基于量子行为粒子群优化方法的随机规划算法

李红梅,孙 俊,须文波
LI Hong-mei,SUN Jun,XU Wen-bo

江南大学 信息工程学院,江苏 无锡 214122
School of Information Technology,Southern Yangtze University,Wuxi,Jiangsu 214122,China
E-mail:njaulhm@hotmail.com

LI Hong-mei,SUN Jun,XU Wen-bo.Empirical study based on Quantum-behaved Particle Swarm Optimization stochastic programming algorithm.Computer Engineering and Applications,2007,43(24):185-188.

Abstract: A multistage stochastic financial optimization manages portfolio in constantly changing financial markets by periodically rebalancing the asset portfolio to achieve return maximization and/or risk minimization.In this paper,we present a decision-making process that uses our proposed Quantum-behaved Particle Swarm Optimization(QPSO) Algorithm to solve multi-stage portfolio optimization problem.The objective function is classical return-variance function.The performance of our algorithm is demonstrated by optimizing the allocation of cash and various stocks in S&P 100 index.Experiments are conducted to compare performance of the portfolios optimized by different objective functions with Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm and Genetic Algorithm(GA) in terms of efficient frontiers.

Key words: Multi-objective programming;asset allocation;Particle Swarm;Quantum-behaved

摘 要:在不断变化的金融市场中,多阶段投资组合优化通过周期性地重组投资对象来追求回报最大,风险最小。提出了使用基于量子化行为的粒子群优化算法(Quantum-behaved Particle Swarm Optimization,QPSO)解决多阶段投资优化问题,并使用经典的利润风险函数作为目标函数,通过算法对标准普尔指数100的不同股票和现金进行投资组合的优化研究。根据实验得出的期望收益率与方差表明,QPSO算法在寻找全局最优解方面要优于粒子群算法(Particle Swarm Optimization,PSO)和遗传算法(Genetic Algorithm,GA)。

关键词:随机规划;资产分配;粒子群;量子行为
文章编号:1002-8331(2007)24-0185-04 **文献标识码**:A **中图分类号**:TP301.6

1 引言

投资优化问题主要包括资产分配和风险管理。多阶段的金融优化问题是一个定量模型,从全局的角度来看,主要包括资产分配策略和补救策略。该模型应用于不断变化的金融市场中,它通过周期性地重组投资对象,来达到回报最大,风险最小。但是随机的投资优化问题是一个复杂的NP问题,并且是非线性的,具有许多局部最优解。为了解决组合优化问题,有人建议使用线性规划的方法,像CPLEX和OSL将非线性的目标函数划分成几段线性的目标函数[1]。然而通过这些算法搜索全局最优解,花费时间多,效率差。

在受到鸟群觅食行为的影响下,1995年Kennedy博士和Eberhart博士提出了粒子群优化算法(PSO)[4]。2002年,孙等人在详细研究粒子群算法的基础上,提出了量子粒子群算法(QPSO)[8-10]。

2 多阶段投资优化模型

多阶段的随机优化模型,主要应用于动态的资产分配问题[5,6]。在不断变化的金融市场中,它通过周期性的资产重组来达到回报最大,风险最小。

在定义模型时,将规划周期分成两个部分 T_1、T_2,其中 T_1=0,1,$\cdots\tau$,T_2 从 τ+1,$\cdots T$。在 T_1 阶段,τ 决定了规划周期的时间,根据相应 τ 周期的开始阶段,投资者作出投资决定。T_2 周期是从 τ 到 T,计算投资组合的利润,以及其它一些因素。在该阶段内,投资者不可以再实施任何有利于投资的任何决定。

将投资的种类表示为:A=1,2,3$\cdots$,I,其中1代表现金,其余的用来表示其它的投资工具,比如,股票、债券、房产等。两两投资对回报率的影响相对较低,所以将不同种类的投资对象相互组合是非常必要的。在该模型中,使用一个特定情节树来表示这些特定情况,如图1所示。在此特定情节树中,τ=3、S=8。每

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60474030)。
作者简介:李红梅(1981-),女,硕士研究生,主要研究领域为金融领域,投资组合、多目标规划;孙俊,男,博士研究生,主要研究领域为人工智能、进化计算、多目标规划;须文波(1946-),男,博士生导师,主要研究领域为人工智能、计算机控制、嵌入式操作系统、并行计算、模式识别。

一个路径从 t=0 到 t=τ 代表一个特定情况。每一个特定情况 S 代表这个模型中所有不确定参数的一种现实的可能性。

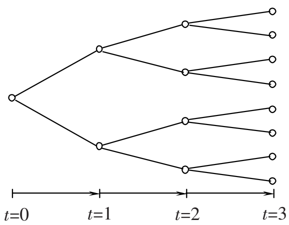


图1 拥有2种特定情况和3个阶段的特定情节树

具体来说,W_t 代表在 t 周期,在某个特定情况下的财富总值。因此,一系列代表现实的特定情况表示为$(\omega^s_1,\omega^s_2,\cdots,\omega^s_\tau)$,$s\in S$:=$\{1,2,\cdots,S\}$在所有的$(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_\tau)$中,每个特定情况发生的概率为 π_s,$\pi_s>0$ 且 $\sum_{s=1}^{s}\pi_s=1$。

假设在每个阶段的开始时进行投资重组。除了简单的将红利和利润再投资之外,不再作任何交易的买卖策略。为了方便,同样假设现金也被用作再投资的种类,并且所有的借贷是以单个阶段为基础。设 $i\in A$,$t\in T_1$,$s\in S$ 定义如下的参数和决策变量。

参数:

$r^s_{i,t}=1+\rho^s_{i,t}b^s_t$ 其中 $\rho^s_{i,t}$ 是在第 t 阶段,特定情况 s 下,资产 i 的收益率[7];

π_s 表示特定情况 s 发生的概率,且 $\sum_{s}^{s}\pi_s=1$;

w_0 表示投资开始时的财富总量;

$\sigma_{s,t}$ 表示在第 t 阶段开始时,用来重新平衡资产 i 所用的交易花费;

β^s_t 表示在第 t 阶段,特定情况 s 下的借贷率。

决策变量:

$\chi^s_{i,t}$ 表示在第 t 阶段内,特定情况 s 下,资产重组后,资产 i 的财富量;

$v^s_{i,t}$ 表示在第 t 阶段开始时,特定情况 s 下,资产重组前,资产 i 的财富量;

w^s_t 表示在第 t 阶段开始时,特定情况 s 下,总的财富值;

$p^s_{i,t}$ 表示在第 t 阶段内,特定情况 s 下,为了重新平衡资产而重新买入资产 i 的总量;

$d^s_{i,t}$ 表示在第 t 阶段内,特定情况 s 下,为了重新平衡资产而重新卖出资产 i 的总量;

b^s_t 表示在第 t 阶段,特定情况 s 下,所借的钱。

假设了这些定义下,本文列出了在金融优化方面这个常用的随机优化模型。

数学模型:

$$\text{Max}\ \ Z=\sum_{s=1}^{s}\pi_s f(w^s_\tau) \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_i x^s_{i,0}=w_0 \quad \forall s\in S \tag{2}$$

$$\sum_i x^s_{i,0}=w^s_t \quad \forall s\in S,t=1,2,\cdots,\tau \tag{3}$$

$$v^s_{i,t}=r^s_{i,t-1}x^{st}_{i,t-1}\ \forall s\in S,t=1,2,\cdots,\tau,i\in A \tag{4}$$

$$x^s_{i,t}=v^s_{i,t}+p^s_{i,t}(1-\sigma_{i,t})-d^s_{i,t}$$
$$\forall s\in S,t=1,2,\cdots,\tau,i\neq 1 \tag{5}$$

$$x^s_{1,t}=v^s_{1,t}+\sum_{i\neq 1}d^s_{i,t}(1-\sigma_{i,t})-\sum_{i\neq 1}p^s_{i,t}-b^s_{t-1}(1+\beta^s_{t-1})+b^s_t$$
$$\forall s\in S,t=1,2,\cdots,\tau \tag{6}$$

$$\chi^s_{i,t}=\chi^{s'}_{i,t} \tag{7}$$

作为单阶段模型,非线性目标函数(1)可以有几个不同的形式。如果引入经典的利润风险函数,(1)式可以改写成

$$\text{Max}\ \ Z=\eta\cdot\text{Mean}(w_\tau)-(1-\eta)\cdot\text{Var}(w_\tau) \tag{8}$$

其中 $\text{Mean}(w_\tau)$表示所有的财富的平均值,$\text{Var}(w_\tau)$表示在 τ 阶段结束后,在整个特定情况下,所有财富的方差。参数 η 表示利润与风险之间的相对重要性,这个目标函数 τ 阶段结束后,将会产生一个有效的财富极值。

约束条件(2)确保了整个初始阶段投资总和等于初始财富。约束条件(3)代表第 t 阶段结束时,特定情况 s 下,在重组资产 i 前的财富总积累。该制约条件可以用来修改资产、负债、投资目标等。约束条件(4)描述了第 t 阶段开始时,在重组资产 i 前的财富积累。公式(5)表示除了现金以外,其它所有的投资工具在整个周期的约束条件。约束条件(6)给出了现金流动的平衡条件。条件(7)表示对一些不可预料的情况的制约。然而,所有这些制约条件确保了所有特定情况下,只要它们的历史数据相同时,那么在同一阶段,它们的结论也一样。

3 QPSO

在 PSO 中,每个粒子带有位置和速度,粒子 i 第 k 次迭代的位置可表示为 $x_i(k)=(x_{i1}(k),x_{i2}(k),\cdots,x_{iD}(k))$,速度可表示为 $v_i(t)=(v_{i1}(k),v_{i2}(k),\cdots,v_{iD}(k))$。粒子运动方程如下:

$$v_{ij}(k+1)=w\cdot v_{ij}(k)+c_1\cdot r_1(p_{ij}(k)-x_{ij}(k))+c_2\cdot r_2(p_{gj}(k)x_{ij}(k)),$$
$$x_{ij}(k+1)=x_{ij}(k)+v_{ij}(k+1) \tag{9}$$

参数 c_1 和 c_2 被称为加速因子,向量 $P_i=(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{iD})$表示粒子 i 所搜索到的最优位置,向量 $P_g=(P_{g1},P_{g2},\cdots,P_{gD})$表示种群种所有粒子的最优位置,参数 r_1 和 r_2 是产生在(0,1)之间的随机数。通常来说,为了防止粒子飞离搜索空间,速度的范围限制在$[-V_{\max},V_{\max}]$内。公式(9)中的惯性权重由 shi 和 Eberhart 提出。目前,有关 PSO 算法的研究大多数以带惯性权重的 PSO 算法为基础进行改进的。

在粒子的轨道[3]分析中,为了保证 PSO 收敛,每个粒子需要收敛到 $P_i=(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{iD})$,定义为:

$$P_{ij}(k)=\varphi\cdot P_{ij}(k)+(1-\varphi)\cdot P_{gj}(k)$$
$$\varphi=c_1r_1/(c_1r_1+c_2r_2) \tag{10}$$

其次,在粒子群中引入了一个平均最优点 mbest,它定义为所有粒子的局部最好位置的平均值。公式如下:

$$C(K)=(C_1(K),C_2(K),\cdots,C_D(K))=$$
$$\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}P_{i1}(k),\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}P_{i2}(k),\cdots,\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}P_{iD}(k)\right) \tag{11}$$

其中 M 表示种群的大小,P_i 代表局部的最好位置,L 的计算公式可以表示为:

$$L=2\alpha\cdot|C_j(K)-X_j(K)| \tag{12}$$

因此粒子的迭代方程变为:

$$x_{ij}(k+1)=p_{ij}\pm\alpha\cdot|C_{ij}(k)-x_{ij}(k)|\cdot\text{In}(1/u) \tag{13}$$

其中 α 是收敛膨胀系数，它影响算法的收敛速度。

QPSO 算法：

给粒子随机初始化位置 $X_i=X[i][:]$，速度 $V_i=V[i][:]$；设局体最优位置 $P_i=X_i$

```
while termination criterion is not met do
 compute the mean best position C[:] by equation(11)
   for i=1 to swarm size M
     if f(Xi)<f(Pi)  then Pi=Xi;
     find the Pg=P[g][:] across the swarm
     for j=1 to D
      fi=rand(0,1);u=rand(0,1);
      p=fi*P[i][j]+(1-fi)*P[i][j];
      if (rand(0,1)>0.5)
         X[i][j]=p-a*abs(C[j]-X[i][j])*ln(1/u);
      Else
         X[i][j]=p-a*abs(C[j]-X[i][j])*ln(1/u);
     endif
    endfor
   endif
  endfor
endwhile
```

4 基于 QPSO 的投资组合优化

本文利用了 QPSO 算法对投资组合优化进行了研究，实验数据是从 2000 年 1 月 1 日到 2004 年 12 月 31 日标准普尔指数 100 的股票的周开盘价和收盘价，其中现金和属于不同公司的十种股票被选中用来优化。

在算法中，本文设置市场指数两个实现的可能：第一，市场指数保持上升的状态。第二，市场指数保持下降的状态。如果用 1 表示上升，0 表示下降，那么图 1 的特定情节树可以表示成下面 8 种形式：(0,0,0)，(0,0,1)，(0,1,0)，(0,1,1)，(1,0,0)，(1,0,1)，(1,1,0)，(1,1,1)。特定情节树的每一个阶段边缘值对应于市场指数的实现，或是上升或是下降，正如在 t 阶段，某一特定情况 s 下，所有资产的收益率。计算每个特定情况的发生率 π_s，并根据每个股票的收盘价的指数来计算 $\rho_{i,t}^s$，对于现金的收益率，设定了一个固定的年利率 6%，所以根据整个周期的计划，周收益率为 12%。

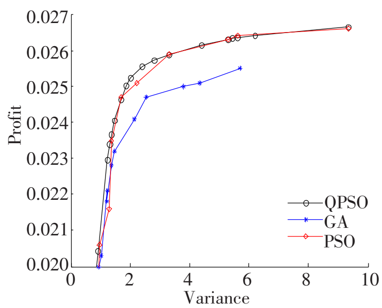
使用 π_s 和 $\rho_{i,t}^s$ 作为参数，用 QPSO、PSO、GA[2]搜索最优的 $x_{i,t}^s$ 来得到目标函数(1)的最大值。在整个规划周期中，在不同的特定情况下，重组后，本文使用 $a_{i,t}^s$ 作为决策参数来分配被选中的资产的比例，因此 $x_{i,t}^s=a_{i,t}^s\cdot w_t^s$。

特定情节树一共 15 个节点，每个节点对应的特定情况都包含了对 11 个投资对象的分配比例。在 t 阶段，每个特定情况分配的比例的总和为 100%。因此，每个资产的分配比例可以标准化为 $a_{i,t}^s=a_{i,t}^s/\sum_{i=1}^{A}a_{i,t}^s$，在算法迭代的过程中，$a_{i,t}^s$ 用的是被标准化后的比例，此外，在实验中本文没有考虑贷款和交易，因此 $\sigma_{s,t}$、β_t^s、b_t^s 的值为 0。

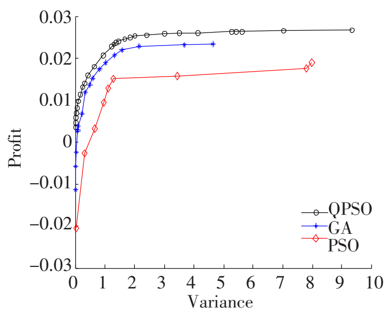
本文采用了经典的利润–风险函数作为目标函数，本文的目标就是在 τ 阶段内，产生一个利润的最大值。为了能产生一个全局最大值，本文采用了一系列在(0,1)之间不同的 η 值。所使用的 η 值列在表 1 的第一行。每个目标函数根据相应的 η 值求出在 τ 阶段一组期望收益率和风险。因此，在得到一系列期望收益率和风险后，可以求出一系列有效的利润极值。

一共运行三组实验，每组实验都运行一个优化算法，每个算法独立运行 10 次，每次迭代步数为 500，算法分别为 QPSO，PSO，GA。三个算法的具体设置如下：对于 QPSO，公式(12)中的参数 α 从 1.0 线性减小到 0.5。对于 PSO，公式(9)中，加速系数 c_1、c_2 是两个常量，都设置为 2，惯性权重 w 从 0.9 线性减到 0.4。QPSO 和 PSO 的粒子数都是 60。而对于 GA，初始群体设置为 100，编译概率 p_m=0.2，交叉的概率 p_c=0.9，交叉方法是通过对每一个变量加上一定的权重，这些权重除了一个被随机分配成 0 或是 1，其它的被设定(0,1)之间。这种交叉的方法是均衡和算术交叉的混合体，它的效果证明要比传统的交叉方法要好[11]。变异的操作方法就是标准的 Gaussian 变异，均值为 0，方差为 $\sigma^2=1/\sqrt{k+1}$，其中 k 是迭代次数。对于所有的实验来说，每个决策变量的搜索范围为[0,1]。在一个算法迭代的过程中，在 t 阶段，特定情况 s 下，所有资产分配的比例都为 0 时，本文将现金分配的比例设为 1，来满足所以分配比例总和为 1 的标准。

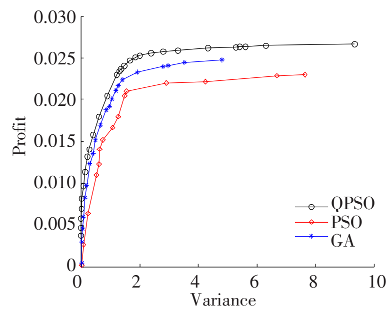
图 2 描述了由三个算法产生的有效边缘值。在图(a)中的曲线是通过目标函数运行 10 次所求的期望收益率–风险的最优值的轨迹。如图所示，由 QPSO 产生的边缘值是最好的，因为它曲线上所有的点都在 PSO 和 GA 曲线上点的左边。而由 GA 所产生的边缘值在该情况下是最差的。在图(b)中，三条曲线是根据目标函数运行 10 次所求的期望收益率–风险的最差值的轨迹，其中 QPSO 的效果最好，而 PSO 的效果最差。而图(c)是通过每个目标函数运行 10 次得出 10 个有效边缘值求出的期望收益率–风险的平均值的轨迹，且 QPSO 的效果还是最好。由此可得出结论，QPSO 可以搜索出最优的解，并且比其它两种算法更频繁地产生最有效的边缘值。而 PSO 容易陷入局部最优，尽管它偶尔也能找到全局最优解。GA 比 QPSO 差的原因是因为它的收敛速度比较慢。



(a)通过目标函数运行 10 次产生的最优的有效边缘值



(b)通过目标函数运行 10 次产生的最差的有效边缘值



(c)通过目标函数运行 10 次产生的有效边缘值的平均值

图 2 三个算法产生的有效边缘值

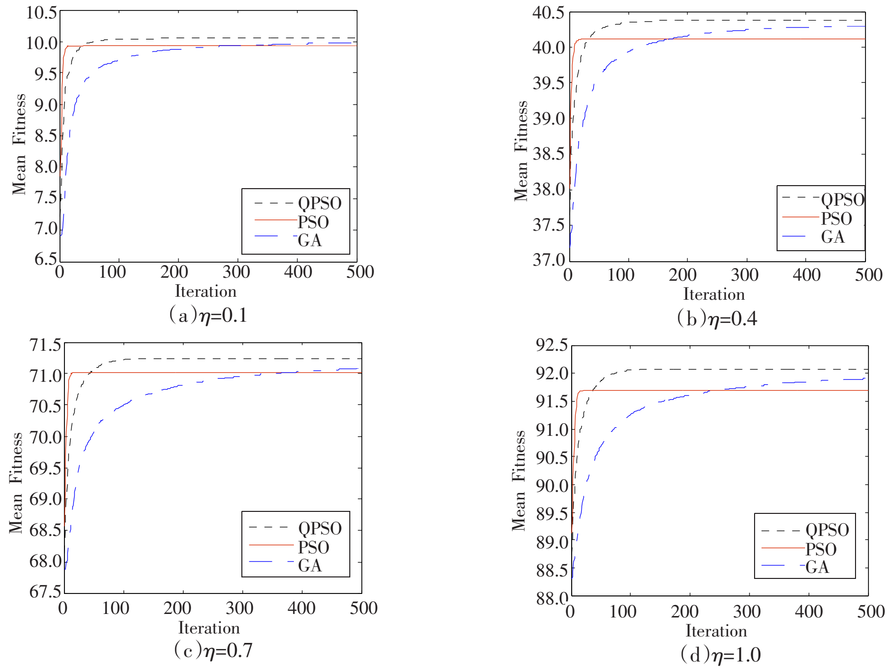


图 3 三种算法的收敛过程

本文在表 1 中还列出了目标函数根据不同的 η 值运行 10 次,所得到的均值,最大值,最小值的最优值。可以看出,当 η=0.001 时,QPSO 所得结果的均值为 1.003 7,而 GA 和 PSO 产生的均值分别是 0.980 3 和 0.886 4。QPSO 所得结果的偏差只有 0.000 07,说明该算法是一个相对健壮的算法。

表 1 根据不同的 η 值得出的不同数值结果

	η	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
QPSO	Max	1.003 7	20.119 9	40.381 7	60.880 1	81.634 6	102.664
	Mean	1.003 7	20.119 8	40.381 7	60.8800	81.634 6	102.664
	St.D	0.000 07	0.000 03	0.000 06	0.000 16	0.000 00	0.000 00
GA	Max	0.983 9	20.063 5	40.323 7	60.819 9	81.550 5	102.552
	Mean	0.980 3	20.033 2	40.298	60.779 8	81.479 7	102.479
	St.D	0.001 8	0.024 0	0.017 2	0.031 7	0.042 7	0.037 2
PSO	Max	1.003 6	20.110 0	40.353 8	60.785 2	81.634 6	102.664
	Mean	0.886 4	19.977 2	40.111 7	60.562 9	81.365 9	102.299
	St.D	0.133 6	0.136 6	0.209 5	0.198 5	0.200 4	0.399 6

图 3 表示当 η=0.1,0.4,0.7,0.9 四种不同的情况下算法的收敛情况。可以看出,PSO 在早期收敛的速度比较快,但可能会遇到早熟问题。GA 相对于 QPSO 和 PSO 收敛速度最慢,但它遇到早熟的频率要比 PSO 小。由于 GA 的收敛速度比较慢,可能会导致当运行结束时,所有的群体在搜索空间中不能收敛到某一点。跟其它两种算法相比,QPSO 收敛的速度快并且最容易找到全局最优解[10]。

PSO 被引进用来解决全局优化问题,但是它不是一个能确保全局收敛的算法。如果粒子陷入次优解,特别是在运行的最后阶段,它能跳出去的可能性是很小的。GA 是全局收敛的,但是它的收敛速度很慢以至于在运行的最后阶段它的局部搜索功能相当脆弱。QPSO 不仅拥有较快的收敛速度,而且还能确保全局收敛,这些特点使得 QPSO 在本文测试的投资优化问题上要比 PSO 和 GA 效果更好。事实上,QPSO 不仅在投资优化问题上比较有效,在其它多目标优化问题上也比 PSO 和 GA 优越[10]。

5 结论

本文研究了用 QPSO 算法来解决多阶段投资优化问题,在实验中,使用了标准普尔指数 100 的股票,并将每个股票的价格作为测试实例,同时用 PSO 和 GA 测试同样的数据实例来比较实验结果。与 GA 和 PSO 相比,QPSO 的效果最好。更重要的是,通过对几种算法收敛速度研究发现,QPSO 收敛速度很快,PSO 容易早熟,而 GA 由于收敛速度很慢,以至于找不到最优解。通过这些测试,表明了 QPSO 有效的解决了多阶段随机优化问题。

本文实验测试的问题分为 3 个阶段 8 种特定情况。许多现实的问题其规模可能更大,QPSO 也许可以有效的解决这些问题,但是目标函数的计算可能会很耗时。然而,解决金融问题节约时间是非常重要的,下一步,预计使用并行计算来解决这个问题。(收稿日期:2007 年 4 月)

参考文献:

[1] Carino D R,Ziemba W T.Formulation of the russell-yasuda kasai financial planning model.Frank Russell Company,Tacoma,WA,June 1995.

[2] Chan M C.Genetic algorithms in multi-stage asset allocation system[C]//Pro 2002 IEEE International Conference on Systems,Man and Cybernetics,Piscataway,NJ,2002,3:316-321.

[3] Clerc M,Kennedy J.The particle swarm:explosion,stability,and convergence in a multi-dimensional complex space [J].IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2002,6(1):58-73.

[4] Kennedy J,Eberhart R C.Particle Swarm Optimization [C]//Proc 1995 IEEE International Conference on Neural Networks.Piscataway,NJ,1995:1942-1948.

[5] Mulvey J M,Vladimirou H.Stochastic network optimization Models for inverstment planning[J].Annals of Operation Research,1995,43:477-490.

[6] Mulvey J M,Rosenbaum D P.Shetty Bala:strategic financial risk

(下转 225 页)