2005 年 12 月 第 32 卷 第 6 期
西安电子科技大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF XIDIAN UNIVERSITY
Dec. 2005 Vol. 32 No. 6

顶点覆盖问题的强化半定规划松弛

王新辉, 刘三阳, 刘红卫
(西安电子科技大学 理学院,陕西 西安 710071)

摘要:对顶点覆盖问题的一种等价模型,利用一般的松弛方法,得到了一个半定规划松弛模型. 通过引入算子 hsvec,把这个等价模型进行提升,得到了一个强化半定规划松弛模型,并从理论上证明了所得到强化松弛模型能比一般松弛模型提供更好的下界,同时数值实验也证明了这一点.

关键词:顶点覆盖问题;半定规划;强化半定规划松弛
中图分类号:O221.2 文献标识码:A 文章编号:1001-2400(2005)06-0958-03

A tight semidefinite relaxation for the vertex conver problem

WANG Xin-hui, *LIU San-yang*, *LIU Hong-wei*
(School of Science, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: A semidefinite relaxation is attained from the equivalence form for the Vertex Cover Problem in a normal way. A tight semidifinite relaxation is achieved by defining the operator hsvec. It is shown that the tight semidefinite relaxation provides a sharp lower bound. A numerical example is given.

Key Words: vertex cover problem; semidifinite programming; tight semidefinite relaxation

设 $G=(V,E)$ 是一个无向图,$S\subseteq V$,对图中任一条边 e,若至少一个端点在 S 中,则称 S 为 G 的一个顶点覆盖. 若对每一个顶点 i 都有相应的非负权值 w_i,则寻找包含顶点权值之和最小的顶点覆盖就是顶点覆盖问题. 顶点覆盖问题可归结为下面的整数规划模型[1,2]:

$$(\mathrm{VC})\quad\begin{cases}\min \quad w^* = (1/2)\sum_{i\in V} w_i x_i\ , \\ \mathrm{s.t.}\quad x_i + x_j \geqslant 1\ ,\quad (i,j)\in E\ , \\ \qquad\quad x_i\in\{0,1\}\ ,\quad i\in V\ .\end{cases}$$

这个问题是一个典型的 NP-hard 问题,没有多项式时间算法. 笔者把顶点覆盖问题松弛为半定规划模型,利用多项式时间算法求解所得半定规划松弛模型,从而得到原问题的一个下界.

1 半定规划松弛

利用下面的定理 1,可得到(VC)的一个等价模型:

$$(\mathrm{VCP})\quad\begin{cases}\min \quad (1/2)\sum_{i\in V} w_i(1+y_0 y_i)\ , \\ \mathrm{s.t.}\quad (y_0-y_i)(y_0-y_j)=0\ ,\quad (i,j)\in E\ , \\ \qquad\quad y_i, y_j\in\{-1,1\}\ ,\quad i,j\in V\ , \\ \qquad\quad y_0\in\{-1,1\}\ .\end{cases}$$

收稿日期:2004-12-13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(69972036);陕西省自然科学基金资助项目(2000SL03)
作者简介:王新辉(1978-),男,博士.

定理1　(VC)和(VCP)是等价的.

证明　对 $\forall x_i, x_j \in \{0,1\}, i,j \in V$,由于 $x_i + x_j \geq 1$,故 $x_i + x_j = 1$ 或 $x_i + x_j = 2$. 不论哪种情形,总可得到 $(x_i + x_j - 3/2)^2 = 1/4$,且恒有 $x_i + x_j - x_i x_j = 1$,令 $y_i = 2x_i - 1, y_j = 2x_j - 1$,即 $x_i = (y_i + 1)/2, x_j = (y_j + 1)/2$,则上式可化为 $(y_i - 1)(y_j - 1) = 0, y_i, y_j \in \{-1,1\}, i,j \in V$.

令 $y_0 = 1$,可得到下面整数规划

$$
(\mathrm{VCP}')\quad
\begin{cases}
\min \quad (1/2)\sum_{i \in V} w_i (1 + y_0 y_i) \quad , \\
\mathrm{s.\,t.} \quad (y_0 - y_i)(y_0 - y_j) = 0 \quad , \quad (i,j) \in E \quad , \\
\qquad\quad y_i, y_j \in \{-1, 1\} \quad , \quad i,j \in V \quad , \\
\qquad\quad y_0 = 1 \quad .
\end{cases}
$$

以上各步皆可逆,故(VC)和(VCP′)是等价的.

下面证明(VCP)和(VCP′)是等价的.

设(VCP′)的最优值为 $Q_{(\mathrm{VCP}')}$,(VCP)的最优值为 $Q_{(\mathrm{VCP})}$,显然 $Q_{(\mathrm{VCP})} \leq Q_{(\mathrm{VCP}')}$,然而在(VCP)的最优解 y 中若有 y_i, y_j 满足约束 $(-1 - y_i)(-1 - y_j) = 0$,则对所有这样的 i,j,令 $y_i^* = -y_i, y_j^* = -y_j$,其余 $y_i^* = y_i$ 得到 y^* 是(VCP′)的可行解,并且对应的(VCP)和目标值与(VCP′)的目标值相等,这样可得到 $Q_{(\mathrm{VCP})} \geq Q_{(\mathrm{VCP}')}$. 由上面证明可知 $Q_{(\mathrm{VCP})} = Q_{(\mathrm{VCP}')}$,因此(VCP′)和(VCP)是等价的.

综上所述(VC)和(VCP)是等价的.

为了便于讨论,令 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_0)$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$,

$$
\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & w_1/4 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & w_2/4 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & w_n/4 \\
w_1/4 & w_2/4 & \cdots & w_n/4 & \sum_{i \in V}(w_i/2)
\end{pmatrix} , \quad
\boldsymbol{A}_{ij} = \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1/2 & \cdots & -1/2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1/2 & \cdots & 0 & \cdots & -1/2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & -1/2 & \cdots & -1/2 & \cdots & 1
\end{pmatrix} ,
$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列,第 j 行第 i 列元素皆为 $1/2$;第 $(n+1)$ 行的第 i 列第 j 列,第 $n+1$ 列的第 i 行第 j 行的元素皆为 $-1/2$,且第 $(n+1)$ 行第 $(n+1)$ 列为 1,其余元素皆为 0 的 $(n+1)\times(n+1)$ 的矩阵,显然,$\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{A}_{ij}$ 均为对称矩阵.

引理1　$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 且 $\boldsymbol{y} \in \{-1,1\}^{n+1}$ 当且仅当 $\boldsymbol{Y} \in \{-1,1\}^{(n+1)\times(n+1)}$,$\boldsymbol{Y} \succeq 0$,则(VCP)有下面半定规划松弛模型:

$$
(\mathrm{SDP}_1)\quad
\begin{cases}
\min \quad w_1^* = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{Y} \quad , \\
\mathrm{s.\,t.} \quad \boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{Y} = 0 \quad , \quad (i,j) \in E \quad , \\
\qquad\quad Y_{ii} = 1 \quad , \quad i = 1, \cdots, n+1 \quad , \\
\qquad\quad \boldsymbol{Y} \succeq 0 \quad .
\end{cases}
$$

其中,“·”表示矩阵的内积,$\boldsymbol{Y} \succeq 0$ 表示 $\boldsymbol{Y}$ 是半正定的,显然有 $w_1^* \leq w^*$ [3].

2　强化半定规划松弛

下面介绍一些符号和定义.

令 $t(n) = n(n+1)/2$, $\boldsymbol{S}^n = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \in R^{n\times n}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\}$ 表示 $n \times n$ 阶实对称矩阵的全体. 对 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{S}^n$,$a = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}) \in R^n$ 表示由 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素组成的列向量;$\boldsymbol{s} = \mathrm{hsvec}(\boldsymbol{A}) \in R^{t(n-1)}$ 表示由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 略去下三角部分(包括对角元),剩余的元素按列组成的向量,其逆算子记为 $\boldsymbol{A} = \mathrm{hsmat}(\boldsymbol{s})$,其对角线元素全为 1;$\boldsymbol{e}$ 表示元素全为 1 的 $t(n)+1$ 维列向量;$\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个元素为 1,其余为 0 的 $t(n)+1$ 维列向量;$E(i,j)_{(t(n)+1)\times(t(n)+1)} =$

$(\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}})/2$,$H(i,j) = \begin{cases} t(j-2)+i+1, & 若\ i<j \\ t(i-2)+j+1, & 若\ i>j \end{cases}$;$L_c = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}) & \mathrm{hsvec}(\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{hsvec}(\boldsymbol{L}) & 0 \end{pmatrix}$;$z = \mathrm{hsvec}(\boldsymbol{Y})$,$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & z^{\mathrm{T}} \\ z & z z^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{cij} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_{ij}) & \mathrm{hsvec}(\boldsymbol{A}_{ij})^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{hsvec}(\boldsymbol{A}_{ij}) & 0 \end{pmatrix}$,$(i,j) \in E$. 通过下面的几个引理得到(VC)的强化半定规划松弛模型.

引理 2 $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{L}_c \cdot \boldsymbol{Z}$[4].

引理 3 $\boldsymbol{A}_{cij} \cdot \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{Y}$[4].

引理 4 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y} \in \{-1,1\}^{n+1}$,则有 $Z(H(i,k), H(k,j)) = Z(1, H(i,j))$,$\forall k \neq i, k \neq j, 1 \leqslant i < j \leqslant n$,$\mathrm{diag}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{e}$.

证明 由引理 2 及矩阵定义知:$\forall i,j, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$,有 $Z(1,H(i,j)) = z(H(i,j)) = Y(i,j) = y_i y_j$,对 $\forall k,m = 1,2,\cdots,n+1$,且

$$Z(H(i,k),H(m,j)) = z(H(i,k))\, z(H(m,j)) = Y(i,k)\, Y(m,j) = y_i y_k y_m y_j \quad .$$

若 $k = m$,则 $Z(H(i,k), H(m,j)) = y_i y_k y_m y_j = y_i y_k^2 y_j = y_i y_j$,即 $Z(H(i,k),H(k,j)) - Z(1,H(i,j)) = 0$,可得 $(E(H(i,j)) - E(1,H(i,j))) \cdot Z = 0$. 又 $Z(H(i,k),H(k,i)) = y_i^2 y_k^2 = 1$,即 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{e}$. 故引理得证.

根据以上引理,可得到(VC)一个强化半定规划松弛

$$(\mathrm{SDP}_2)\quad \begin{cases} \min \quad w_2^* = \boldsymbol{H}_C \cdot \boldsymbol{Z} \quad , \\ \mathrm{s.t.} \quad \boldsymbol{A}_{cij} \cdot \boldsymbol{Z} = 0 \quad , \quad (i,j) \in E \quad , \\ \qquad (\boldsymbol{E}_{H(i,k),H(k,j)} - \boldsymbol{E}_{0,H(i,j)}) \cdot \boldsymbol{Z} = 0 \quad , \quad \forall k \neq i, k \neq j, 1 \leqslant i < j \leqslant n \quad , \\ \qquad \mathrm{diag}(\boldsymbol{Z}) = 0 \quad , \\ \qquad \boldsymbol{Z} \succeq 0 \quad . \end{cases}$$

显然有 $w_2^* \leqslant w^*$.

下面将证明(SDP_2)能比(SDP_1)给出原问题更好的下界.

定理 2 设 $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & z^{\mathrm{T}} \\ z & \bar{\boldsymbol{Z}} \end{pmatrix}$ 为(SDP_2)的可行解,则 $\mathrm{hsMat}(z) \succeq 0$.

证明 设 Z 是(SDP_2)的可行解,$Y = \mathrm{hsMat}(z)$,则 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{e}$,$Y(i,j) = Z(1,H(i,j))$,$1 \leqslant i < j \leqslant n$. 对 $\forall k \neq i, k \neq j, 1 \leqslant i < j \leqslant n$,由于 $\bar{Z}(H(i,k)-1, H(k,j)-1) = Z(1,H(i,j))$,$Z(1,H(i,j)) = y_i y_j = y_i y_k^2 y_j = Y(i,k)\, Y(k,j) = z(H(i,k))\, z(H(k,j))$. 故 $\bar{Z}(H(i,k)-1, H(k,j)-1) = z(H(i,k))\, z(H(k,j))$,即 $\bar{Z} = z z^{\mathrm{T}}$. 显然 $\boldsymbol{Y} = Z(1, 2{:}t(n)+1$. 又因为 $Z \succeq 0$,故 $Y \succeq 0$,即 $\mathrm{hsMat}(z) \succeq 0$.

定理 3 设 $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & z^{\mathrm{T}} \\ z & \bar{\boldsymbol{Z}} \end{pmatrix}$ 为(SDP_2)的可行解,则 $\mathrm{hsMat}(z)$ 为(SDP_1)的可行解.

证明 $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & z^{\mathrm{T}} \\ z & \bar{\boldsymbol{Z}} \end{pmatrix}$ 为(SDP_2)的可行解,由定理 2 有 $\bar{\boldsymbol{Z}} = z z^{\mathrm{T}}$ 且 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{e}$,据 $\boldsymbol{Y} = \mathrm{hsmat}(z)$ 可得 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{e}$,则由 $\boldsymbol{A}_{cij} \cdot \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{Y}$ 及定理 2 的结论知 $\mathrm{hsMat}(z) \succeq 0$ 为(SDP_1)的可行解.

定理 4 $w_1^* \leqslant w_2^* \leqslant w^*$.

证明 由引理 3 ~ 5 及定理 2 可得.

3 数值实验

随机选取一些图,并随机产生这些图顶点的权,利用半定规划的内点算法软件 SDPpack[5],可得到问题的下界,如表 1. 数值实验表明(SDP_2)给出比(SDP_1)更好的下界,说明(SDP_2)优于(SDP_1).

(下转第 964 页)