MIMO-OFDM 系统在选择性衰落信道下的容量分析

吕 卓，李建东，李维英
(西安电子科技大学 综合业务网理论与关键技术国家重点实验室 信息科学研究所
宽带无线通信实验室，陕西 西安 710071)

摘要：构造了 MIMO-OFDM 系统在频率和时间选择性衰落信道下的系统模型，分析了信道容量和选择性衰落分集的关系，得到了系统的中断概率和中断容量只和频率选择性分集数与时间选择性分集数的乘积有关. 提出了一种等效的分析方法，得出了各态历经容量的一个紧密下界，随着发送天线数的增加，该下界会愈加紧密. 通过 Monte Carlo 仿真，给出了在双重选择性衰落信道下系统的中断概率和中断容量的仿真结果.

关键词：MIMO；OFDM；选择性衰落；信道容量
中图分类号：TN911.22 **文献标识码**：A **文章编号**：1001-2400(2005)06-0935-05

Capacity analysis of the MIMO-OFDM system over frequency- and time-selectivity fading channels

LÜ Zhuo, *LI Jian-dong*, *LI Wei-ying*
(Broadband Wireless Communications Lab., Research Inst. of Information Science, State Key Lab. of Integrated Service Network, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: This paper first constructs the MIMO-OFDM system model over frequency- and time-selectivity fading channels. Then the connection between selective-fading diversity and capacity is analyzed, which shows that the product of the time-selectivity order and the frequency-selectivity order is the key parameter for characterizing the outage probability and outage capacity. An equivalent analysis method is proposed to give a tight low bound of ergodic capacity. It is also shown that this low bound becomes tighter with the increasing number of transmitter antennas. Finally numerical results of outage probability and outage capacity are shown by Monte Carlo simulation.

Key Words: MIMO; OFDM; selective-fading; capacity

多输入多输出(Multiple Input Multiple Output，简称 MIMO)技术可成倍地提高衰落信道下的信道容量，MIMO 系统与空时编码技术相结合[1]是实现未来宽带无线通信的关键技术之一，也是当今无线通信研究的热点. 最早对 MIMO 的研究结果是 I. E. Telatar 在文[2]中以及 G. J. Foschini 等在文[3]中给出的. 早期的研究都是在平坦衰落的信道下进行的，而宽带无线通信的信道必然是频率选择性的信道，多载波正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing，简称 OFDM)技术将高速的信息流分配到多个低速信道中并行传输，从而使信号对符号间串扰变得不敏感，即它将频率选择性衰落信道变成一组并行的平坦衰落信道. 所以近年来的研究都把 MIMO 和 OFDM 相结合，在文[4]中分析了宽带 MIMO-OFDM 系统在频率选择性衰落信道下的容量，由于 OFDM 子载波数很大时，每个子载波上的速率都很低，则在高速移动的情况下，衰落信道有可能是时间选择性的，即快衰落信道. 文[5]中给出了在时间和频率选择性衰落信道下对 MIMO-OFDM 系统的模型以及容量的一些仿真结果. 本文中以 MIMO-OFDM 系统在选择性衰落信道下的模型为基础，分析了

收稿日期：2004-12-18
基金项目：国家自然科学基金和微软亚洲研究院联合资助项目(60372048)；高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划；国家自然科学重大项目 60496316 第 6 子课题；教育部科学技术研究重点项目(104171)；国家 863 计划课题(2005AA123910)
作者简介：吕 卓(1980-)，男，西安电子科技大学博士研究生.

MIMO-OFDM 系统的中断容量和中断概率与频率选择性分集和时间选择性分集数的关系.

1 系统的模型

一个收发天线数为 (N, M) 的 MIMO 系统,其接收信号可表示为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n} \quad , \tag{1}$$

$\boldsymbol{y} \in C^M$ 是接收信号,$\boldsymbol{x} \in C^N$ 是发送信号,$\boldsymbol{n}$ 是复高斯白噪声,$\boldsymbol{H}$ 是 L_f 条路径响应的和,令 $\boldsymbol{H}_l \in C^{M\times N}$ 是第 l 条路径 $(l = 1,\cdots L_f)$ 的信道冲激响应,有:

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} h^l_{0,0} & h^l_{0,1} & \cdots & h^l_{0,N-1} \\ h^l_{1,0} & h^l_{1,1} & \cdots & h^l_{1,N-1} \\ \square & \square & & \square \\ h^l_{M-1,0} & h^l_{M-1,1} & \cdots & h^l_{M-1,N-1} \end{bmatrix} , \tag{2}$$

$h^l_{i,j}$ 是第 l 条路径上从第 i 个发送天线到第 j 个接收天线的信道冲激响应. $h^l_{i,j}$ 是一个随机过程,考虑各个路径是独立的 Rayleigh 衰落的情况,则 $h^l_{i,j}$ 是一个均值为零的复高斯随机变量,由 $\boldsymbol{H}_l$ 的第 i 列构成的相关矩阵:

$$\boldsymbol{R}^l_i = E\{(h^l_{0,i}, h^l_{1,i}, \cdots, h^l_{M-1,i})^{\mathrm{T}}[(h^l_{0,i}, h^l_{1,i}, \cdots, h^l_{M-1,i})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{H}}\} = \mathrm{diag}\{E|h^l_{0,i}|^2, \cdots, E|h^l_{M-1,i}|^2\} \quad . \tag{3}$$

对于不同发送的天线通过不同路径到达不同的接收天线的统计过程是相互独立且同分布的,所以由 $\boldsymbol{H}_l$ 的各个列构成的相关矩阵阵相等,定义:

$$\boldsymbol{R}_l = \boldsymbol{R}^l_i = \mathrm{diag}\{E|h^l_{0,i}|^2, \cdots, E|h^l_{M-1,i}|^2\} = \mathrm{diag}\{\delta^2_l, \cdots, \delta^2_l\}_{M\times N} \quad , \tag{4}$$

其中 δ^2_l 是第 l 条路径上的功率增益.

$\boldsymbol{H}_l$ 就可表示为 $$\boldsymbol{H}_l = \boldsymbol{R}^{1/2}_l \boldsymbol{H}_{\omega,l} \quad , \quad l = 0,1,\cdots,L-1 \quad , \tag{5}$$

$\boldsymbol{R}_l$ 表示路径的功率增益,$\boldsymbol{H}_{\omega,l} \in C^{M\times M}$ 是由 $M \times M$ 个相互独立且分布相同均值为 0,方差为 1 的复高斯随机变量组成,表示所有不同的收发天线之间经受的都是相互独立的 Rayleigh 衰变.

考虑一个 MIMO-OFDM 系统,令第 l 条路径 $(l = 1,\cdots,L_f)$ 的延时是 $n_l/(K\Delta f)$,n_l 是整数,K 是 OFDM 的子载波个数,Δf 是子载波间隔. OFDM 系统的接收信号可认为是在频域上的信号,由文[4~6]可知在时域上的多径时延也可等效到频域,且所有路径响应的和有:

$$\boldsymbol{H}(k) = \sum_{l=1}^{L_f} \boldsymbol{H}_l \exp(-\mathrm{j}2\pi\, kn_l/K) \quad , \tag{6}$$

则第 k 个子载波上的接收信号有: $$\boldsymbol{y}(K) = \boldsymbol{H}(k)\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{n}(k) \quad , \tag{7}$$

$\boldsymbol{y}(k) \in C^M$,$\boldsymbol{x}(k) \in C^N$ 分别是在第 k 个子载波上发送和接收的信号,$\boldsymbol{n}(k)$ 是复高斯白噪声,由式(5),(6)可得

$$\boldsymbol{H}(k) = \sum_{l=1}^{L_f} \boldsymbol{R}^{1/2}_l \boldsymbol{H}_{\omega,l} \exp(-\mathrm{j}2\pi\, kn_l/K) \quad . \tag{8}$$

$\boldsymbol{H}(k)$ 的第 i 行第 j 列元素 $\boldsymbol{H}_{i,j}(k)$ 表示在第 k 个子载波上从第 i 个发射天线到第 j 个接收天线的衰落,且由式(8)得:

$$\boldsymbol{H}_{i,j}(k) = \sum_{l=1}^{L_f} \delta_l\, \alpha^l_{i,j} \exp(-\mathrm{j}2\pi\, kn_l/K) \quad , \tag{9}$$

$\alpha^l_{i,j}$ 是 $\boldsymbol{H}_{\omega,l}$ 的第 i 行第 j 列的元素. 由于信道是还是时间选择性衰落的,令 T 是 OFDM 符号的长度,P 是编码长度,即 P 个 OFDM 符号组成一个码字,则这 P 个符号经受的信道衰落是相关的,用 $\boldsymbol{H}(p,k)$ 表示总的信道冲激响应,则 $\boldsymbol{H}(p,k)$ 的第 i 行第 j 列的元素 $\boldsymbol{H}_{i,j}(p,k)$ 表示在第 k 个子载波上在第 p 个符号上从第 i 个发射天线到第 j 个接收天线的衰落,有:

$$\boldsymbol{H}_{i,j}(p,k) = \sum_{l=1}^{L_f} \delta_l\, \alpha^l_{i,j}(p) \exp(-\mathrm{j}2\pi\, kn_l/K) \quad . \tag{10}$$

所以根据文[7]将 $\alpha^l_{i,j}(p)$ 进行 Karhunen-Loeve 展开并忽略边缘效应得到:

$$\alpha^l_{i,j} \cong \sum_{n=-f_dPT}^{f_dPT} \beta^l_{i,j}(n) \exp(\mathrm{j}2\pi\, np/P) \quad . \tag{11}$$

f_d 是最大 Doppler 频移，令 $n_t = f_d PT$，定义 $L_t = 2n_t + 1$ 为时间选择性衰落的分集数，$\{\beta_{i,j}^l(n), n = -n_t, \cdots, n_t\}$ 是 L_t 个相互独立且分布相同的复高斯随机变量.

将式(11)代入式(10)得到：

$$\boldsymbol{H}_{i,j}(p,k) = \sum_{l=1}^{L_f} \left(\delta_l \exp(-\mathrm{j}2\pi\, kn_l/K)\left(\sum_{n=-n_t}^{n_t} \beta_{i,j}^l(n) \exp(\mathrm{j}2\pi\, np/P)\right)\right) =$$

$$\sum_{l=1}^{L_f} \sum_{n=-n_t}^{n_t} \delta_l \beta_{i,j}^l(n) \exp(\mathrm{j}2\pi\, np/P) \exp(-\mathrm{j}2\pi\, kn_l/K) =$$

$$\sum_{l=1}^{L_f} \sum_{n=-n_t}^{n_t} \delta_l \beta_{i,j}^l(n) \exp(\mathrm{j}2\pi(pn/P - kn^l/K) \quad . \tag{12}$$

将式(12)进一步化为

$$\boldsymbol{H}_{i,j}(k) = \boldsymbol{\beta}\, \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \quad , \tag{13}$$

且有：

$$\boldsymbol{\beta} = [\delta_1 [\beta_{i,j}^1(1), \cdots, \beta_{i,j}^1(L_t)]_{1\times L_t}, \cdots, \delta_{L_f} [\beta_{i,j}^{L_f}(1), \cdots, \beta_{i,j}^{L_f}(L_t)]_{1\times L_t}]_{1\times L_t L_f} \quad ,$$

$$\boldsymbol{E} = [[\exp(\mathrm{j}2\pi(-pn_t/P - kn_1/K)), \cdots, \exp(\mathrm{j}2\pi(pn_t/P - kn_1/K)]_{1\times L_t}, \cdots, [\exp(\mathrm{j}2\pi(-pn_t/P - kn_{L_f}/K)), \cdots, \exp(\mathrm{j}2\pi(-pn_t/P - kn_{L_f}/K))]_{1\times L_t}]_{1\times L_t L_f} \quad .$$

由于 $\{\beta_{i,j}^l(n), n = -n_t, \cdots, n_t\}$ 是 L_t 个相互独立且分布相同的复高斯随机变量，对于不同的路径数 l，$\{\beta_{i,j}^l(n), n = -n_t, \cdots, n_t\}$ 就构成了 L_f 组相互独立且分布相同的复高斯随机变量，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 中的所有元素是相互独立复高斯随机变量. 则根据式(13)，对于 MIMO-OFDM 系统，可将阶数为 L_f 的频率选择性衰落和阶数为 L_t 的时间选择性衰落看作是一个阶数为 $L_f L_t$ 的频率选择性衰落，且其功率分配向量有：

$$\boldsymbol{\delta} = [[\delta_1, \cdots, \delta_1]_{1\times L_t}, \cdots, [\delta_2, \cdots, \delta_2]_{1\times L_t}, \cdots, [\delta_{L_f} \cdots \delta_{L_f}]_{1\times L_t}]_{1\times L_t L_f} \quad . \tag{14}$$

2　信道容量

在频率选择性衰落信道下，MIMO 系统收发之间的互信息为

$$\boldsymbol{I}_H(\rho) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{H}, \rho) \quad . \tag{15}$$

由[2,4]得到，当发送序列 $\boldsymbol{x}$ 由循环对称复高斯随机变量(复高斯随机变量，服从 $CN(0,\sigma^2)$ 分布，并且实部和虚部相互独立且都服从 $N(0,\sigma^2/2)$ 分布) 构成时，在功率约束 $\mathrm{trace}\{E[\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}]\} \leqslant \rho$ 下，MIMO-OFDM 系统的最大互信息有：

$$\boldsymbol{I}_H(\rho) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \log_2\left[\det\left(1 + \frac{\rho}{N} \boldsymbol{H}(k)\, \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}(k)\right)\right] \quad , \tag{16}$$

则各态历经的信道容量为

$$C = E\left\{\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \log_2\left[\det\left(1 + \frac{\rho}{N} \boldsymbol{H}(k)\, \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}(k)\right)\right]\right\} \quad . \tag{17}$$

频率选择性衰落信道下各态历经的信道容量的下界由文[8]给出：

$$C \geqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{R}')\, \log_2\left\{1 + \frac{\rho}{N}[\det(\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{R}'})]^{1/\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}')} \exp\left(\frac{1}{\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}')} \sum_{j=1}^{\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}')} \sum_{p=1}^{N-j} \frac{1}{p} - \gamma\right)\right\} \quad , \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{R}' = \sum_{l=1}^{L_f} \boldsymbol{R}_l$，$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_i(\boldsymbol{R}')\}_{i=0}^{M-1}$，$\gamma \approx 0.577\,215\,66$. $\lambda_i(\boldsymbol{R}')$ 表示 $\boldsymbol{R}'$ 的第 i 个特征值，$\boldsymbol{\Lambda}$ 表示由 $\boldsymbol{R}'$ 的 M 个特征值组成的对角阵. 式(18) 成立的条件还要求有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R})' \leqslant N$.

将 L_f 的频率选择性衰落和阶数为 L_t 的时间选择性衰落看作是一个阶数为 $L_f L_t$ 的频率选择性衰落，归一化功率分配向量 $\boldsymbol{\delta}$，即 $\boldsymbol{\delta}$ 的 Frobenius 范数 $\|\boldsymbol{\delta}\|_F = 1$，此时 $\boldsymbol{R}'$ 有：

$$\boldsymbol{R}' = \sum_{l=1}^{L_f L_t} \boldsymbol{R}_l = \mathrm{diag}\{\|\boldsymbol{\delta}\|_F^2, \cdots, \|\boldsymbol{\delta}\|_F^2\} = \mathrm{diag}\{1, 1, \cdots, 1\}_{M\times M} \quad , \tag{19}$$

则有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}') = M$，$\det(\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{R}'}) = 1$，所以在频率和时间选择性衰落信道下各态历经的信道容量下界有：

$$C \geqslant M \log_2\left\{1 + \frac{\rho}{N} \exp\left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \sum_{p=1}^{N-j} \frac{1}{p} - \gamma\right)\right\} \quad , \qquad M \leqslant N \quad . \tag{20}$$

图 1 给出了在信噪比 SNR 为 10 dB 的情况下,接收天线数 $M = 1$ 时随着发送天线数 N 的增加,频率和时间选择性衰落信道下各态历经的信道容量下界 C_{lowbound} 和 AWGN 信道下 Shannon 容量 C_{AWGN} (在信噪比 SNR 为 10 dB 时,根据 Shannon 公式有 $C_{\text{AWGN}} = \log_2(1+10) = 3.4593\ \text{b}\cdot\text{s}^{-1}/\text{Hz}$) 的比较,而各态历经的信道容量 C 满足: $C_{\text{lowbound}} \leqslant C \leqslant C_{\text{AWGN}}$. 当 $N \to \infty$, 有 $C_{\text{lowbound}} = C = C_{\text{AWGN}}$, 可看到这个下界还是相当紧密的.

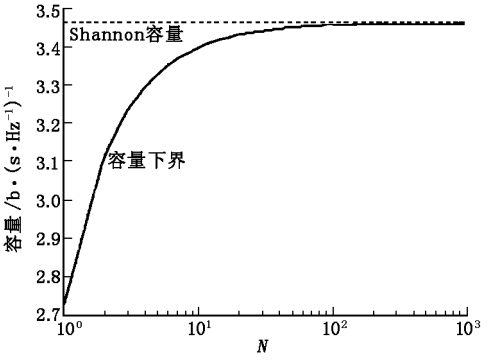

图 1 容量下界和 AWGN 信道下 Shannon 容量的比较

由于实际的信道是时变的,而且编码长度、收发天线数目都是有限的,所以此时系统的 Shannon 容量是零[9],这时一般使用中断概率(Outage Probability)和中断容量(Outage Capacity)来衡量信道容量. 中断概率是指信道不能够达到给定的信息速率(容量) R 的概率,定义为

$$P_{\text{out}}(R,\rho) = P(I_H(\rho) < R) \quad . \tag{21}$$

中断容量 $C_{\text{out},q}$ 是满足系统的信息速率小于它的概率是 q 的信息速率,表示为

$$P(I_H(\rho) \leqslant C_{\text{out},q}) = q \quad . \tag{22}$$

3 容量仿真

使用 Monte Carlo 仿真的方法对一个在频率和时间选择性衰落信道下的 MIMO-OFDM 系统的容量进行仿真. 仿真中取子载波数 $K = 32$, $P = 10$. 为了简便起见,考虑均匀的功率时延谱.

图 2 是在信噪比为 10 dB的情况下,选择性衰落分集数 $L = L_f L_t = 1,2,3,4$ 的情况下,不同收发天线数的中断概率曲线. 仿真过程中使用两组分集数 (1) $L_t = 1$, $L_f = 1,2,3,4$ (2) $L_f = 1$, $L_t = 1,2,3$ 和 $L_f = 2$, $L_t = 2$ 即保证两次的选择性衰落分集数 $L = L_f L_t = 1,2,3,4$. 两组数据 (1) 和 (2) 的仿真曲线完全重合,表明等效分析方法是正确的. 由图中也可看出选择性分集数 L 增加,中断概率特性都会变好(曲线逐渐变得陡峭),但是随着 L 增加,这种变化逐渐变得缓慢.

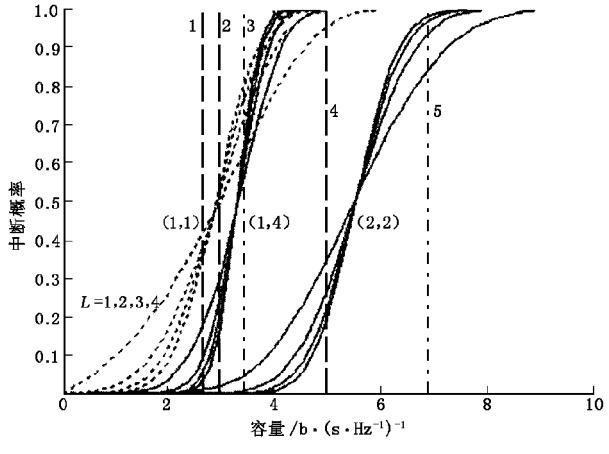

图 2 在不同收发天线数的情况下,选择性分集数对系统中断概率的影响

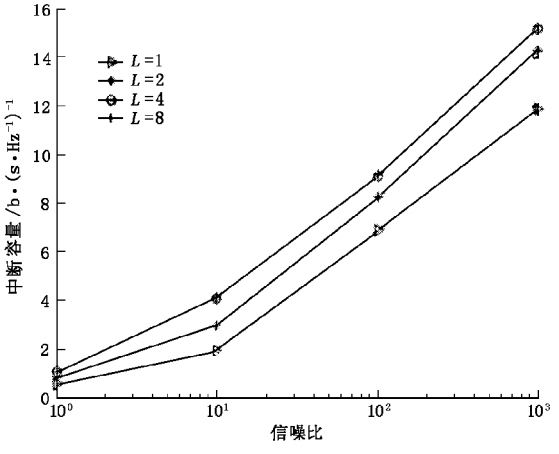

图 3 系统中断容量与信噪比的关系曲

图 2 左的虚线为(1,1)的 MIMO-OFDM 系统的中断概率,垂直线 1 是由下界公式(20)计算出的各态历经容量的下界,垂直线 3 是 AWGN 信道下的 Shannon 容量,当 $L \to \infty$ 时,中断概率曲线将汇聚成一条阶跃函数的曲线,阶跃点正好对应于系统的各态历经的容量. 由图中也可看出,阶跃点的也正好处在垂直线 1 和 3 之间.

图 2 左的实线是(4,1)系统的中断概率曲线,垂直线 2 代表了它的各态历经容量下界. 当 $N \to \infty$ 时,中断概率曲线将汇聚到垂直线 3,即 AWGN 信道下的 Shannon 容量. 由图中也可看出随着 N 的增加,下界也在向右移动

(由垂直线 1 移动到垂直线 2),当 $N \to \infty$ 将和 3 重合,再次说明由式(20)得到的下界还是相当紧密的.

图 2 还给出了(2,2)的 MIMO-OFDM 系统的中断概率曲线,垂直线 4 和 5 分别表示(2,2)系统的各态历经容量下界以及 2 倍的 AWGN 信道下的 Shannon 容量(当 $N \to \infty$ 时,曲线将汇聚到 5).

图 3 给出了在选择性分集数 $L = 1,2,3,4,8$ 时,一个(2,2)的 MIMO-OFDM 系统的中断容量 $C_{0.01}$ (即系统的信息速率小于它的概率是 0.01 的信息速率)与信噪比 SNR 的关系曲线. 由图 2 可得到中断容量随着频率和时间选择性衰落分集数的增加而增加,但是随着 L 的增加,中断容量的增加将变得非常缓慢.

4　结 束 语

提出了 MIMO-OFDM 系统在频率选择和时间选择性衰落信道下的一种等效的分析方式,给出了一个紧密的各态历经容量的下界,分析了频率选择和时间选择性衰落分集数对 MIMO-OFDM 系统容量的影响,通过 Monte Carlo 仿真得到系统中断概率和中断容量的曲线,由仿真得到系统的容量随着频率和时间选择性衰落分集数 $L = L_f L_t$ 的增加而增加,但是随着 L 的增加,容量的增加将变得非常缓慢.

参考文献:

[1] Xie Xianzhong, Li Ying, Wu Keying, et al. The Turbo STCM Technique and Its Performance[J]. Journal of Xidian University, 2001, 28(6):824-827.

[2] Telatar I E. Capacity of Multi-antenna Gaussian Channels[J]. Eur Trans Telecommun, 1999, 10(6):585-595.

[3] Foschini G J, Gans M J. On Limits of Wireless Communications in a Fading Environment when Using Multiple Antennas[J]. Wireless Personal Commun, 1998, 6(3):311-334.

[4] Bolcskei H, Gesbert D, Paulraj A J, et al. On the Capacity of OFDM-Based Spatial Multiplexing Systems[J]. IEEE Trans on Commun, 2002, 50(2):225-234.

[5] Lu B, Wang X, Narayanan K R, et al. LDPC-Based Space-Time Coded OFDM Systems Over Correlated Fading Channels: Performance Analysis and Receiver Design[J]. IEEE Trans on Commun, 2002, 50(1):74-88.

[6] Van de Beek J J, Edfors O, Sandell M, et al. On Channel Estimation in OFDM System[A]. IEEE Vehicular Technology Conf 1995 VTC'95[C]. Chicago:IEEE, 1995.

[7] Wilson S G. Digital Modulation and Coding[M]. New York:Prentice-Hall, 1996.

[8] Oyman O, Nabar R U, Bolcskei H, et al. Characterizing the Statistical Properties of Mutual Information in MIMO Channels[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2003, 51(11):2784-2785.

[9] Paulraj A J, Gore D A, Nabar R U, et al. An Overview of MIMO Communications—a Key to Gigabit Wireless[J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(2):198-218.

[10] Proakis J. Digital Communications[M]. New York:McGraw-Hill, 4rd ed, 2001.

(编辑:李维东)