  $1/\sqrt{N_+}$ 和  $1/\sqrt{N_-}$ 。根据误差传递公式<sup>[5]</sup>,可间接得到  $A_L$  的误差,为:

$$\sigma_{A_L} = \frac{1}{P_B} \left[ \left( \frac{2RN}{(N_+ + RN_-)^2} \right)^2 N_+ + \left( \frac{-2RN_+}{(N_+ + RN_-)^2} \right)^2 N_- \right]^{1/2} \approx \frac{1}{P_B} \cdot \frac{1}{\sqrt{N_{\text{tot}}}} \quad (3)$$

式中: $N_{\text{tot}} = N_+ + N_-$ 。

## 2 极化转移的统计误差

RHIC 上极化转移  $D_{LL}$  的计算方法<sup>[7]</sup>为:

$$\alpha_L(\cos \theta) = \alpha D_{LL} \cos \theta \quad (4)$$

式中: $\alpha_L(\cos \theta) = \frac{1}{P_B} \cdot \frac{N_+(\cos \theta) - RN - \cos \theta}{N_+(\cos \theta) + RN - \cos \theta}$ ;  
 $\alpha = -0.642 \pm 0.013$ ,为在 $\bar{\Lambda}$ 参考系中的衰变参数; $\theta$ 为在 $\bar{\Lambda}$ 参考系中衰变质子的动量方向与  $e_3$  的夹角, $e_3$  为在质心系下 $\bar{\Lambda}$  的动量方向。

从式(2)可看出, $A_L$  与直接观测量是简单的函数关系,误差可直接由误差传递公式得到。对于  $D_{LL}$ ,尽管也是间接测量量,但不能由简单的误差传递公式进行计算得到。根据式(4),

$D_{LL}$  是  $\alpha_L(\cos \theta)$  和  $\cos \theta$  的线性方程的斜率。对  $D_{LL}$  的误差求解,一般是先用最小二乘法<sup>[6]</sup> 拟合出  $\alpha_L(\cos \theta)$  与  $\cos \theta$  间关系的 1 条最佳直线,  $D_{LL}$  是这条拟合直线返回的斜率,而  $D_{LL}$  的误差也可从拟合过程中求得。

最小二乘法首先要确定函数的形式。从极化转移的计算方法可看出,这是一次线性方程。为表述方便,首先将线性方程用比较熟悉的参量表示为:

$$y = a + bx \quad (5)$$

式中:  $y$  相当于  $\alpha_L(\cos \theta)$ ;  $x$  即为  $\cos \theta$ ;  $b$  相当于  $\alpha D_{LL}$ 。

这样,可利用最小二乘法和实验数据来确定式(5)中的待定常数  $a$  和  $b$ 。这里讨论最简单的情况,即假定  $x$  和  $y$  中仅  $y$  有明显的测量随机误差,这与实际情况相同,认为  $\cos \theta$  无误差,而  $\alpha_L(\cos \theta)$  有误差。对测量误差,可归结为  $y$  的测量偏差,有:

$$\sigma_i = y_i - (a + bx_i) \quad (6)$$

根据最小二乘法的原理,偏差的平方和应为最小,这样,未知系数  $b$  为:

$$b = \frac{\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2 - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2} \quad (7)$$

式中,  $\sum$  代表  $\sum_{i=1}^n$ 。

$b$  的误差  $\sigma_b$  为:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_j \left(\frac{1}{\sigma_j^2}\right) - \frac{1}{\sigma_j} \left(\frac{x}{\sigma_j^2}\right)}{n \left(\frac{1}{\sigma_j^2}\right) \left(\frac{x^2}{\sigma_j^2}\right) - n \left(\frac{x}{\sigma_j^2}\right)^2}}}{\quad} \quad (8)$$

如果实验是在已知和满足线性关系下进行,那么,用最小二乘法线性拟合可解得斜率(式(7))和其误差(式(8)),从而得出线性方程。

### 3 $\sigma_{A_L}$ 和 $\sigma_{D_{LL}}$ 间的差别

#### 3.1 简单的估算

从式(8)很难直接估算出  $\sigma_b(\sigma_{D_{LL}})$ ,为了判断最后结果的准确性,用 1 个简单的例子来进行估算。假设  $y$  的每个测量值皆是等精度的,即  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_i$ ,式(7)则变为:

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad (9)$$

$b$  的误差  $\sigma_b = \frac{\sigma_i}{\sqrt{n \overline{x^2} - \overline{x}^2}}$ ,将参量换为  $\sigma_{D_{LL}}$ ,则:

$$\sigma_{D_{LL}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{n \overline{\cos^2 \theta} - n(\overline{\cos \theta})^2}} \quad (10)$$

$\sigma_i$  是在每个  $\cos \theta$  区间下的  $A_L$  的统计误差。这样,式(10)即可用来估计  $\sigma_{D_{LL}}$  和  $\sigma_{A_L}$  间的差别,这个差别与  $\cos \theta$  的取值范围有关。这里,取与实验数据相同的  $[-1.0, 1.0]$  区间为例。需强调的是,  $\cos \theta$  在估算中均匀分布,但在数据内并非如此。在此区间下,式(10)中:

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{\int_{-1.0}^{1.0} \rho(\cos \theta) \cos^2 \theta d\cos \theta}{\int_{-1.0}^{1.0} \rho(\cos \theta) d\cos \theta} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_{-1.0}^{1.0} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{\cos \theta} = \frac{\int_{-1.0}^{1.0} \rho(\cos \theta) \cos \theta d\cos \theta}{\int_{-1.0}^{1.0} \rho(\cos \theta) d\cos \theta} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos^2 \theta \Big|_{-1.0}^{1.0} = 0$$

$$\sigma_i = \sqrt{n} \sigma_{A_L}$$

因此,从式(10)可计算出  $\sigma_{D_{LL}} = 2.7 \sigma_{A_L}$ 。

#### 3.2 蒙特卡罗模拟验证

PHENIX 的数据分析采用分析软件 ROOT<sup>[8]</sup>,并用拟合公式返回的斜率和其误差作为最终结果。蒙特卡罗方法模拟也基于估算的假设,即  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_i$ 。随机产生 500K 的  $N_+$  事件和 500K 的  $N_-$  事件,并保证  $N_+$  和  $N_-$  为均匀分布。由于产生的模拟事件数相同,因此,相对积分亮度  $R = 1$ 。在这里,还假设束流的极化度  $P_B = 1$ 。 $N_+$  和  $N_-$  的分布示于图 1。

根据式(3),可估计出  $\sigma_{A_L} = 1/\sqrt{10^6} = 0.001$ 。若将图 1 中  $\cos \theta$  分为 5 个区间,将这两组数据( $N_+$  和  $N_-$ )的差分别除以它们的和即可得到  $\alpha_L(\cos \theta)$  随  $\cos \theta$  的分布(图 2)。然后,用 ROOT 提供的直线拟合方程拟合这个分布,斜率即为  $D_{LL}$ 。从返回的值可见,  $\sigma_{D_{LL}} = 0.00275 \approx 2.7 \sigma_{A_L}$ ,从而表明 ROOT 拟合结果与前面估算的结果一致。这样,从估算和模拟两方面验证了在求解  $D_{LL}$  的过程中得到的统计误差是可信的。

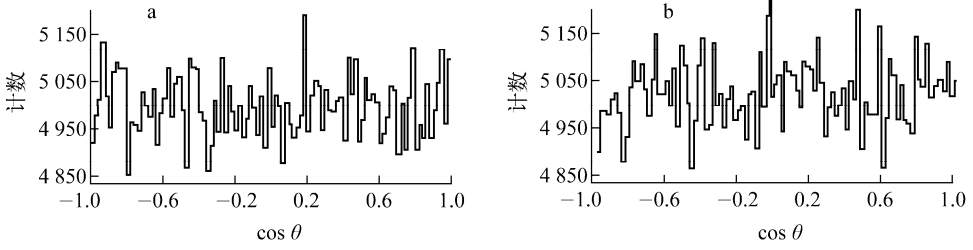


图 1 蒙特卡罗方法模拟随机产生的  $\cos \theta$  分布

Fig. 1 Uniform random  $\cos \theta$  distribution in Monte-Carlo simulation

a——共产生 500K  $N_+$  均匀分布的事件;b——共产生 500K  $N_-$  均匀分布的事件  
 $\cos \theta$  区间为  $[-1.0, 1.0]$

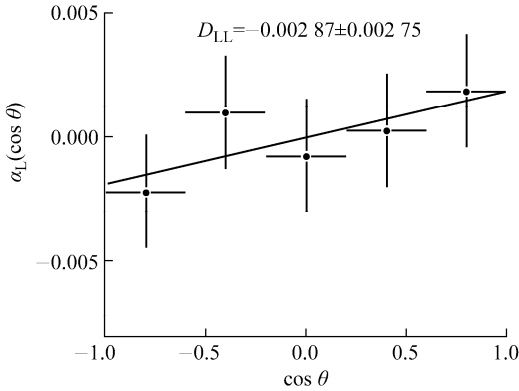


图 2 蒙特卡罗方法模拟  $a_L(\cos \theta)$  随  $\cos \theta$  的分布

Fig. 2  $a_L(\cos \theta)$  vs.  $\cos \theta$  distribution using Monte-Carlo simulation

### 4 结论

在 RHIC/PHENIX 计算极化转移过程中,对极化转移的统计误差进行了计算。在 RHIC 自旋物理中,单自旋不对称  $A_L$  是经常观测的量,也是其它观测量的参照。而本工作所计算的极化转移  $D_{LL}$  的统计误差与  $A_L$  的相差了 3 倍。从式(4)中,初始想法认为它们的误差应仅相差 1.5 倍。然而,通过一简单的算例估算了极化转移的统计误差和单自旋不对称的统计误差间至少相差 2.7 倍,并用  $10^6$  个模拟数据验证了这个差别的正确性。将这一结果对 PHENIX 组内成员公开,得到了组内成员的一致同意<sup>[9]</sup>。

### 参考文献:

[1] CHRISTINE A A. Measurement of the trans-

verse single-spin asymmetry for mid-rapidity production of neutral pions in polarized  $p + p$  collisions at 200 GeV center-of-mass energy[C/OL]. (2006-06) [2008-03-17]. [http://www.phenix.bnl.gov/WWW/publish/caidala/Thesis/aidala\\_thesis\\_printable.pdf](http://www.phenix.bnl.gov/WWW/publish/caidala/Thesis/aidala_thesis_printable.pdf).

[2] LIU C X, LIANG Z T. Spin structure and longitudinal polarization of hyperon in  $e^+ e^-$  annihilation at high-energies[J]. Phys Rev D, 2000, 62: 094001-094027.

[3] LIU C X, XU Q H, LIANG Z T. Hyperon polarization in semiinclusive deeply inelastic lepton nucleon scattering at high-energy[J]. Phys Rev D, 2001, 64: 073004-073034.

[4] 贾晴鹰. BES 实验寻找  $\Xi^*$  重子激发态的可能性及  $J/\Psi \rightarrow p n \pi^-$  衰变道的研究[R]. 北京:北京大学技术物理系,2003.

[5] 朱永生. 实验物理中的概率与统计[M]. 北京:科学出版社,2006:67-68.

[6] 刘智敏. 误差分布论[M]. 北京:原子能出版社,1988:263-288.

[7] HAN Ran. Polarization of anti-lambda in  $s = 200$  GeV polarized proton-proton collision [J]. High Energy Physics and Nuclear Physics, 2007, 31(12): 1 189-1 191.

[8] BRUN R, RADEMAKERS F, CANAL P, et al. ROOT user's guide V5.16[Z/OL]. (2007-07) [2008-03-17]. <http://root.cern.ch/root/doc/RootDoc.htm>.

[9] HAN Ran. The spin transfer to anti-lambda from  $p+p$  collision[R/OL]. (2007-11) [2008-03-17]. [http://www.phenix.bnl.gov/WWW/plots/show\\_plot.php?editkey=p0722](http://www.phenix.bnl.gov/WWW/plots/show_plot.php?editkey=p0722).