



## 巷道围岩参数及地应力 可辨识性的探讨

吕爱钟

(山东矿业学院, 泰安)

### 提 要

利用巷道围岩位移反求地应力及围岩参数是一种行之有效的方法,但这种位移反分析法并非能够求出所有参数,能求出的参数个数是一定的,本文利用参数可辨识条件探讨了围岩参数和地应力的可辨识性问题,可辨识性是在有位移解析表达式的基础上进行的,本文利用平面弹性复变方法和一般弹性理论求得了任意形状巷道的位移解析表达式,并在此基础上证明了参数可唯一辨识的最多个数及分析了量测点布置对可辨识性的影响。

### 一、 前 言

岩石力学的参数辨识是促进岩石力学进一步发展的重大课题之一<sup>[1]</sup>,岩体原始应力及岩体性质参数的确定是解决矿山岩石力学问题的关键所在,确定这些参数的一条可行途径是求解反问题,即根据巷道开挖后所量测的位移反求与开挖位移有关的各种参数<sup>[2]</sup>。

反问题是针对正问题而言的,正问题是由“原因”找出“结果”,而反问题则是由“结果”反求“原因”,某一特定“结果”可能引起的“原因”有多种,这样由“结果”反求的“原因”可能不唯一,本文以围岩位移为“结果”,待求的围岩参数及地应力为“原因”,这样由量测的位移反求的围岩参数和地应力也可能不是唯一的。

参数辨识有多种数学方法,应用最多的是常规最小二乘法,这种方法讨论的是线性模型的情况,参数估计量为<sup>[3]</sup>:

本文1987年10月21日收到,1988年2月27日收到修改稿。

$$\hat{\beta}_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T Z \quad (1)$$

式中  $A$  是一个具有已知形式的矩阵, 它包括已知输入、测点的已知坐标等等;  $Z$  是输出的量测矩阵;  $\hat{\beta}_{LS}$  为参数矢量  $\beta$  的估计值。

由式 (1) 可以看出,  $(A^T A)$  为非奇异矩阵, 是所有参数的唯一辨识条件。对于这种线性模型, 直接根据估计量的表达式 (1) 就可以判断参数的可辨识性, 而对于非线性模型, 非线性最小二乘法一般难以求出估计量的解析表达式, 此时如何判断待求参数的唯一性呢? 这个判断准则就是要讨论参数的可辨识条件。

## 二、参数可辨识条件

参数辨识的过程是寻求准则函数 (准则函数在最优化方法中也称目标函数) 的极值点, 对于最小二乘意义下的参数辨识方法就是找准则函数的极小点, 参数可唯一辨识是指准则函数有唯一的局部极小点。

与参数可辨识条件紧密相关的一个概念是灵敏系数, 考虑一个模型  $y=f(A, \beta)$ ,  $y$  是输出,  $A, \beta$  的含义同前, 灵敏系数是指由参数值的微小变化而引起模型输出  $y$  值的变化速度, 设  $X_i$  为灵敏系数, 则  $X_i = \frac{\partial f}{\partial \beta_i}$ , 亦即  $f$  关于第  $i$  个参数  $\beta_i$  的一阶偏导数称为参数  $\beta_i$  的灵敏系数。

如果  $f$  关于参数  $\beta$  二阶及二阶以上的偏导数为零, 那么称  $y$  是参数的线性函数, 这样的模型为线性模型。

根据准则函数极小的充要条件可导出参数可辨识条件<sup>[3]</sup>;

如果在量测范围内, 所有待求参数的灵敏系数是与线性无关的, 则根据量测值可以同时唯一地辨识出所有的参数; 反之, 如果参数的灵敏系数与线性有关, 那么则不能同时唯一地辨识出所有参数。

线性有关或线性无关根据下列公式判断:

$$C_1 \frac{\partial f_k}{\partial \beta_1} + C_2 \frac{\partial f_k}{\partial \beta_2} + \dots + C_m \frac{\partial f_k}{\partial \beta_m} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

式 (2) 中,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  为要辨识的  $m$  个参数,  $n$  为量测数量,  $n \geq m$ ;  $f_k = f(A_k, \beta)$  为第  $k$  点的模型输出。

线性有关是指: 对于  $k=1, 2, \dots, n$ , 至少存在一个不等于零的  $C_j$  使 (2) 成立; 线性无关是指: 对于  $k=1, 2, \dots, n$ , 只有所有的  $C_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) 都等于零时, (2) 才成立。

使用参数可辨识条件时, 应注意以下几点:

1. 此条件既适用线性模型的情形, 也适用非线性模型的情形。
2. 此条件是根据最小二乘意义下的准则函数推出的, 它不但适用常规最小二乘法、加权最小二乘法及非线性最小二乘法, 而且也适用带有标准误差的极大似然估计。
3. 对参数没有约束条件。

### 三、任意形状巷道的位移表达式

巷道开挖前已有原始地应力作用，在拟挖巷道周边作用有应力，开挖巷道在力学上就意味着在周边作用有大小相等、方向相反的应力分布。因此，开挖巷道所引起的巷道围岩位移，可以看作是两部分位移之差，即在两向压力作用下与巷道形状相同的弹性孔的位移，减去没开挖巷道前岩体已完成的位移。前者用平面弹性复变方法求得，后者用一般的弹性理论很容易解得。

平面弹性复变方法归结为寻求满足孔边应力条件：

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds \quad (3)$$

的两个复变函数  $\varphi_1(Z)$  和  $\psi_1(Z)$  <sup>[4]</sup>。

式 (3) 中的  $t$  是孔边上的点， $X_n$ ， $Y_n$  为孔边的给定外力，若孔边无外力，则

$$i \int_0^s (X_n + iY_n) ds = 0$$

位移分量  $u$ ， $v$  可由  $\varphi_1(Z)$  和  $\psi_1(Z)$  求出：

$$2G(u + iv) = \kappa\varphi_1(Z) - Z\overline{\varphi_1'(Z)} - \overline{\psi_1(Z)} \quad (4)$$

按平面应变求解时，式 (4) 中的  $\kappa = 3 - 4\mu$ ， $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ， $E$ ， $\mu$  分别为围岩的弹性模量和泊松比。

孔边无外力作用时， $\varphi_1(Z)$ ， $\psi_1(Z)$  有以下形式：

$$\varphi_1(Z) = \frac{P+Q}{4}Z + \varphi_1^0(Z) \quad (5a)$$

$$\psi_1(Z) = \frac{P-Q}{2}Z + \psi_1^0(Z) \quad (5b)$$

式中  $\varphi_1^0(Z)$ ， $\psi_1^0(Z)$  为无穷远点邻近的单值解析函数， $P$ ， $Q$  为无限远处的应力边界条件，在巷道埋深较大的情形下（通常都能满足）， $P$ ， $Q$ （图 1）就是要求的地应力。

孔形复杂，直接求解困难，则采用保角映射方法便于求解。将孔域映射到单位圆外的无限平面的映射函数为：

$$Z = W(\zeta) = C(\zeta + B_1 \frac{1}{\zeta} + B_2 \frac{1}{\zeta^2} + \dots + B_n \frac{1}{\zeta^n}) \quad (6)$$

式中  $C$  反映孔的大小， $B_1$ ， $B_2$ ， $\dots$ ， $B_n$  反映孔的形状，孔形一定，这些系数即定。

将 (6) 代入 (3)、(4)、(5)，则孔边无外力作用的无限平面问题的求解公式变为：

$$\varphi(\sigma) + \frac{W(\sigma)}{W'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0 \quad (7)$$

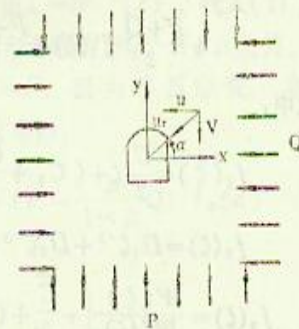


图 1 地应力作用下的巷道

Fig. 1 A tunnel acted by in situ stress

式中 $\sigma$ 是单位圆周上的点.

$$2G(u+iv) = \kappa\varphi(\zeta) - W(\zeta) \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{W'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \quad (8)$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{P+Q}{4}W(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \quad (9a)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{P-Q}{2}W(\zeta) + \psi_0(\zeta) \quad (9b)$$

$\varphi_0(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$  为单位圆外包括无穷远点在内的解析函数.

将(9a, b)代入(7), 利用 *Harnack* 定理及柯西积分公式的推广形式, 经复杂的推导可求出  $\varphi_0(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$ , 然后将  $\varphi_0(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$  代入(9a, b)可得:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{P+Q}{2} \left[ \frac{C}{2}\zeta + (C_1 + \frac{CB_1}{2})\zeta^{-1} + (C_2 + \frac{CB_2}{2})\zeta^{-2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (C_n + \frac{CB_n}{2})\zeta^{-n} \right] + \frac{P-Q}{2} (D_1\zeta^{-1} + D_2\zeta^{-2} + \dots + D_n\zeta^{-n}) \\ \varphi(\zeta) &= \frac{P+Q}{2} \left\{ \frac{\overline{W}(\frac{1}{\zeta})}{W'(\zeta)} (C_1\zeta^{-2} + 2C_2\zeta^{-3} + \dots + nC_n\zeta^{-n-1}) + \overline{E_1}\zeta + \overline{E_2}\zeta^2 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \overline{E_{n-2}}\zeta^{n-2} - \overline{C}\zeta^{-1} \right\} + \frac{P-Q}{2} \left[ \frac{\overline{W}(\frac{1}{\zeta})}{W'(\zeta)} (D_1\zeta^{-2} + 2D_2\zeta^{-3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + nD_n\zeta^{-n-1}) + \overline{N_1}\zeta + \overline{N_2}\zeta^2 + \dots + \overline{N_{n-2}}\zeta^{n-2} + C\zeta \right] \end{aligned}$$

式中,  $C_k$ ,  $D_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 和  $E_k$ ,  $N_k$  ( $k=1, 2, \dots, n-2$ ) 是与  $B_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 有关的数.

将求得的  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  代入(8)可得:

$$\begin{aligned} u+iv &= \frac{1+\mu}{E} \left[ \frac{P+Q}{2}(3-4\mu)f_1(\zeta) + \frac{P-Q}{2}(3-4\mu)f_2(\zeta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{P+Q}{2}f_3(\zeta) + \frac{P-Q}{2}f_4(\zeta) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\zeta) &= \frac{C}{2}\zeta + (C_1 + \frac{CB_1}{2})\zeta^{-1} + (C_2 + \frac{CB_2}{2})\zeta^{-2} + \dots + (C_n + \frac{CB_n}{2})\zeta^{-n} \\ f_2(\zeta) &= D_1\zeta^{-1} + D_2\zeta^{-2} + \dots + D_n\zeta^{-n} \\ f_3(\zeta) &= \frac{W(\zeta)}{W'(\zeta)} \left[ -\frac{\overline{C}}{2} + (\overline{C_1} + \frac{\overline{C}\overline{B_1}}{2})\zeta^{-2} + 2(\overline{C_2} + \frac{\overline{C}\overline{B_2}}{2})\zeta^{-3} \right. \\ &\quad \left. + n(\overline{C_n} + \frac{\overline{C}\overline{B_n}}{2})\zeta^{-n-1} \right] - \frac{W(\frac{1}{\zeta})}{W'(\zeta)} \left[ \overline{C_1}\zeta^{-2} + 2\overline{C_2}\zeta^{-3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + n\overline{C_n}\zeta^{-n-1} \right] - E_1\zeta - E_2\zeta^2 - \dots - E_{n-2}\zeta^{n-2} + C\zeta^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(\xi) &= \frac{W(\xi)}{W'(\xi)} \left[ \bar{D}_1 \bar{\xi}^{-2} + 2\bar{D}_2 \bar{\xi}^{-3} + \dots + n\bar{D}_n \bar{\xi}^{-n-1} \right] \\
 &- \frac{W(\frac{1}{\xi})}{W'(\frac{1}{\xi})} \left[ D_1 \bar{\xi}^{-2} + 2D_2 \bar{\xi}^{-3} + \dots + nD_n \bar{\xi}^{-n-1} \right] \\
 &- N_1 \bar{\xi} - N_2 \bar{\xi}^2 - \dots - N_{n-2} \bar{\xi}^{n-2} + \bar{C} \bar{\xi}
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$f_1(\xi) \sim f_4(\xi)$  中不含参数  $P, Q, E, \mu$ , 它们只是坐标的函数. 孔形不同,  $f_1(\xi) \sim f_4(\xi)$  的具体表达式也不同, 当为圆孔时,  $W(\xi) = C\xi$ , 则:

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(\xi) &= \frac{1}{2} C\xi & f_3(\xi) &= -\frac{1}{2} C\xi + C\bar{\xi}^{-1} \\
 f_2(\xi) &= -C\bar{\xi}^{-1} & f_4(\xi) &= -C\xi\bar{\xi}^{-2} + C\bar{\xi}^{-3} + C\bar{\xi}
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

此时, 式中的  $C$  表示圆孔的半径.

因  $Z = W(\xi)$ , 故有  $f_k(\xi) = F_k(Z)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . (10) 中的  $U, V$  为直角位移分量, 而实际容易量测的只是径向位移  $U_r$ .  $U_r$  和  $U, V$  之间的关系 (图 1) 为:

$$U_r = U \cos \alpha + V \sin \alpha$$

将 (10) 中的  $U, V$  代入上式得:

$$\begin{aligned}
 U_r &= \frac{1+\mu}{E} \left\{ \frac{P+Q}{2} (3-4\mu) R_e [F_1(z)] + \frac{P-Q}{2} (3-4\mu) R_e [F_2(z)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{P+Q}{2} R_e [F_3(z)] + \frac{P-Q}{2} R_e [F_4(z)] \right\} \cos \alpha \\
 &+ \frac{1+\mu}{E} \left\{ \frac{P+Q}{2} (3-4\mu) I_m [F_1(z)] + \frac{P-Q}{2} (3-4\mu) I_m [F_2(z)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{P+Q}{2} I_m [F_3(z)] + \frac{P-Q}{2} I_m [F_4(z)] \right\} \sin \alpha \quad (13)
 \end{aligned}$$

当给定了具体孔形时,  $Z = W(\xi)$  便为已知, 由此求出  $\xi = W^{-1}(Z)$ , 代入 (11) 便可定出  $F_1(Z) \sim F_4(Z)$ , 这些函数只与孔形有关, 而与参数  $P, Q, E, \mu$  无关.

巷道开挖前, 在原始地应力作用下, 有:  $\sigma_x = Q, \sigma_y = P$ , 因为平面应变, 则  $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) = \mu(P+Q)$ , 利用几何、物理方程可求得:

$$U = \frac{1-\mu^2}{E} \left( Q - \frac{\mu}{1-\mu} P \right) R_e [Z]; \quad V = \frac{1-\mu^2}{E} \left( P - \frac{\mu}{1-\mu} Q \right) I_m [Z]$$

由此同样可求出径向位移为:

$$U_r = \frac{1-\mu^2}{E} \left( Q - \frac{\mu}{1-\mu} P \right) R_e [Z] \cos \alpha + \frac{1-\mu^2}{E} \left( P - \frac{\mu}{1-\mu} Q \right) I_m [Z] \sin \alpha \quad (14)$$

这样, 开挖巷道所引起的围岩径向位移为 (13) 与 (14) 之差, 即:

$$U_r = \frac{1+\mu}{E} \left\{ \frac{P+Q}{2} (3-4\mu) R_e [F_1(Z)] + \frac{P-Q}{2} (3-4\mu) R_e [F_2(Z)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} & + \frac{P+Q}{2} R_e[F_3(Z)] + \frac{P-Q}{2} R_e[F_4(Z)] \} \cos \alpha \\ & - \frac{1-\mu^2}{E} \left( Q - \frac{\mu}{1-\mu} P \right) R_e[Z] \cos \alpha + \frac{1+\mu}{E} \left\{ \frac{P+Q}{2} (3-4\mu) I_m[F_1(Z)] \right. \\ & + \frac{P-Q}{2} (3-4\mu) I_m[F_2(Z)] + \frac{P+Q}{2} I_m[F_3(Z)] \\ & \left. + \frac{P-Q}{2} I_m[F_4(Z)] \right\} \sin \alpha - \frac{1-\mu^2}{E} \left( P - \frac{\mu}{1-\mu} Q \right) I_m[Z] \sin \alpha \quad (15)
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}$$

式(15)就是任意形状巷道围岩径向位移的表达式,它给出了径向位移与参数及位置坐标 $Z$ 的关系,以此式为基础,利用参数可辨识条件,可讨论不同孔形在不同情形下的可辨识性。

#### 四、任意形状巷道的讨论

对任意形状巷道,可以求得这样一个结论: $P, Q, E$ 不能同为要辨识的未知量,也就是说,即使量测了所有点的位移也不能同时唯一辨识出 $P, Q, E$ 。

根据(15)可求得 $P, Q, E$ 的灵敏系数 $\frac{\partial U_r}{\partial P}, \frac{\partial U_r}{\partial Q}, \frac{\partial U_r}{\partial E}$ ,将此代入

$$\begin{aligned}
& C_1 \frac{\partial U_r}{\partial P} + C_2 \frac{\partial U_r}{\partial Q} + C_3 \frac{\partial U_r}{\partial E} = 0, \text{ 可得:} \\
& \left[ C_1 \frac{1+\mu}{E} (3-4\mu) + C_2 \frac{1+\mu}{E} (3-4\mu) - C_3 \frac{1+\mu}{E^2} (3-4\mu)(P+Q) \right] g_1(z) \\
& + \left[ C_1 \frac{1+\mu}{E} (3-4\mu) - C_2 \frac{1+\mu}{E} (3-4\mu) - C_3 \frac{1+\mu}{E^2} (3-4\mu)(P-Q) \right] g_2(z) \\
& + \left[ C_1 \frac{1+\mu}{E} + C_2 \frac{1+\mu}{E} - C_3 \frac{1+\mu}{E^2} (P+Q) \right] g_3(z) \\
& + \left[ C_1 \frac{1+\mu}{E} - C_2 \frac{1+\mu}{E} - C_3 \frac{1+\mu}{E^2} (P-Q) \right] g_4(z) \\
& + \left[ C_1 \frac{\mu(1+\mu)}{E} - C_2 \frac{1-\mu^2}{E} + C_3 \frac{1+\mu}{E^2} \left( Q - \frac{\mu}{1-\mu} P \right) \right] g_5(z) \\
& + \left[ -C_1 \frac{1-\mu^2}{E} + C_2 \frac{\mu(1+\mu)}{E} + C_3 \frac{1-\mu^2}{E^2} \left( P - \frac{\mu}{1-\mu} Q \right) \right] g_6(z) = 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

式中:

$$g_i(z) = \frac{1}{2} \left\{ R_e[F_i(z)] \cos \alpha + I_m[F_i(z)] \sin \alpha \right\}; \quad (i=1 \sim 4)$$

$$g_5(z) = R_e[z] \cos \alpha; \quad g_6(z) = I_m[z] \sin \alpha$$

若  $g_1(Z) \sim g_6(Z)$  是线性无关的函数, 则因 (16) 对所有量测点都必须成立, 故  $g_1(Z)$  前面的系数必须等于零, 由此可得关于  $C_1, C_2, C_3$  的一个线性方程组, 方程组由六个不独立的方程组成,  $C_1, C_2, C_3$  有非零解, 以上的结论是在  $g_1(Z) \sim g_6$  与线性无关的条件下得到的, 对于  $g_1(Z) \sim g_6(Z)$  与线性有关的情形, 此时由 (16) 得到的线性方程组个数必小于六, 则  $C_1, C_2, C_3$  必定也有非零解, 由此证明了对任意形状的巷道,  $P, Q, E$  的灵敏系数总线性有关, 即不能唯一辨识出  $P, Q, E$ .

若  $P, Q, E, \mu$  都为未知参数, 这时又多了一个未知参数  $\mu$ , 当然即使取遍了所有点的位移, 这些参数更不能同时唯一辨识.

以上只讨论了一种情形, 所得结论对各种形状的巷道都适用, 对于量测点的布置对参数辨识的影响及其它情形参数的可辨识讨论, 以直墙半圆形巷道, 圆形巷道 (图 2) 为例进行.

## 五、直墙半圆形巷道的讨论

如图 2 所示, 直墙半圆拱为煤矿 600mm 轨距, 1.0 吨矿车的单轨运输巷道.

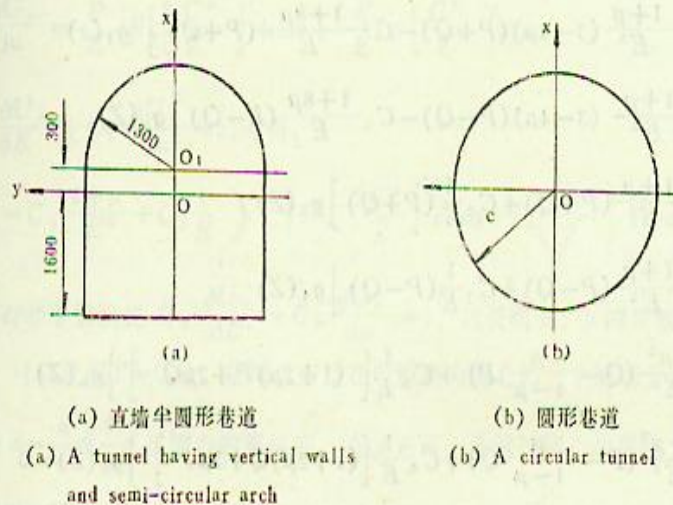


图 2 (Fig. 2)

取映射函数为前 6 项, 映象图形与实际图形相差很小, 图 2 所示的直墙半圆形巷道的映射函数为:

$$Z = W(\zeta) = 1.5938(\zeta + 0.0906\zeta^{-1} + 0.0718\zeta^{-2} - 0.0954\zeta^{-3} + 0.038\zeta^{-4} + 0.0027\zeta^{-5})$$

此时可以求得:

$$f_1(\zeta) = 0.7969\zeta - 0.0670\zeta^{-1} - 0.0632\zeta^{-2} + 0.0757\zeta^{-3} - 0.0303\zeta^{-4} - 0.0021\zeta^{-5}$$

$$f_2(\zeta) = -1.4591\zeta^{-1} - 0.0558\zeta^{-2} - 0.0039\zeta^{-3}$$

$$f_3(\zeta) = \frac{w(\zeta)}{W'(\zeta)} \left[ -0.7969 - 0.0670\zeta^{-2} - 0.1264\zeta^{-3} - 0.2271\zeta^{-4} - 0.1212\zeta^{-5} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -0.0105\bar{\xi}^{-6} \Big] + \frac{W(\frac{1}{\bar{\xi}})}{W'(\bar{\xi})} \Big[ 0.1391\bar{\xi}^{-2} + 0.2408\bar{\xi}^{-3} + 0.4551\bar{\xi}^{-4} + 0.2424\bar{\xi}^{-5} \\
& + 0.0215\bar{\xi}^{-6} \Big] + 0.0053\bar{\xi} - 0.0059\bar{\xi}^{-2} - 0.0004\bar{\xi}^{-3} + 1.5938\bar{\xi}^{-4} \\
f_4(\bar{\xi}) = & -\frac{W(\bar{\xi})}{W'(\bar{\xi})} \Big[ 1.4591\bar{\xi}^{-2} + 0.1116\bar{\xi}^{-3} + 0.0117\bar{\xi}^{-4} \Big] \\
& + \frac{1}{W'(\bar{\xi})} \Big[ 1.4591\bar{\xi}^{-2} + 0.1116\bar{\xi}^{-3} + 0.0117\bar{\xi}^{-4} \Big] \\
& + 1.7284\bar{\xi} - 0.0557\bar{\xi}^2 - 0.0039\bar{\xi}^3
\end{aligned}$$

今分几种情形讨论:

### 1. 假设 P, Q 已知, 而仅有 E, $\mu$ 未知时

根据 (15) 可求得 E,  $\mu$  的灵敏系数  $\frac{\partial U_r}{\partial E}$ ,  $\frac{\partial U_r}{\partial \mu}$ .

代入  $C_1 \frac{\partial U_r}{\partial E} + C_2 \frac{\partial U_r}{\partial \mu} = 0$  可得:

$$\begin{aligned}
& \left[ -C_1 \frac{1+\mu}{E^2} (3-4\mu)(P+Q) - C_2 \frac{1+8\mu}{E} (P+Q) \right] g_1(z) \\
& + \left[ -C_1 \frac{1+\mu}{E^2} (3-4\mu)(P-Q) - C_2 \frac{1+8\mu}{E} (P-Q) \right] g_2(Z) \\
& + \left[ -C_1 \frac{1+\mu}{E^2} (P+Q) + C_2 \frac{1}{E} (P+Q) \right] g_3(Z) \\
& + \left[ -C_1 \frac{1+\mu}{E^2} (P-Q) + C_2 \frac{1}{E} (P-Q) \right] g_4(Z) \\
& + \left\{ C_1 \frac{1-\mu^2}{E^2} \left( Q - \frac{\mu}{1-\mu} P \right) + C_2 \frac{1}{E} \left[ (1+2\mu)P + 2\mu Q \right] \right\} g_5(Z) \\
& + \left\{ C_1 \frac{1-\mu^2}{E^2} \left( P - \frac{\mu}{1-\mu} Q \right) + C_2 \frac{1}{E} \left[ (1+2\mu)Q + 2\mu P \right] \right\} g_6(Z) = 0
\end{aligned}$$

若量测点布置在整个区域, 则  $f_1(\bar{\xi}) \sim f_4(\bar{\xi})$  与线性无关, 由此可得  $F_1(z) \sim F_4(z)$  也与线性无关, 故  $g_1(Z) \sim g_6(Z)$  与线性无关, 要求上式对域中的量测点都成立, 则  $g_1(Z) \sim g_6(Z)$  前面的系数必须等于零, 由此可得关于  $C_1, C_2, C_3$  的一个线性方程组, 因方程组只有零解  $C_1 = C_2 = 0$ , 故  $\frac{\partial U_r}{\partial E}, \frac{\partial U_r}{\partial \mu}$  与线性无关, 这说明在域中适当选取一些点的位移可唯一辨识出 E,  $\mu$ .

同理也可证明量测点只布置在过坐标原点的一条直线上或孔边上将得到同样结论.

### 2. 假设 P 已知, 而 Q, E, $\mu$ 未知

可以证明: 按情形 1 布置量测点能够唯一辨识出 Q, E,  $\mu$ . 若假设 Q 已知, 而 P, E,  $\mu$  未知, 这种情形与情形 2 属于同一类型, 故可得到相同的结论.



### 3. 假设 $E, \mu$ 已知, 而 $P, Q$ 未知

可以证明: 按以上方法布置量测点能唯一辨识出  $P, Q$ .

## 六、圆形巷道的讨论

由 (12) 知, 对于圆形巷道有:

$$\begin{aligned} F_1(Z) &= \frac{Z}{2} & F_2(Z) &= -\frac{C^2}{Z} \\ F_3(Z) &= -\frac{Z}{2} + \frac{C^2}{Z} & F_4(Z) &= -C^2 \frac{Z}{Z^2} + \frac{C^4}{Z^3} + \bar{Z} \end{aligned}$$

可以证明圆形巷道的可辨识性比直墙半圆性巷道差, 今分几种情况讨论:

### 1. 假设 $P, Q$ 已知, 而仅有 $E, \mu$ 未知时

(1) 可以证明  $P=Q$  时, 即使取遍了所有点的位移也不能同时唯一辨识出  $E, \mu$ .  $P=Q$  时, 由 (15) 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial E} &= -\frac{1+\mu}{E^2} P R_e \left[ \frac{C^2}{Z} \right] \cos \alpha - \frac{1+\mu}{E^2} P I_m \left[ \frac{C^2}{Z} \right] \sin \alpha \\ \frac{\partial U_r}{\partial \mu} &= \frac{P}{E} R_e \left[ \frac{C^2}{Z} \right] \cos \alpha + \frac{P}{E} I_m \left[ \frac{C^2}{Z} \right] \sin \alpha \end{aligned}$$

代入  $C_1 \frac{\partial U_r}{\partial E} + C_2 \frac{\partial U_r}{\partial \mu} = 0$ , 可得:

$$P \left( -C_1 \frac{1+\mu}{E^2} + C_2 \frac{1}{E} \right) \cdot \left\{ R_e \left[ \frac{C^2}{Z} \right] \cos \alpha + I_m \left[ \frac{C^2}{Z} \right] \sin \alpha \right\} = 0$$

可以看出有非零解满足  $C_1 \frac{\partial U_r}{\partial E} + C_2 \frac{\partial U_r}{\partial \mu} = 0$ , 这说明  $E, \mu$  的灵敏系数线性有关.

(2) 可以证明  $P \neq Q$  时, 量测点布置在以原点为圆心的一个圆周上, 可唯一辨识出  $E, \mu$ ; 除  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  或  $\frac{3}{4}\pi$  过圆心的直线外, 在其它任一条通过圆心的直线上布置量测点都可唯一辨识出  $E, \mu$ .

### 2. 假设 $P$ 已知, 而 $Q, E, \mu$ 未知

可以证明: 量测点只布置在同一圆周上或同一条过圆心的直线上不能同时唯一辨识出  $Q, E, \mu$ . 但  $P \neq Q$  时, 只要选取的量测点不在同一个圆周或同一条过圆心的直线上即可唯一辨识出  $Q, E, \mu$ .

### 3. 假设 $E, \mu$ 已知, 而 $P, Q$ 未知

可以证明: (1) 量测点布置在一个圆周上可以唯一辨识出  $P, Q$ ; (2) 除  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  或  $\frac{3}{4}\pi$  过圆心的直线外, 在其它任一条过圆心直线上的量测点, 都可唯一辨识出  $P, Q$ ;

(3) 当然量测点不在同一圆周或同一条过圆心的直线上, 也能唯一辨识出  $P, Q$ .

## 七、结 语

1. 位移反分析不能辨识出地应力及围岩性质所有参数。
2. 围岩的弹性模量和地应力不能同时为要辨识的未知量。
3. 非圆形巷道(直墙半圆形巷道)的可辨识性比圆形巷道的可辨识性好,即有些参数通过圆形巷道不能辨识出来,而通过非圆形巷道则能唯一求出。
4. 通过圆形巷道的可辨识性讨论知:量测点的布置对参数的可辨识性有影响,若量测位置选择不当,可使某些参数本来为可辨识的,反而由此导致为不可辨识的。

本文的参数可辨识性讨论是在平面应变有位移表达式的情形下进行的,对实际的空间问题,至今尚未有精确的位移解析表达式,为了考虑实际问题的空间效应,可近似将求得的位移表达式乘上一个空间效应系数  $W^{[4]}$ ,这样,本文所得结论对空间问题也全部适用。

### 参 考 文 献

- [1] 陈子荫, 地下工程中岩石力学问题的基本特点, 煤炭学报, 1986, 4
- [2] Sakurai S and Takeuchi K. Back analysis of measured displacements of tunnels. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 1983, 16(3)
- [3] James V Beck and Kenneth J Arnold. *Parameter Estimation in Engineering and science*. New York 1977, 213—487
- [4] Мухомедовичи Н Н. 数学弹性力学的几个基本问题. 科学出版社, 1958.
- [5] 刘允芳, 弹性介质岩体中非圆形洞室位移反分析计算, 岩石力学与工程学报, 1986, 5(1)

## Discussion of Identifiability for Parameters of the Surrounding Rock of a Tunnel and in Situ Stress

Lu Aizhong

(Shan Dong Mining College)

### Abstract

It is an effective method to determine inversely in situ stress and mechanical parameter of surrounding rock based on the measured deformation of a tunnel. This displacement back analysis method cannot determine simultaneously in situ stress and all of the parameters and can only determine a limited number of them. This paper discusses the identifiability the parameters and in situ stress by means of identifiability conditions. The discussion of the identifiability is based on some analytic formulas of displacement. Using elastic theory planar elastic complex variable technique the author derived the analytic formulas of displacement for a non-circular. And it proved that, the maximum number of the parameters that can be uniquely estimated is given, and the effect of measured points on the identifiability is analysed