

近似弧长参数化 Bézier 曲线的最佳逼近

白鸿武, 叶正麟, 王树勋, 石 茂

BAI Hong-wu, YE Zheng-lin, WANG Shu-xun, SHI Mao

西北工业大学 理学院, 西安 710072

Faculty of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

E-mail: baihongwu825@tom.com

BAI Hong-wu, YE Zheng-lin, WANG Shu-xun, et al. The best approximation of nearly arc-length parameterized Bézier curves. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(27): 8-9.

Abstract: In this paper, we consider the problem of the approximation of nearly arc-length parameterized Bézier curves. When a nearly arc-length parameterization^[1] for a Bézier curve has been obtained, the parameterization could only acquire C^0 -continuity. To increase the parametric continuity, we use its best approximation with constraints at the endpoints with respect to L_2 -norm to get a Bézier spline curve with C^2 -continuity. Experiment proves that the effect of this approximation is quite satisfactory.

Key words: Bézier curves; arc-length parameterization; approximation

摘 要: 考虑近似弧长参数化 Bézier 曲线的逼近问题。当获得 Bézier 曲线的一个近似弧长参数化^[1]之后, 这种参数化只能达到 C^0 -连续性。为了增加其参数连续性, 利用其带有端点约束的关于 L_2 -模的最佳逼近以得到具有 C^2 -连续性的 Bézier 样条曲线。实验证明, 这种逼近的效果是十分理想的。

关键词: Bézier 曲线; 弧长参数化; 逼近

文章编号: 1002-8331(2007)27-0008-02 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391

曲线参数化可以在许多领域中找到其应用。如果视参数曲线为空间运动物体的运动轨迹, 那么一般而言人们希望这条轨迹足够的光滑。这个要求实际上反映了曲线的某种内在几何性质, 即曲线的几何连续性。另一方面, 如果认为曲线的参数表示时间的话, 那么希望空间物体随着时间的变化在这条轨迹上能够平稳地运动, 这实际上要求参数域上均匀分布的点对应于参数曲线上均匀分布的点。众所周知, 多项式性质的 Bézier 曲线可以很好地满足前一要求, 但一般而言却很难满足后一个要求。为改善这种状况, Farouki^[1]提出了参数曲线的优化标准, 并按这个标准实现了多项式形式参数曲线的重新参数化。然而, 这种优化是在特殊的参数变换下按特殊的度量标准来实现的, 并非绝对意义下的最优。而且, 这种参数化还有以下的不足: (1) 参数化的效果无法得到控制; (2) 参数化前、后曲线的性质发生了实质性的变化, 即将多项式形式的曲线变成了有理形式的曲线。为克服上述不足, 文[2]也研究了 Bézier 曲线的参数化问题, 基本克服了 Farouki 方法的以上缺点, 但也带来了新的问题: 即参数化后曲线的参数连续性只能达到 C^0 。但是在自控精密机械加工以及机器人运动学领域中往往需要参数曲线具有 C^2 连续性^[3]。为此, 给出文[2]参数化曲线某种意义下的最佳逼近, 该逼近可以达到 C^2 连续性的要求。

1 问题分析

设

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), t \in [0, 1] \quad (1)$$

是一条空间 Bézier 曲线, 且设曲线(1)已按文[1]的方法进行了近似弧长参数化, 得到了由以下诸条 Bézier 曲线所构成的 Bézier 样条曲线:

$$\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_k(t) \quad (2)$$

其中每条 Bézier 曲线 $\mathbf{r}_i(t)$ 的长度均近似相等。如果将(2)中诸条 Bézier 曲线的参数全局化, 那么新曲线的几何连续性没有发生变化, 但参数连续性却只能达到 C^0 。现在设

$$\mathbf{r}_s(t) = \sum_{i=0}^n P_{s,i} B_i^n(t) \quad s=1, \dots, k, t \in [0, 1] \quad (3)$$

为使 Bézier 样条曲线达到 C^2 连续性, 设 $\mathbf{r}_s(t)$ 有一个近似表示:

$$\tilde{\mathbf{r}}_s(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{P}_{s,i} B_i^n(t) \quad s=1, \dots, k, t \in [0, 1] \quad (4)$$

使得

$$\overset{(p)}{\mathbf{r}}_s(0) = \overset{(p)}{\mathbf{r}}_{s-1}(1) \quad s=2, \dots, k, p=0, 1, 2 \quad (5)$$

显然, 为使式(5)成立, 只需

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60672135)。

作者简介: 白鸿武(1959-), 男, 在读博士, 副教授, 主要研究方向: CAGD; 叶正麟(1943-), 男, 博士生导师, 教授, 主要研究方向: 计算几何、计算机图形学、图像处理; 王树勋(1964-), 男, 在读博士, 副教授, 主要研究方: CAGD; 石茂(1974-), 男, 博士生, 讲师, 主要研究方向: 计算几何、计算机图形学、图像处理。

$$\Delta \tilde{\mathbf{P}}_{s,0} = \Delta \tilde{\mathbf{P}}_{s-1,n-i} \quad i=0,1,2,s=2,\cdots,k \quad (6)$$

现在的问题是如何选取(6)中的 $\Delta \tilde{\mathbf{P}}_{s,0} = \Delta \tilde{\mathbf{P}}_{s-1,n-i}$ 。不难看出,一个最自然的办法就是让

$$\Delta \tilde{\mathbf{P}}_{s,0} = \Delta \tilde{\mathbf{P}}_{s-1,n-i} = \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{P}_{s,0} + \Delta \mathbf{P}_{s-1,n-i}) \quad i=0,1,2,s=2,\cdots,k \quad (7)$$

现在的目的是求满足条件(7)的曲线(4)使得对其各个坐标分量来说

$$\begin{aligned} \|r_s(t) - \tilde{r}_s(t)\|_2 &= \left\| \sum_{i=0}^n (P_{s,i} - \tilde{P}_{s,i}) B_i^n(t) \right\|_2 = \\ &= \left\| \sum_{i=0}^n C_{s,i} B_i^n(t) \right\|_2 \quad s=1,\cdots,k \end{aligned} \quad (8)$$

达到最小,其中

$$C_{s,i} = P_{s,i} - \tilde{P}_{s,i} \quad s=1,\cdots,k \quad (9)$$

式(8)与(9)是按空间点的各个分量来描述的。为使式(8)达到最小,可写出

$$\sum_{i=0}^n C_{s,i} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^2 C_{s,i} B_i^n(t) + \sum_{i=n-2}^n C_{s,i} B_i^n(t) - \left(- \sum_{i=3}^{n-3} C_{s,i} B_i^n(t) \right) \quad s=1,\cdots,k \quad (10)$$

从而欲使式(8)达到最小,只需

$$\sum_{i=0}^n C_{s,i} B_i^n(t) \perp V_0 \quad (11)$$

这里 V_0 是 P_n 的由 $B_3^n(t), \cdots, B_{n-3}^n(t)$ 所张成的子空间。为使式(11)成立,只需

$$\left\langle \sum_{i=0}^n C_{s,i} B_i^n(t), B_l^n(t) \right\rangle = 0 \quad l=3,\cdots,n-3 \quad (12)$$

从而上式可写成

$$0 = \sum_{i=0}^n C_{s,i} \int_0^1 B_i^n(t) B_l^n(t) dt \quad l=3,\cdots,n-3 \quad (13)$$

由此可得

$$\sum_{i=0}^n C_{s,i} \alpha_{l,i} = 0 \quad l=3,\cdots,n-3 \quad (14)$$

其中

$$\alpha_{l,i} = \frac{(i+l)! (2n-i-l)!}{i! (n-i)!} \quad l=3,\cdots,n-3, i=0,\cdots,n \quad (15)$$

因此有

$$\sum_{i=3}^{n-3} C_{s,i} \alpha_{l,i} = - \left(\sum_{i=0}^2 C_{s,i} \alpha_{l,i} + \sum_{i=n-2}^n C_{s,i} \alpha_{l,i} \right) \quad l=3,\cdots,n-3 \quad (16)$$

这是含有 $n-5$ 个未知量、 $n-5$ 个方程的线性方程组,故可求解。注意对各段 Bézier 曲线 $r_s(t)$ 以及它的各个分量而言,它们的系数矩阵都是相同的,因此最好用 Doolittle 分解法来对这些线性方程组进行求解。另外在每段 Bézier 曲线 $r_s(t)$ 两端都施加了额外的约束,因此在应用上述算法之前应该对它们至少升阶 4 阶,以降低这种逼近所带来的误差。这可以通过利用文[4]中的多阶降阶公式来得到。若

$$g(t) = \sum_{k=0}^m g_k B_k^m(t) \quad t \in [0,1] \quad (17)$$

是一条 m 次 Bézier 曲线,而

$$g(t) = \sum_{k=0}^n \tilde{g}_k B_k^n(t) \quad t \in [0,1] \quad (18)$$

是式(17)的从 m 次到 n 次的升阶 Bézier 曲线,则

$$\tilde{g}_k = \sum_{i=\max(0, k+m-n)}^{\min(k, m)} g_i \binom{k}{i} \binom{n-k}{m-i} \binom{n}{m} \quad (19)$$

2 算法设计

现在将给出实现上章所讨论的逼近方法的算法。假设已按文[1]中方法获得了 Bézier 样条曲线(2),本文算法可以描述如下:

步骤 1 将式(2)中每条 Bézier 曲线 $r_s(t)$ 升阶到 $m (\geq n+4)$ 次。 $r_s(t)$ 升阶后的曲线仍用 $r_s(t)$ 来表示, $r_s(t)$ 升阶后的次数 m 仍用 n 来表示。

步骤 2 根据式(15)计算系数矩阵 A 的元素 $\alpha_{l,i}$ 以及矩阵 A 的 Doolittle 分解 $A=LU$ 。

步骤 3 计算由式(7)所给出的所有差分 $\Delta \tilde{\mathbf{P}}_{s,0} = \Delta \tilde{\mathbf{P}}_{s-1,n-i}$ 以及相应的控制顶点 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,i}$ 及 $\tilde{\mathbf{P}}_{s-1,n-i}, i=0,1,2,s=2,\cdots,k$ 。对于 Bézier 曲线 $r_l(t)$ 取 $\tilde{\mathbf{P}}_{1,i} = \mathbf{P}_{1,i}$, 而对于 Bézier 曲线 $r_k(t)$ 取 $\tilde{\mathbf{P}}_{k,n-i} = \mathbf{P}_{k,n-i}, i=0,1,2$ 。

步骤 4 对每条 Bézier 曲线 $r_s(t), s=2,\cdots,k$, 就每个坐标分量利用第 2 步得到的 Doolittle 分解求解由式(16)所给出的线性方程组,得到所有的那些 $C_{s,i}$ 。然后,对 $i=3,\cdots,n-3$ 计算相应的控制顶点 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,i}$ 。

步骤 5 将由步骤 3 与步骤 4 所获得的 Bézier 控制顶点代入到式(4)中从而得到 Bézier 曲线(1)的具有 C^2 -连续性的最佳逼近。

现在给出一个例子来说明利用本文的方法进行逼近的效果。这里取一条四次平面 Bézier 曲线,其控制顶点为(2,0), (4,3), (3.8,3.4), (2,5)及(1.5,4.5)。经两层细分后,得到了一条如式(2)中所给出的由 4 条 Bézier 曲线所组成的 Bézier 样条曲线。然后,上述算法被用于这条生成的 Bézier 样条曲线。图 1 显示了原来的 Bézier 曲线,而图 2 则是利用本文的算法所得到的 Bézier 样条曲线的最佳逼近。如果将这两条曲线叠在一起,

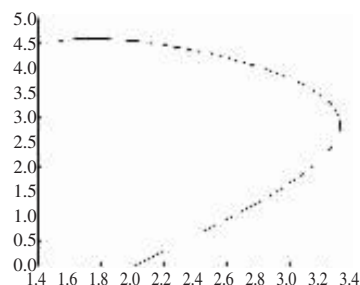


图 1 原有的 Bézier 曲线

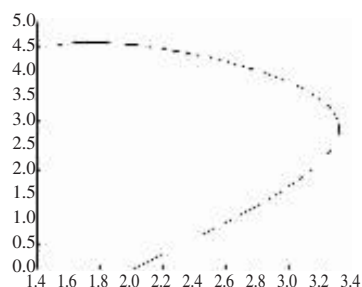


图 2 本文算法生成的 Bézier 曲线的最佳逼近

(下转 17 页)