

# 太阳非线性无力磁场的边界积分表示公式

李柱恒<sup>1,2</sup>, 颜毅华<sup>2</sup>, 宋国乡<sup>1</sup>

(1. 西安电子科技大学 理学院 陕西 西安 710071 ;  
2. 中国科学院 国家天文台 北京 100012 )

**摘要 :** 颜毅华和樱井 2000 年就太阳磁场提出了一个具有有限能量的非线性无力场模型 ,并对磁场给出了一个边界积分表示公式 ,用边界上的已知磁场值和未知的磁场法向导数值来确定空间任意点的磁场值 .文中提出了一个新的直接边界积分公式 ,仅仅由边界上的已知磁场值确定空间点的磁场值 .用颜的公式计算空间点的磁场值时 ,必须先求出边界上磁场的法向导数 ,并且求法向导数需要花较长的时间 .而用新的直接边界积分公式计算空间点的磁场值时 ,不需要计算边界上磁场的法向导数 ,这样就可节省时间 .相对于颜所给的公式而言 ,用新的公式计算磁场具有计算速度快精度高的优点 .  
**关键词 :** 太阳磁场 ;太阳日冕 ;太阳活动区  
**中图分类号 :** O175.8      **文献标识码 :** A      **文章编号 :** 1001-2400( 2005 )06-0968-05

## A boundary integral formulation for solar nonlinear force-free magnetic fields

LI Zhu-heng<sup>1,2</sup>, YAN Yi-hua<sup>2</sup>, SONG Guo-xiang<sup>1</sup>

( 1. School of Science , Xidian Univ. , Xi'an 710071 , China ;  
2. National Astronomical Observatory , Chinese Academy of Science , Beijing 100012 , China )

**Abstract :** A boundary integral equation for describing a nonlinear force-free magnetic field with the finite energy content in the open space above the solar surface was proposed ( Yan & Sakurai , 2000 ) , which contains the boundary magnetic field and its normal gradient under the right integral sign. We present a new direct boundary integral equation in terms of the boundary magnetic field only. While calculating magnetic field values at space points by Yan's equation , we must first calculate the normal gradient of the magnetic field at the boundary , and it must take much time to calculate the magnetic normal gradient ; but while calculating magnetic field by the new direct equation , we need not calculate the magnetic normal gradient. Compared with Yan's equation , to calculate the field using this new equation has the advantages of speediness and nicety.  
**Key Words :** solar magnetic fields ; solar corona ; solar active region

整个太阳球体从日心往外可依次分为 6 个球层 :日核 ,中层 ,对流层 ,光球 ,色球 ,日冕 .太阳大气中到处存在磁场 ,目前在观测方面只能对光球层的磁场分布用光学方法进行比较精确的测量 ,对色球磁场可做精度稍差的观测 ,对日冕磁场只能用射电方法粗略估计 .因此 ,对于光球以上的太阳大气中的磁场 ,在某种模型假定下 ,以观测的光球磁场数据为边值 ,进行理论外推 .人们主要用非线性无力场微分模型来刻画太阳磁场<sup>[1~5]</sup> .Yan & Sakurai<sup>[6]</sup>首次提出了一个具有有限能量的非线性无力场模型 ,依据该模型以光球层观测数据为边界条件外推日冕磁场 ,给出了一个有关磁场的边界积分表示公式 .在 Yan & Sakurai<sup>[6]</sup>工作的基础上 ,笔者提出了一个有关磁场的新的直接边界积分表示公式 .

### 1 简述 Yan & Sakurai 的模型

模拟光球外围空间磁场的非线性无力磁场模型描述如下 .用  $\Gamma$  表示太阳光球表面 , $\Omega$  表示光球外围开放空

收稿日期 2005-05-11  
基金项目 国家自然科学基金资助项目( 10225313 )  
作者简介 李柱恒( 1965- ) ,男 ,副教授 ,西安电子科技大学博士研究生 .

间 即  $\Gamma = \{x \ y \ z) | r = |xi + yj + zk| = R\}$   $\Omega = \{(x \ y \ z) | r = |xi + yj + zk| > R\}$   $R$  是太阳光球半径.

在  $\Omega$  中, 磁场  $B$  满足麦克斯韦方程  $\nabla \cdot B = 0$  , (1)

对无力场而言, 磁场  $B$  还满足  $\nabla \times B = \alpha B$  , (2)

其中  $\alpha$  是空间位置的函数, 是无力因子.

在  $\Gamma$  上, 方程所要满足的边界条件为  $B = B_0$  , (3)

$B_0$  是由观测得到的磁图所对应的边界数据. 从物理意义上讲, 磁场在无穷远处应趋近于零, 即

$$B = O(r^{-2}) \quad , \quad \text{当 } r \rightarrow \infty \quad . \quad (4)$$

方程式 (1) (2) 及狄利克莱边界条件 (3) 渐近衰减条件 (4) 一起构成了刻画太阳光球外围空间磁场的非线性无力场模型.

为求解该模型, Yan & Sakurai<sup>[6]</sup>引入函数

$$Y = \cos(\lambda((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)^{1/2}) / (4\pi((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)^{1/2}) \quad ,$$

其中参数  $\lambda$  与点  $(x_i \ y_i \ z_i)$  的位置有关. 借助格林公式, 就可将模型的求解转化为对

$$c B(x_i \ y_i \ z_i) = \int_{\Gamma} [Y(\partial B / \partial n) - B_0(\partial Y / \partial n)] d\Gamma \quad (5)$$

的求解. 其中  $c$  满足: 当  $(x_i \ y_i \ z_i) \in \Gamma$  时  $c = 1/2$ ; 否则  $c = 1$ . 下面给出一个有关磁场的新的直接边界积分表示公式.

## 2 有关磁场的新的直接边界积分表示公式

设球面  $\Gamma$  的球心为  $O$ , 对于  $\Omega$  中任意取定的点  $M(x_i \ y_i \ z_i)$ , 在线段  $OM_i$  上截线段  $OM'_i$ , 使  $\rho_0 \rho_1 = R^2$ . 其中  $\rho_0 = r_{OM_i}$ ,  $\rho_1 = r_{OM'_i}$ . 称点  $M'(x'_i \ y'_i \ z'_i)$  为  $M(x_i \ y_i \ z_i)$  关于球面的反演点. 设  $P$  是球面  $\Gamma$  上的一点, 考查三角形  $OPM_i$  及  $OPM'_i$ , 它们在点  $O$  有公共角, 而此夹角的两相应边是成比例的, 因此这两三角形相似. 由相似性得到, 对球面  $\Gamma$  上的任意点  $P$  必有  $r_{M'_iP} = R \cdot r_{MP} / \rho_0$ . 取充分大的正实数  $R'$ , 使得以点  $M(x_i \ y_i \ z_i)$  作球心,  $R'$  为半径的球包含球面  $\Gamma$ . 记  $S_{R'} = \{(x \ y \ z) | |(x - x_i)i + (y - y_i)j + (z - z_i)k| = R'\}$ . 又以  $M(x_i \ y_i \ z_i)$  为球心, 很小的正数  $\varepsilon$  为半径, 做一小球, 球面记为

$$S_{\varepsilon} = \{(x \ y \ z) | |(x - x_i)i + (y - y_i)j + (z - z_i)k| = \varepsilon\} \quad .$$

由 3 个球面  $\Gamma$ ,  $S_{R'}$ ,  $S_{\varepsilon}$  围成的区域记为  $\Omega'$ . 引入函数

$$Q(M, M_i) = Y - Y' \quad , \quad (6)$$

其中  $Y = \cos(\lambda r) / (4\pi r)$  ,  $Y' = \cos(\lambda \rho_0 r' / R) / (4\pi \rho_0 r' / R)$  ,

$$r = ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)^{1/2} \quad , \quad r' = ((x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 + (z - z'_i)^2)^{1/2}.$$

下面用  $B$  代表磁场  $B$  的 3 个分量中的任一个. 在区域  $\Omega'$  中, 函数  $B$  和  $Y$  都满足格林第二积分公式的要求, 并且在  $\Gamma$  上有  $G = 0$ . 于是, 利用格林第二积分公式, 得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} (G \nabla^2 B - B \nabla^2 G) d\Omega &= \int_{\Gamma + S_{R'} + S_{\varepsilon}} \left( G \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( -B \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma + \\ \int_{S_{\varepsilon}} \left( Y \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial Y}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{S_{\varepsilon}} \left( Y' \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial Y'}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{S_{R'}} \left( G \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma &= \\ \int_{\Gamma} \left( -B_0 \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma + I_1 - I_2 + I_3 \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

式 (7) 中有关  $I_1$  的处理方法与 Yan & Sakurai<sup>[6]</sup> 相同, 限于篇幅, 在此不详细叙述, 只给出结果:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\varepsilon}} \left( Y \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial Y}{\partial n} \right) d\Gamma = -B(x_i \ y_i \ z_i) \quad . \quad (8)$$

下面主要处理  $I_2$ ,  $I_3$  项. 在球面  $S_{\varepsilon}$  上, 有

$$\frac{\partial Y'}{\partial n} = \frac{\partial Y'}{\partial x} \cos(n \ x) + \frac{\partial Y'}{\partial y} \cos(n \ y) + \frac{\partial Y'}{\partial z} \cos(n \ z) = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho_0} \quad .$$

$$\frac{\lambda \frac{\rho_0}{R} r' \sin\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right) + \cos\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right)}{(r')^2} \left[ \frac{x - x'_i}{r'} \frac{x - x_i}{\varepsilon} + \frac{y - y'_i}{r'} \frac{y - y_i}{\varepsilon} + \frac{z - z'_i}{r'} \frac{z - z_i}{\varepsilon} \right] .$$

在球面  $S_\varepsilon$  上 ,与  $Y'$  相关的积分  $I_2$  为

$$\int_{S_\varepsilon} \left( Y' \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial Y'}{\partial n} \right) d\Gamma = 4\pi\varepsilon^2 \left[ \frac{\cos\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right)}{4\pi \frac{\rho_0}{R} r'} \frac{\partial B}{\partial n} \right]_{\text{med}} - 4\pi\varepsilon^2 \cdot \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho_0} \frac{\lambda \frac{\rho_0}{R} r' \sin\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right) + \cos\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right)}{(r')^2} \left[ \frac{x - x'_i}{r'} \frac{x - x_i}{\varepsilon} + \frac{y - y'_i}{r'} \frac{y - y_i}{\varepsilon} + \frac{z - z'_i}{r'} \frac{z - z_i}{\varepsilon} \right] B \right] , \quad (9)$$

其中  $[ \dots ]_{\text{med}}$  表示方括号内的函数在球面  $S_\varepsilon$  上的平均值 ,由式 (9) 可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left( Y' \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial Y'}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 . \quad (10)$$

在球面  $S_{R'}$  上 ,关于  $Y'$  计算得

$$\frac{\partial Y'}{\partial n} = - \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho_0} \frac{\lambda \frac{\rho_0}{R} r' \sin\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right) + \cos\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right)}{(r')^2} \left[ \frac{x - x'_i}{r'} \frac{x - x_i}{R'} + \frac{y - y'_i}{r'} \frac{y - y_i}{R'} + \frac{z - z'_i}{r'} \frac{z - z_i}{R'} \right] .$$

在球面  $S_{R'}$  上 ,与  $Y'$  相关的积分  $I_3$  计算如下 :

$$\begin{aligned} U &= \int_{S_{R'}} \left( G \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{S_{R'}} \left[ \frac{\cos(\lambda R')}{4\pi R'} - \frac{R}{\rho_0} \frac{\cos\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right)}{4\pi r'} \right] \frac{\partial B}{\partial r} d\Gamma + \\ &\int_{S_{R'}} \left\{ \frac{\lambda R' \sin(\lambda R') + \cos(\lambda R')}{4\pi R'^2} - \frac{R}{\rho_0} \frac{\lambda \frac{\rho_0}{R} r' \sin\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right) + \cos\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right)}{4\pi r'^2} \cdot \right. \\ &\left. \frac{(x - x'_i)(x - x_i) + (y - y'_i)(y - y_i) + (z - z'_i)(z - z_i)}{R' r'} \right\} B d\Gamma = \frac{1}{4\pi R'^2} \int_{S_{R'}} \left[ \cos(\lambda R') - \frac{R}{\rho_0} \cdot \right. \\ &\left. \frac{\cos(\lambda r')}{r'/R'} \right] R' \frac{\partial B}{\partial r} d\Gamma + \frac{1}{4\pi R'^2} \int_{S_{R'}} \left\{ \lambda \sin(\lambda R') + \frac{\cos(\lambda R')}{R'} - \frac{R}{\rho_0} \left[ \frac{\lambda \frac{\rho_0}{R} \sin\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right)}{(r'/R')^2} + \frac{\cos\left(\lambda \frac{\rho_0}{R} r'\right)}{r'(r'/R')^2} \right] \right. \\ &\left. \left[ 1 + \frac{(x_i - x'_i)(x - x_i) + (y_i - y'_i)(y - y_i) + (z_i - z'_i)(z - z_i)}{R'^2} \right] \right\} R' B d\Gamma . \end{aligned} \quad (11)$$

从式 (11) 不难看出 ,要想在  $R' \rightarrow \infty$  时 ,有  $U \rightarrow 0$  成立 ,只要  $B$  满足

$$R'(\partial B/\partial r) = O(R'^{-1}) \quad \text{和} \quad R'B = O(R'^{-1}) . \quad (12)$$

显然 ,式 (12) 中的第 1 个条件可由第 2 个条件推出 ,所以 ,在  $R' \rightarrow \infty$  时 ,式 (12) 与渐近性条件 (4) 是一致的 . 因此 ,在渐近性条件 (4) 下 ,由式 (11) 可得到

$$\lim_{R' \rightarrow \infty} \int_{S_{R'}} \left( G \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 . \quad (13)$$

在区域  $\Omega'$  中不难得到  $\nabla^2 Y + \lambda^2 Y = 0$  ,  $\nabla^2 Y' + \left(\lambda \frac{\rho_0}{R}\right)^2 Y' = 0$  . (14)

根据式 (1) (2) (4) (14) ,并将  $B$  换成  $B_p(p = x \ y \ z)$  ,不难得到

$$\int_{\Omega'} (G \nabla^2 B_p - B_p \nabla^2 G) d\Omega = \int_{\Omega'} \left\{ \mathcal{L}(\nabla(\nabla \cdot B) - \nabla \times (\alpha B))_p \right\} + B_p \left[ \lambda^2 Y - \left(\lambda \frac{\rho_0}{R}\right)^2 Y' \right] d\Omega =$$

$$\int_{\Omega'} \left\{ \mathcal{G} - \alpha^2 B_p - (\nabla \alpha \times B)_p \right\} + B_p \left[ \lambda^2 Y - \left( \lambda \frac{\rho_0}{R} \right)^2 Y' \right] d\Omega = \Psi_p(x_i, y_i, z_i, \lambda) < \infty \quad (15)$$

当  $R' \rightarrow \infty$  时,有  $\Omega' \rightarrow \Omega$  ,根据式( 8 )( 10 )( 13 )( 15 ) ,由式( 7 )可得( 把  $B$  换成  $B_p$  )

$$B_p(x_i, y_i, z_i) + \Psi_p(x_i, y_i, z_i, \lambda) = - \int_{\Gamma} B_{0p}(\partial G/\partial n) d\Gamma \quad (16)$$

为了保证磁场  $B_p$  在无穷远处消失 ,对于无穷远处的点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  ,必须有

$$\Psi_p(x_i, y_i, z_i, \lambda) = \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{G} - \alpha^2 B_p - (\nabla \alpha \times B)_p \right\} + B_p \left[ \lambda^2 Y - \left( \lambda \frac{\rho_0}{R} \right)^2 Y' \right] d\Omega = 0 \quad (17)$$

一般来说 ,在参数  $\lambda$  取常数时 ,式( 17 )对于任意点  $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Omega$  不能处处成立 ,但像 Yan & Sakurai<sup>[6]</sup>那样仍然假定 :对任意点  $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Omega$  ,有

$$\Psi_p(x_i, y_i, z_i, \lambda) \equiv 0 \quad (18)$$

这样一来 ,式( 18 )中的  $\lambda$  就不是常数 ,它与点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  的位置有关 ,即  $\lambda = \lambda_p(x_i, y_i, z_i)$  由式( 18 )确定 .借助式( 18 ) ,由式( 16 )可得到

$$B_p(x_i, y_i, z_i) = - \int_{\Gamma} B_{0p}(\partial G/\partial n) d\Gamma \quad (19)$$

下面求式( 19 )右端的具体表现形式 .函数  $G(M, M_i)$  还可表示成

$$G = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\cos(\lambda(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2})}{(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2}} - \frac{R \cos\left(\frac{\lambda}{R}(\rho^2 \rho_0^2 - 2R^2 \rho \rho_0 \cos \gamma + R^4)^{1/2}\right)}{(\rho^2 \rho_0^2 - 2R^2 \rho \rho_0 \cos \gamma + R^4)^{1/2}} \right] ,$$

其中  $\rho = r_{OM}$  , $\gamma$  是  $OM_i$  和  $OM$  的夹角 .在球面  $\Gamma$  上 ,有

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\rho=R} = - \left. \frac{\partial G}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = \frac{R^2 - \rho_0^2}{4\pi R} \cdot \frac{\lambda(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2} \sin(\lambda(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2}) + \cos(\lambda(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2})}{((\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2})^3} \quad (20)$$

将式( 20 )代入式( 19 ) ,最终得到外边值问题的直接边界积分表示公式

$$B_p(x_i, y_i, z_i) = \frac{\rho_0^2 - R^2}{4\pi R} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\lambda_p(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2} \sin(\lambda_p(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2}) + \cos(\lambda_p(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2})}{((\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \gamma)^{1/2})^3} B_{0p} d\Gamma \quad (21)$$

3 直接边界积分表示式的优越性

由于 Yan & Sakurai<sup>[6]</sup>的磁场边界积分表示公式( 5 )中边界  $\Gamma$  上的磁场法向导数是未知的 ,所以 ,用 Yan 的磁场边界积分表示公式计算空间点的磁场时必须分两步走 .首先 ,由如下公式

$$B_0(x_i, y_i, z_i)/2 = \int_{\Gamma} [Y(\partial B/\partial n) - B_0(\partial Y/\partial n)] d\Gamma \quad (22)$$

用边界元方法计算出边界上磁场的法向导数  $\partial B/\partial n$  ,公式( 22 )由公式( 5 )取  $c = 1/2$  得到 .然后 ,再用公式

$$B(x_i, y_i, z_i) = \int_{\Gamma} [Y(\partial B/\partial n) - B_0(\partial Y/\partial n)] d\Gamma \quad (23)$$

计算空间  $\Omega$  中任意点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  的磁场值 ,公式( 23 )由公式( 5 )取  $c = 1$  得到 .

用边界元方法计算边界上磁场的法向导数必然会遇到求解系数矩阵为稠密阵的大型线性方程组的棘手问题 .限于计算机的内存 ,在进行网格剖分时 ,不能太细 .可是 ,如果网格分得太粗 ,计算结果就不准确 .值得注意的是 ,积分公式( 23 )中的函数  $Y$  和  $\partial Y/\partial n$  在点  $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Gamma$  时是具有奇异点的函数 ,用边界元方法求磁场的法向导数时 ,如果区域剖分网格太粗 ,计算结果肯定不准确 ,法向导数一旦不准 ,后面计算的磁场值

自然就不准了.

以上导出的直接磁场边界积分表示公式( 21 )跟 Yan & Sakurai<sup>[6]</sup>的磁场边界积分表示公式( 5 )相比 ,右端积分号下不含未知磁场法向导数. 用笔者导出的新公式( 21 )计算磁场 ,没有计算磁场法向导数的环节 ,减少了计算量 ,而计算结果的精度却提高了. 另外 ,由新公式( 21 )计算磁场也可不用边界元的方法来处理 ,这是新公式的又一特点.

参考文献 :

[ 1 ] Sakurai T. Calculation of Force-Free Magnetic Field with Non-Constant  $\alpha$ [ J ]. Solar Phys ,1981 ,69( 2 ) :343-359.  
[ 2 ] Aly J J. On the Reconstruction of the Nonlinear Force-Free Coronal Magnetic Field from Boundary Data[ J ]. Solar Phys ,1989 ,120( 1 ) :19-48.  
[ 3 ] Low B C ,Low Y Q. Modeling Solar Force-Free Magnetic Fields[ J ]. Astrophys J ,1990 ,352( 3 ) :343-352.  
[ 4 ] Roumeliotis G. The Stress-and -Relax Method for Reconstructing the Coronal Magnetic Field from Vector Magnetograph Data[ J ]. Astrophys J ,1996 ,473( 12 ) :1 095-1 103.  
[ 5 ] Wang H N ,Yan Y ,Sakurai T. Topology of Magnetic Field and Coronal Heating in Solar Active Regions[ J ]. Solar Phys ,2001 ,201( 2 ) :323-336.  
[ 6 ] Yan Y ,Sakurai T. New Boundary Integral Equation Representation for Finite Energy Force-Free Magnetic Fields in Open Space Above the Sur[ J ]. Solar Phys ,2000 ,195( 1 ) :89-109.

( 编辑 : 郭 华 )

( 上接第 967 页 )

服从一般分布的情况下 ,获得了该系统可靠度的 Laplace 变换式和首次故障前平均工作时间的精确表达式 ,推广了文[ 3 ]的使用范围 ,使之更符合实际. 对该系统的一般情形( 即对一般的  $k$  ) ,微分方程的求解非常困难 ,寻求有效的数值解法是进一步需要研究的问题.

参考文献 :

[ 1 ] Zhang Y L ,Lam Y. Reliability of Consecutive- $k$ -out-of- $n$  :  $G$  Repairable System[ J ]. International Journal of Systems Science ,1998 ,29( 12 ) :1 375-1 379.  
[ 2 ] Lam Y ,Zhang Y L. Analysis of Repairable Consecutive-2-out-of  $n$  :  $F$  Systems with Markov Dependence[ J ]. International Journal of Systems Science ,1999 ,30( 12 ) :1 285-1 295.  
[ 3 ] 张元林 ,汪太鹏 ,贾积身.  $n$  中取相邻  $n - 1$  好的可修系统的可靠性分析[ J ]. 自动化学报 ,1997 ,23( 6 ) :807-810.  
[ 4 ] 张元林 ,林辉能. 具有马氏相依和维修有优先权的线性相邻  $2/n(F)$  可修系统[ J ]. 自动化学报 ,2000 ,26( 3 ) :317-322.  
[ 5 ] Moustafa M S. Avaliability of  $k$ -out-of- $n$  :  $G$  Systems with  $M$  Failure Modes[ J ]. Microelectronic Reliability ,1996 ,36( 3 ) :385-388.  
[ 6 ] Suprasad A ,Misra R B. Reliability Analysis of  $k$ -out-of- $n$  Systems with Partially Repairable Multi-state Components[ J ]. Microelectronic Reliability ,1996 ,36( 10 ) :1 407-1 415.  
[ 7 ] Ma Hongbo ,Chen Jianjun ,Cui Mingtao. Analysis of the Finite Element and Reliability for Stochastic Truss Structures[ J ]. Journal of Xidian University ,2003 ,30( 1 ) :103-107.  
[ 8 ] Levitin G. Linear Multi-State Sliding-Window Systems[ J ]. IEEE Trans on Reliability ,2003 ,52( 2 ) :263-269.

( 编辑 : 郭 华 )

